

## 非円形断面直線流路の2次流に対する乱流モデルについて

NOTE ON TURBULENCE MODELING FOR SECONDARY FLOWS IN  
PASSAGES OF NON-CIRCULAR CROSS-SECTION

河原能久\*・玉井信行\*\*

By Yoshihisa KAWAHARA and Nobuyuki TAMAI

The mechanism for maintaining turbulent secondary flows in ducts and open channels of non-circular cross section is examined from a theoretical standpoint. It is proven mathematically that no turbulence model based on isotropic eddy viscosity concept predicts secondary motion. Furthermore, necessary conditions for a turbulence model which includes driving mechanism of the secondary flow are briefly discussed.

Keywords: secondary flow of the second kind, turbulence model, isotropic eddy viscosity

## 1. はじめに

長方形などの非円形断面の直線管路や開水路の乱流ではプラントルの第2種2次流が形成され、断面内において主流速度の等値線が隅角部に向かって張り出す形状となることが知られている (Fig. 1)。このような流れの構造について多くの測定および検討が行われ、非等方非一様なレイノルズ応力により2次流が維持されていること、2次流の大きさは高々主流速度の2~3%程度であり小さいが、主流速度の等値線を大きくひずませることや摩擦損失係数を増加させることなどが確認されている<sup>1)~3)</sup>。

最近、乱流モデルが発展させられており、多方面の複雑な流れに適用されている。そのなかで、2方程式モデル (Two-equation model) に分類される  $k-\epsilon$  モデルは三次元流れ場の解析に最も多く利用されている。しかし、 $k-\epsilon$  モデルのように等方的な渦動粘性係数を用いた乱流モデルでは非円形断面の直線流路の2次流を算出できないことが数値計算の経験から知られている<sup>4), 5)</sup>。そして、第2種2次流の計算のためには、代数的応力モデル

(Algebraic Reynolds stress model)<sup>5), 6)</sup>や応力方程式モデル (Reynolds stress model)<sup>7)</sup>などのように渦動粘性係数の概念を用いない乱流モデルや、 $k-\epsilon$  モデルに非線形項を加えたモデル<sup>8), 9)</sup>などが有効であると考えられている。実際、そのようなモデルが正方形や長方形などの横断面形状の管路や開水路の流れに適用され良好な結果が得られつつある。

このノートの目的は、等方的な渦動粘性係数を用いた乱流モデルが第2種2次流を再現しないという経験的事実を解析的に証明し、その理由を考察することである。また、その結果に基づいて、乱流モデルが2次流を表現するために必要な条件について検討することである。

## 2. 命題および基礎方程式

## (1) 命題と前提条件

証明すべき命題は以下のものである。

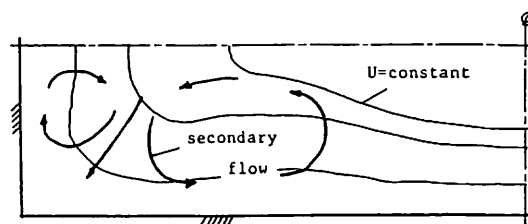


Fig. 1 Schematic view of flow in a rectangular duct.

\* 正会員 工博 東京大学講師 工学部土木工学科  
(〒113 文京区本郷7-3-1)

\*\* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科 (同上)

“等方的な渦動粘性係数を用いる乱流モデルは非円形断面をもつ直線流路の十分発達した乱流にみられる2次流を算出しない”。

また、命題の前提条件は次のようである。

- (a) 流体は非圧縮性ニュートン流体であり、その粘性係数は場所的に変化しない。
- (b) 流れは定常かつ十分発達した状態にある。
- (c) 作用する体積力はポテンシャル力である。
- (d) 流路は直線状の管路あるいは開水路であり、断面形状は単連結である。
- (e) レイノルズ応力は渦動粘性係数を用いた勾配拡散型で表現される。また、渦動粘性係数は等方的かつ非負である。

(2) 基礎方程式

座標系を Fig.2 に示すように設定し、主流方向を  $x$  軸とする。また、解析領域を  $A$ 、境界を  $\partial A$ 、そのうち壁面を  $\partial A_w$ 、自由水面を  $\partial A_f$  と表わす。基礎方程式は連続の式および  $y, z$  方向の運動量の式である。前提条件 (a)~(c) を用いて整理すると基礎方程式は以下のようになる。

$$V_{,y} + W_{,z} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$(\rho V^2)_{,y} + (\rho VW)_{,z} = -(P + \Omega)_{,y} + (-\rho \overline{v^2})_{,y} + (-\rho \overline{vw})_{,z} + \mu \Delta V \dots\dots\dots (2)$$

$$(\rho VW)_{,y} + (\rho W^2)_{,z} = -(P + \Omega)_{,z} + (-\rho \overline{vw})_{,y} + (-\rho \overline{w^2})_{,z} + \mu \Delta W \dots\dots\dots (3)$$

$$\Delta f = f_{,yy} + f_{,zz} \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $v, w$  は速度成分であり、大文字は平均流速、小文字は乱れ速度である。また、 $P$  は圧力、 $\Omega$  はポテンシャル、 $\rho$  は密度、 $\mu$  は粘性係数である。さらに、カンマと下付きの添字は偏微分を表わす。式 (4) はラプラシアン ( $\Delta$ ) の定義式である。

式 (2), (3) から主流方向の渦度 ( $\xi$ ) と2次流の運動エネルギー ( $\rho E$ ) の輸送方程式とを求めると次式となる。

$$(\xi V)_{,y} + (\xi W)_{,z} = \mu \Delta \xi + (\rho \overline{v^2})_{,yz} - (\rho \overline{w^2})_{,yz} + (\rho \overline{vw})_{,zz} - (\rho \overline{vw})_{,yy} \dots\dots\dots (5)$$

$$(\rho E V)_{,y} + (\rho E W)_{,z} = -[V(P + \Omega)]_{,y} - [W(P + \Omega)]_{,z} - V(\rho \overline{v^2})_{,y} - V(\rho \overline{vw})_{,z} - W(\rho \overline{vw})_{,y} - W(\rho \overline{w^2})_{,z} + \mu V \Delta V + \mu W \Delta W \dots\dots\dots (6)$$

$$\xi = W_{,y} - V_{,z} \dots\dots\dots (7)$$

$$E = (V^2 + W^2)/2 \dots\dots\dots (8)$$

前提条件(e)より、レイノルズ応力は渦動粘性係数 ( $\mu_t$ ) と平均流に対する変形速度テンソルを用いて次のように表現できる。

$$-\rho \overline{v_i v_j} = \mu_t (V_{i,j} + V_{j,i}) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \rho k \dots\dots\dots (9)$$

$$k = \overline{v_i v_i} / 2 \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $v_i$  は  $i$  方向の速度成分であり、 $i=2, 3$  がそれぞれ  $y, z$  方向を示す。また、式 (10) では  $i$  について総和をとる。

従来、第2種2次流の解析では主流方向の渦度方程式 (5) が用いられることが多い。これは、実験結果に基づき2次流の維持機構を検討するのに有効なためである。しかし、ここでは2次流の運動エネルギーの輸送方程式 (6) を用いて、等方的な渦動粘性係数を用いる乱流モデルでは流れ場の全領域で2次流がゼロとなることを示す。

式 (9) を式 (6) に代入し、さらに式 (11) で示される2次流に対する流れ関数 ( $\psi$ ) を導入すると、式 (6) は最終的に式 (12) のようになる。

$$V = \psi_{,z}, \quad W = -\psi_{,y} \dots\dots\dots (11 \cdot a, b)$$

$$[\psi_{,z}(\rho E + \phi)]_{,y} - [\psi_{,y}(\rho E + \phi)]_{,z} = (\mu_t \psi_{,y} \Delta \psi)_{,y} + (\mu_t \psi_{,z} \Delta \psi)_{,z} + 2[\mu_t(\psi_{,z} \psi_{,yz} - \psi_{,y} \psi_{,zz})]_{,y} + 2[\mu_t(\psi_{,y} \psi_{,yz} - \psi_{,z} \psi_{,yy})]_{,z} - \mu_t(\psi_{,yy} - \psi_{,zz})^2 - 4\mu_t \psi_{,yz}^2 + \mu(\psi_{,y} \Delta \psi)_{,y} + \mu(\psi_{,z} \Delta \psi)_{,z} - \mu(\Delta \psi)^2 \dots\dots\dots (12)$$

$$\phi = P + \Omega + \frac{2}{3} \rho k \dots\dots\dots (13)$$

式 (12) を全解析領域にわたり面積積分し、さらに、面積積分を境界での線積分に書き換えると次式となる。

$$\int_{\partial A} \psi_{,z}(\rho E + \phi) dz - \int_{\partial A} \psi_{,y}(\rho E + \phi) dy = \int_{\partial A} \mu_t \psi_{,y} \Delta \psi dz - \int_{\partial A} \mu_t \psi_{,z} \Delta \psi dy + 2 \int_{\partial A} \mu_t(\psi_{,z} \psi_{,yz} - \psi_{,y} \psi_{,zz}) dz - 2 \int_{\partial A} \mu_t(\psi_{,y} \psi_{,yz} - \psi_{,z} \psi_{,yy}) dy + \int_{\partial A} \mu \psi_{,y} \Delta \psi dz - \int_{\partial A} \mu \psi_{,z} \Delta \psi dy - \int \int_A [\mu(\Delta \psi)^2 + \mu_t(\psi_{,yy} - \psi_{,zz})^2 + 4\mu_t \psi_{,yz}^2] dy dz \dots\dots\dots (14)$$

上式を整理すると、式 (15) が得られる。

$$\int \int_A [\mu(\Delta \psi)^2 + \mu_t(\psi_{,yy} - \psi_{,zz})^2 + 4\mu_t \psi_{,yz}^2] dy dz = - \int_{\partial A} \psi_{,s}(\rho E + \phi) ds + \int_{\partial A} (\mu - \mu_t) \psi_{,n} \Delta \psi ds + 2 \int_{\partial A} \mu_t E_{,n} ds \dots\dots\dots (15)$$

3. 証明

境界条件が管路の場合と開水路の場合とで異なるため証明を分けて述べる。

(1) 管路流れ (Fig.2 (a))

壁面での境界条件は、平均流速がゼロであり、すべてのレイノルズ応力がゼロ、すなわち渦動粘性係数と乱れ運動エネルギーがゼロであることである。それらは、次式で表わされる。

$$V = 0, \quad W = 0, \quad v_t = 0, \quad k = 0 \quad \text{on } \partial A_w \dots\dots\dots (16)$$

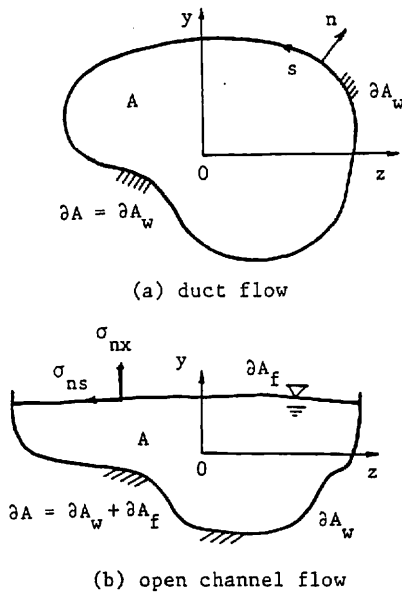


Fig. 2 The coordinate systems.

平均流速に対する境界条件を流れ関数で記述すると以下のようになる。

$$\psi=0 \text{ or } \psi_{,s}=0, \psi_{,n}=0 \quad \text{on } \partial A_w \dots (17)$$

ここで、 $s$  は壁面に沿う方向、 $n$  は壁面に垂直方向を示す。

境界条件式 (16), (17) を用いると、式 (15) の右辺の各項はゼロとなることが明らかである。なお、右辺第1項の圧力は前提条件 (d) より一価の関数であるから、それを含む積分値はゼロである。一方、前提条件 (e) より渦動粘性係数が非負であることから、左辺は非負である。したがって式 (15) が成立するための条件は流れ場の任意の位置で次式が成り立つことである。

$$\psi_{,yy} = \psi_{,zz} = \psi_{,zz} = 0 \dots (18)$$

これより、 $\psi_{,y}$ ,  $\psi_{,z}$  は全領域で一定である。境界条件式 (17) を考慮すれば、その一定値はゼロであることがわかる。すなわち、2次流は全領域でゼロであり存在しない。

(2) 開水路流れ (Fig. 2 (b))

壁面での境界条件は、管路流れの場合と同一であり式 (17) で与えられる。一方、自由水面での境界条件は、水面を垂直に横切る流速がゼロであることと水面に作用するせん断応力 (レイノルズ応力と分子粘性による応力との和であり、 $\sigma_{nx}$ ,  $\sigma_{ns}$  と表記する) がゼロであることである。それらは以下のように表わされる。

$$\begin{aligned} V_n &= 0, V_{n,s} = 0, \sigma_{nx} = (\mu + \mu_t) U_{,n} = 0 \\ \sigma_{ns} &= (\mu + \mu_t)(V_{s,n} + V_{n,s}) = 0 \quad \text{on } \partial A_f \dots (19) \end{aligned}$$

ここで、 $U$  は主流方向の平均速度である。上式を流れ関数で表現すると次式となる。

$$\psi_{,s} = 0, \psi_{,ss} = 0, \psi_{,nn} = 0 \dots (20)$$

したがって、水面では以下の関係が成り立つ。

$$\Delta\psi = 0, E_{,n} = V_n V_{n,n} + V_s V_{s,n} = 0 \quad \text{on } \partial A_f \dots (21)$$

境界条件式 (21) より、式 (16) の右辺の積分は開水路流れにおいてもゼロである。したがって、管路流れの場合と同様に2次流は存在しない。

4. 考 察

式 (15) と式 (6) とを対比させながら、等方的な渦動粘性係数を用いる乱流モデルが第2種2次流を生成しない理由を考えてみる。式 (15) より、移流項や圧力勾配、ポテンシャル力を表わす右辺第1項は乱流モデルとは無関係にゼロであり、それらの項は2次流への運動エネルギーの補給ではなく再配分の役割を果たしていることがわかる。したがって、2次流の生成、維持に基本的な役割を担っているのはレイノルズ応力である。等方的な渦動粘性係数を用いた乱流モデルが2次流を算出できないのは、レイノルズ応力  $-\rho \overline{v^2}$ ,  $-\rho \overline{w^2}$ ,  $-\rho \overline{vw}$  を通して主流の運動エネルギーを2次流に供給することができないためである。このことは、2次流に主流の運動エネルギーを輸送するモデルには主流速度の断面方向の勾配を含むことが必要であることを意味している。第2種2次流を算出するために利用されている乱流モデルの例を挙げると Table 1 のようである。2つのモデルとも確かにレイノルズ応力に主流の速度勾配を含んでいる。

次に、第2種2次流を算出する乱流モデルの必要条件を考えてみる。まず、モデルが式 (6) のレイノルズ応力を含む項の全領域にわたる積分値に対して、円形以外の任意の断面形状に対して正の値を与えることが必要である。負あるいはゼロを与えるモデルは物理的に矛盾をもつものである。2番目に、流れの場が層流の場合、渦動粘性係数が全領域でゼロである。式 (15) から知られるように、この場合にも断面内の流れは生じ得ない。このことを用いて主流方向の渦度方程式 (5) を考える。式 (5) の右辺第2項から第5項までの和が任意の地点

Table 1 Turbulence models for secondary flow.

(a) Launder-Ying model <sup>5)</sup>
$-\rho \overline{v^2} = -\rho c'_k k + c'_\mu \frac{k}{\epsilon} U_{,y}^2$
$-\rho \overline{w^2} = -\rho c'_k k + c'_\mu \frac{k}{\epsilon} U_{,z}^2$
$-\rho \overline{vw} = c'_\mu \frac{k}{\epsilon} U_{,y} U_{,z}$
(b) Speziale model <sup>9)</sup>
$-\rho \overline{v^2} = -\frac{2}{3} \rho k + \frac{c_0}{12} \rho l^2 (U_{,y}^2 - 2 U_{,z}^2) + \frac{c_E}{3} \rho l^2 (U_{,y}^2 + U_{,z}^2)$
$-\rho \overline{w^2} = -\frac{2}{3} \rho k + \frac{c_0}{12} \rho l^2 (U_{,z}^2 - 2 U_{,y}^2) + \frac{c_E}{3} \rho l^2 (U_{,y}^2 + U_{,z}^2)$
$-\rho \overline{vw} = \frac{c_0}{4} \rho l^2 U_{,y} U_{,z}$
$l = ck^{1/2}/\epsilon$
$c'_k, c', c_0, c_E, c$ : constants.
$\epsilon$ : energy dissipation rate.

でゼロとなるようなモデルでは、層流と同一の式となり2次流を生じさせない。この第2項から第5項までの和が恒等的にはゼロでないという条件は、前述の2次流を再現するモデルがレイノルズ応力  $-\rho\overline{v^2}$ ,  $-\rho\overline{w^2}$ ,  $-\rho\overline{vw}$  の表現に主流の速度勾配を含む必要があることを考えると、 $\rho\overline{w^2}-\rho\overline{v^2}$ ,  $-\rho\overline{vw}$  が主流速度の勾配を含むというより厳しい条件に言い換えることができよう。もとより、ここに述べた条件は十分条件ではない。第2種2次流に対する乱流モデルにはまだ多くの未解明な点がある<sup>10)</sup>。レイノルズ応力場の詳細な検討が、特に異方性の強い壁面や自由水面近傍について必要であると考えられる。

## 5. あとがき

非円形断面をもつ直線流路の乱流でみられる第2種2次流は、等方的な渦動粘性係数を用いるモデルでは再現されないことを解析的に示した。この証明の応用として乱流モデルの改良や数値計算について以下のことがいえる。

(a) 第2種2次流の維持には壁面近傍や自由水面近傍のレイノルズ応力の非等方性が大きく関与する。乱流モデルを改良して壁面や自由水面の効果を取り入れるようにしても、等方的な渦動粘性係数を用いる限りこの2次流を再現することはできない。

(b) 流れ場の数値解析の多くでは、流れ場を壁面まで解かず、壁関数 (wall function)<sup>11)</sup>を用いて流れの対数則が成立する領域から内部を求める。その場合には、境界条件は対数則が成り立つ位置で与えられ、壁面で指定されるのではない。等方的な渦動粘性係数を用いる乱流モデルを使用し、境界でレイノルズ応力に非等方性を与えれば (たとえば、応力方程式モデルで使用する壁関数<sup>11)</sup>を用いると) 誤った2次流を算出してしまふ。この種の誤りは、断面形が複雑になるほど起こりやすい。湾

曲流路の流れを  $k-\epsilon$  モデルで解析する際など、直線流路の流れを解くことはコンピュータコードのなかの境界条件の処理ルーチンの検証として意味がある。

## 参考文献

- 1) Brundrett, E. and Baines, W.D. : The production and diffusion of vorticity in duct flow, *J. Fluid Mech.*, Vol.19, pp.375~394, 1964.
- 2) Perkins, H.J. : The formation of streamwise vorticity in turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, Vol.44, 721~740, 1970.
- 3) 祢津家久・中川博次：一様開水路および閉管路の三次元乱流構造に関する研究, 土木学会論文集, 第369号, II-5, pp.89~98, 1986.
- 4) Rodi, W. : *Turbulence Models and Their Application in Hydraulics*, IAHR, Delft, 1980.
- 5) Launder, B.E. and Ying, W.M. : Prediction of flow and heat transfer in ducts of square cross-section, *Proc. Inst. Mech. Eng.*, Vol.187, pp.455~461, 1973.
- 6) Naot, D. and Rodi, W. : Calculation of secondary currents in open channel flow, *J. Hydraulics Div.*, ASCE, Vol.108, HY 8, pp.948~968, 1982.
- 7) Reece, G.J. : A generalized Reynolds stress model of turbulence, Ph.D. Thesis, Imperial College, London, 1976.
- 8) 西島勝一・吉沢 徹：非等方  $k-\epsilon$  モデルを用いた矩形管内乱流の数値解析, 生産研究, 38巻, 1号, pp.46~49, 1986.
- 9) Speziale, C.G. : On nonlinear  $k-l$  and  $k-\epsilon$  models of turbulence, *J. Fluid Mech.*, Vol.178, pp.459~475, 1987.
- 10) Demuren, A.D. and Rodi, W. : Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts, *J. Fluid Mech.*, Vol.140, pp.189~222, 1984.
- 11) 甲藤好郎ほか編著：伝熱学特論, 養賢堂, pp.297, 1984.

(1988.2.24・受付)