

# 水工学における数値解析手法の 精度向上と実用化に関する研究

## 報 告 書

1992年2月

土木学会水理委員会「水理学・水文学における数値解析手法」研究小委員会

研究代表者 和 田 明

## II-3 局所流における数値解析手法の評価

東京大学工学部 河原能久

### 1. 解析対象とする流れ場と3次元数値解析手法の課題

本節は複雑な境界形状をもつ河道内の定常な局所流を対象とする3次元数値解析手法に関して、その有効性や問題点を議論することを目的としている。ここでは例として2つの異なる流れ場を解析する。1つは河川合流部の流れであり、河道の平面形状、本川・支川の主流線の湾曲にともなう渦度の伸張がプラントルの第1種2次流を生み出すものである。合流部直下に剝離域が形成される場合と導流堤の設置により剝離域の出現を抑制した場合の2通りを取り扱う。他の1つは複断面直線水路内の発達した乱流場であり、レイノルズ応力場の非等方性により第2種2次流が生成される流れである。いずれも河道の幾何学的形状の複雑さと顕著な2次流の存在とにより強い3次元性を示す流れである。2次流は運動量輸送や土砂輸送などにおいて大きな役割を果たすが、2次流を正確に再現することの重要性が3次元数値解析を必要とさせる根本的な理由であると考えられる。流れ場が複雑になるにつれて、あるいは流れ場の構造の詳細や形成機構を検討する場合に、3次元数値解析の真価が発揮されることになる。

3次元数値解析手法は適用性を限定しかねない重大な仮定をできるだけ導入しない方向で発展してきた。このため、定量的にも精度の高いことや適用範囲の広いこと、すなわち、高い信頼性と汎用性とがこの解析手法に最も求められる特性である。もちろん、計算時間や費用が少ないという経済性も重要な特性ではある。コンピュータ関連の技術の著しい進歩により、計算時間や利用可能な記憶容量からの制約は弱まりつつある。しかし、実際の大規模な3次元計算を実行することは困難であり、そのためにソフトウェア側で対応せざるを得ない数多くの検討課題が残されている。例えば、(1)流れのモデル(乱流モデルなど)の信頼性の向上、(2)複雑な境界形状をもつ流れ場の取り扱いの容易化、(3)基礎方程式中の移流項に対する信頼性の高い離散化手法の開発、(4)基礎方程式系の収束解を高速に算出するアルゴリズムの開発、(5)大規模で疎な係数行列をもつ連立一次方程式の解法的高速化、などを指摘することができる。もちろん、数値解析の目的や分解能に見合った精度の境界形状や粗度の分布などの情報を整備することは必要不可欠である。

本節で使用する数値解析手法の特徴を上記の課題に関連させて述べる。基礎方程式の離散化手法としては実績の多い有限体積法(コントロールボリューム法)<sup>1)</sup>を使用している。1番目の課題である流れのモデルの改良は解析結果の信頼性や汎用性を向上させる上で最も重要なものである。ここでは第1種2次流の存在する流れに対して標準 $k-\epsilon$ モデルを使用する。後述のように、このモデルは再循環領域が形成されるような流れ場に対しては無視できない誤差を生じさせるが、他方、応力モデルのような高次のモデルを複雑な形状の流れに適用するにはコンピュータコードの作成に過大な負担がかかるという理由による。また、第2種2次流が顕在する流れに対しては、代数応力モデルを適用する。これは、 $k-\epsilon$ モデルに代表されるような等方的な渦動粘性係数を用いるモデルでは2次流を再現できないこと<sup>2)</sup>や応力モデルと同様な結果がより経済的に得られるという理由による。3次元数値解析の真の有効性は複雑な流れ場の解析を可能にすることにあるが、現状は簡単な流れのモデルを使用して複雑な形状の流れ場を解析するか、高次のモデルを用いて簡単な形状の複雑な乱流場を解析している状況にあると言えよう。複雑な境界形状内の複雑な流れ場の解析に適用できる乱流モデルを開発・整備することが必要である。

離散化手法として有限体積法や差分法を使用する場合には、複雑な境界形状の取り扱いが面倒な問題となる。水理量は境界近傍で大きく変化するが、そこでの解を精度よく求めることが信頼性の高い結果を得るために重要である場合には境界形状を正確に取り扱わねばならない。そのような場合には、通常、境界適合座標系を使用し、複雑な形状を直方体やその組合せで表現できる領域に変換する。基礎方程式はその曲線座標

系に対して記述される。本節でも境界適合座標系を使用する。しかし、一般的に完全な3次元直交格子網を生成することは容易でなく、非直交格子網を用いることが多い。非直交の境界適合座標系を使用することは多くの問題点を生じさせる。まず、記憶すべき格子点配置に関する幾何学量が多くなることや格子点数が制限されることである。2つめは優れた3次元格子生成法を必要とすることである。十分に滑らかで直交に近い格子網を、隣接する格子点間隔が緩やかに変化するように生成できることが必要とされる。3つめは基礎方程式中の項数が多くなり、プログラムの完成までに多大の時間を要することである。4つめは保存形で表現されない項が移流項から新たに派生し、その項の取り扱いが数値解析の精度に影響を及ぼすことである。特に、その項を通じて数値解が使用する格子網に依存するようになることである。これらの問題点はプログラム作成にとって大きな負担となっており、この負担を軽減する方法の開発が急務である。この点に関して、境界適合座標系とデカルト座標系の併用<sup>3)</sup>は1つの新しい方向である。すなわち、速度ベクトルを境界適合座標系でなくデカルト座標系で定義する方法である。このようにすると、移流項の表現は複雑になるものの保存形で記述されるようになり、解析結果の格子点配置への依存性が減る。速度場の解析においてどのような流速成分を未知数として選択するのが最適であるのか、反変成分か、その物理成分か、それともデカルト座標系で定義される成分であるのか、また、流速成分とスカラー量をどのような位置に定義するのがよいのかなどについて一層の検討が必要である。

3番目の課題である連続の式と運動量方程式やその他の輸送方程式をいかに連立させて解くかは、数値解析法に関する問題の中でも興味深いものである。本節では、いずれの流れ場に対してもSIMPLEアルゴリズム<sup>1)</sup>を用いる。SIMPLEを改良したものにSIMPLER<sup>1)</sup>やSIMPLEC<sup>4)</sup>、PISO<sup>5)</sup>と呼ばれるアルゴリズムなどがあり、改良されたアルゴリズムの方が収束速度が大きいと報告されることが多い。しかし、複雑な乱流場の解析ではアルゴリズムの差異の影響は明かでない。格子網の非直交性の影響も不詳である。また、直線流路の流れ場を解析する場合にはSIMPLEアルゴリズムが計算時間が最も短く有効である。上記のすべてのアルゴリズムは運動量方程式と連続式とを分離して解くものであり、同時に解くものではない。方程式間の連結の度合を増せば収束速度の大きくなることが期待できる。また、多層の格子網を使用し残差を効率的に減少させ収束速度を大きくするMultigrid法<sup>6)</sup>の開発・改良が盛んに行われている。スーパーコンピュータのベクトル処理や並列処理を有効に利用するアルゴリズムの開発も進められている。3次元数値解析の高い経済性を維持するための手法として、高速なアルゴリズムの整備が望まれている。

移流項の離散化表現には1次の風上スキーム、ハイブリッドスキーム、べき乗スキーム<sup>1)</sup>をはじめとし、2次の風上スキーム、QUICKスキーム<sup>7)</sup>、河村スキーム<sup>8)</sup>に代表されるようなより高精度のものがある。ここではプログラミングの容易さと数値計算上の精度の理由から、合流部の流れの解析にはハイブリッドスキーム、複断面流れの解析にはべき乗スキームを使用している。一般に、精度の低いスキームは人工粘性を導入し解の精度を低下させ、高精度のスキームは流れの急変部において物理的に不合理な振動解を算出することが知られている。設定できる格子点数が制限される3次元解析においては、適切な格子点配置を使用することと移流項の高精度スキームを使用することが数値解の精度を確保するために必要である。最近、信頼性の高いスキームが提案されている<sup>9-11)</sup>が、それらをさらに発展させることが必要である。

基礎方程式は離散化され連立一次方程式に帰着される。その解法としては反復解法が多用されている。計算時間の多くが連立一次方程式の解法ルーチンにおいて費やされるので、収束速度の大きく計算時間の短い解法を選択することが経済性の観点から重要である。ここでは、線ガウス-ザイデル法や、線ガウス-ザイデル過剰緩和法<sup>4)</sup>、MSI法<sup>12)</sup>を使用している。しかし、近年盛んに開発が進められてきた前処理付きの共役勾配法やその系統の解法は、収束速度や必要な記憶容量から判断して、利用を検討するに値するものと考えられる<sup>13,14)</sup>。

本節での内容は以下のようなものである。まず、デカルト座標系で基礎方程式を整理し、それを基に、境界適合座標系とそれとは独立に導入される速度成分の定義に使用する座標系とを併用する場合の基礎方程式の表現

を導出する。これにより使用する基礎方程式の表現の特徴をみるとともに、河川合流部の流れの解析で利用する基礎方程式をその特別な場合として得る。次に、河川合流部の流れに対する数値解析手法の概要を述べ、解析結果と実験結果との対比に基づいて、数値解析法の妥当性や問題点を整理する。最後に、複断面流れに対する数値解析手法を説明し、解析結果の妥当性の検討や問題点を議論する。

## 2. 複雑な境界形状をもつ流れ場に対する基礎方程式の表現

### 2. 1 デカルト座標系での基礎方程式

標準  $k - \varepsilon$  モデルを使用して河川合流部の流れを解析する場合に用いる基礎方程式の表現を求める。実際の解析ではテンソル解析を利用して基礎方程式を導いたが、前述のように、基礎方程式の表現、特に速度成分の定義方法を検討すべき時期にきていると考えられる。そこで、基礎方程式の一般的な表現をテンソル解析を用いず座標変換により導出し、その特別な場合として一般曲線座標系での表現を得ることとする。これにより、速度成分の表現が数値解析手法にどのような影響を及ぼすのかを定性的に判断することが可能となる。以下では、まずデカルト座標系での基礎式系の統一的な表現を求め、続いて境界適合座標系と速度成分を定義する別の座標系を導入し、最後に座標変換により一般的な表現を得る。そして、速度成分の定義の差異がどのような形で現れるか、どういう特徴を有するのかを検討する。

標準  $k - \varepsilon$  モデルを使用する場合の基礎方程式系はデカルト座標系では次のように統一的に表すことができる。

$$\frac{\partial}{\partial y^i} \left( V^i \phi - \Gamma \delta^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial y^j} \right) = s(\phi) \quad (1a)$$

ここで、 $\phi$  は未知量であり、平均流速成分 ( $V^i$ ,  $i=1, 2, 3$ ) や乱れエネルギー ( $k$ )、乱れエネルギーの散逸率 ( $\varepsilon$ ) を表す。また、 $y^i$  ( $i=1, 2, 3$ ) は座標、 $\Gamma$  は拡散係数、 $s(\phi)$  は生成項を示す。 $\delta^{ij}$  はクロネッカのデルタであり、添字については総和規約を適用することとする。上式をベクトル表示すれば、次式となる。

$$\nabla \cdot (U\phi) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) = s(\phi) \quad (1b)$$

具体的な内容を書き下すと、以下のようなになる。

連続の式：

$$\phi = 1, \quad \Gamma = 0, \quad s = 0 \quad (2a)$$

平均流の運動量方程式：

$$\phi = V^i, \quad \Gamma = \nu, \quad s = -\delta^{ij} \frac{\partial}{\partial y^j} \left( \frac{P}{\rho} + \omega \right) + \frac{\partial}{\partial y^j} r^{ij} \quad (2b)$$

乱れエネルギーの輸送方程式：

$$\phi = k, \quad \Gamma = \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}, \quad s = \text{Prod} - \varepsilon \quad (2c)$$

乱れエネルギーの散逸率の輸送方程式：

$$\phi = \varepsilon, \quad \Gamma = \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}, \quad s = \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} \text{Prod} - c_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (2d)$$

ただし、 $\omega$  はポテンシャルであり、基準線からの鉛直高さ  $z$  を用いて  $g z$  と表される。 $r^{ij}$  はレイノルズ応力、 $\nu_t$  は渦動粘性係数、 $\text{Prod}$  は乱れエネルギーの生成率を表し、次のように求められる。

$$r^{ij} = \nu_t \left( \delta^{jk} \frac{\partial V^i}{\partial y^k} + \delta^{ik} \frac{\partial V^j}{\partial y^k} \right) - \frac{2}{3} k \delta^{ij} \quad (3a)$$

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3b)$$

$$\text{Prod} = \delta_{ik} r^{ij} \frac{\partial V^k}{\partial y^j} \quad (3c)$$

なお、標準  $k - \varepsilon$  モデル中の定数値は以下のようである。

$$c_\mu = 0.09, c_{\varepsilon 1} = 1.44, c_{\varepsilon 2} = 1.92, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3$$

また、運動量方程式 (2 b) については、次のように表示する方が式の変形に際して都合がよい。

$$\frac{\partial}{\partial y^i} [(e^i \cdot U)U - e^i T] = -e^i \frac{\partial}{\partial y^i} \left( \frac{P}{\rho} + \omega \right) \quad (4)$$

ここで、 $e_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) はデカルト座標系での基底ベクトルであり、左辺第 2 項は基底ベクトルと応力テンソル ( $T$ ) とのダイアディック三重積である。応力テンソル ( $T$ ) は以下のように表される。

$$T = (e_i, e_j) t^{ij} \quad (5a)$$

$$t^{ij} = \nu \left( \delta^{jk} \frac{\partial V^i}{\partial y^k} + \delta^{ik} \frac{\partial V^j}{\partial y^k} \right) + r^{ij} \quad (5b)$$

## 2. 2 新しい座標系での基礎方程式

一般のテンソル解析では、位置ベクトルと速度ベクトルとを同一の基底ベクトルに対して定義するが、ここでは基底ベクトルのとり方を一般化し、位置の基底ベクトルと速度の基底ベクトルとを全く独立に設定する<sup>3)</sup>。各座標系でのベクトル量、テンソル量の関係と使用する記号とを表-1 に示す。次に、大きさを計量

表-1 各座標系での記号の定義

	デカルト座標系	位置ベクトルを定義する座標系	速度ベクトルを定義する座標系
基底ベクトル	$e_i, e^i$	$g_i, g^i$	$\overset{*}{g}_i, \overset{*}{g}^i$
位置ベクトル	$y^i e_i$	$x^i g_i$	—
速度ベクトル	$V^i e_i$	—	$U^i \overset{*}{g}_i$
応力テンソル	$(e_i, e_j) r^{ij}$ $(e_i, e_j) t^{ij}$	—	$(\overset{*}{g}_i, \overset{*}{g}_j) \sigma^{ij}$ $(\overset{*}{g}_i, \overset{*}{g}_j) \tau^{ij}$

表-2 内積の定義と内積間の関係式

(a) 定義

$$g_{ij} = (g_i \cdot g_j), g^{ij} = (g^i \cdot g^j)$$

$$\overset{*}{g}_{ij} = (\overset{*}{g}_i \cdot \overset{*}{g}_j), \overset{*}{g}^{ij} = (\overset{*}{g}^i \cdot \overset{*}{g}^j)$$

$$h^i_j = (g^i \cdot \overset{*}{g}_j), h^{ij} = (g^i \cdot \overset{*}{g}^j), \gamma^k_{ij} = (\overset{*}{g}^k \cdot \frac{\partial \overset{*}{g}_j}{\partial x^i})$$

(b) 内積に関する関係式

$$(e_i \cdot e^j) = \delta^j_i, (e_i \cdot e_j) = \delta_{ij}, (e^i \cdot e^j) = \delta^{ij}$$

$$(g_i \cdot g^j) = g_{ik} g^{jk} = \delta^j_i, (\overset{*}{g}_i \cdot \overset{*}{g}^j) = \overset{*}{g}_{ik} \overset{*}{g}^{jk} = \delta^j_i$$

$$(g^i \cdot e_k)(\overset{*}{g}_j \cdot e^k) = h^i_j, (g^i \cdot e^k)(\overset{*}{g}^j \cdot e_k) = h^{ij}$$

$$(\overset{*}{g}^i \cdot e_k)(\overset{*}{g}^j \cdot e^k) = \overset{*}{g}^{ij}, h^{ik} h^j_k = g^{ij}$$

表-3 デカルト座標系から新しい座標系への変換則

位置ベクトル	$y^i = x^j (g_j \cdot e^i)$
速度ベクトル	$V^i = U^j (\overset{*}{g}_j \cdot e^i)$
応力テンソル	$r^{ij} = (\overset{*}{g}_m \cdot e^i)(\overset{*}{g}_n \cdot e^j) \sigma^{mn}$ $t^{ij} = (\overset{*}{g}_m \cdot e^i)(\overset{*}{g}_n \cdot e^j) \tau^{mn}$
微分操作	$\frac{\partial \phi}{\partial y^i} = (g^j \cdot e_i) \frac{\partial \phi}{\partial x^j}$ または $\frac{\partial \phi}{\partial y^i} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^j} [J (g^j \cdot e_i) \phi]$

するための基準量として基底ベクトルの内積に関する諸量を定義する必要がある。それらの定義と諸量の間  
の関係式とを表-2に整理する。さらに、異なる座標系間でのベクトル量、テンソル量、微分に関する変換  
則を表-3に示す。表中の記号(J)は座標変換のヤコビアンである。

以上の関係式を用いて、連続の式を含むスカラー変数の輸送方程式(1a)をデカルト座標系から新しい  
座標系に対して変換すると、次式を得る。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ J \left( h^i_j U^j \phi - \Gamma g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) \right] = s(\phi) \quad (6)$$

この式の物理的な意味を $x^1$ 方向について表したものが図-1である。 $J g^1$ は $x_1$ =一定の面に垂直な面積ベ  
クトルであり、それと速度ベクトル $U$ との内積は単位時間にその面を通過する流体の体積である。したがっ  
て、 $(J g^1 \cdot U) \phi$ 、あるいはそれを書き下した $J h^1_j U^j \phi$ はスカラー量 $\phi$ が移流により $x_1$ =一定の面を通し  
て輸送される総量を表す。また、拡散による輸送されるフラックスはベクトル表示で $-\Gamma \nabla \phi$ であり、 $x_1$ =  
一定の面を横切って輸送される総量は面積ベクトル $J g^1$ との内積で求められる。それを成分を用いて表すと  
上式の左辺第2項にて $i$ を1としたものとなる。式(6)は単位体積当りの輸送量の収支を表現しているた  
めに、左辺にヤコビアン $J$ を含んでいる。

平均流の運動量方程式(4)は次のように求められる。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^m} \left[ J h^m_i \bar{g}_j (U^i U^j - \tau^{ij}) \right] = -e^i (g^m \cdot e_i) \frac{\partial}{\partial x^m} \left( \frac{P}{\rho} + \omega \right) \quad (7)$$

この式の物理的な意味を図示したものが図-2である。上式の両辺にベクトル $\bar{g}^k$ を乗じ内積をとると、求め  
るべき流速 $U^k$ に対する運動量方程式が得られる。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^m} \left[ J h^m_i (U^i U^k - \tau^{ij}) \right] + \gamma_{jm}^k h^m_i (U^i U^j - \tau^{ij}) = -h^{mk} \frac{\partial}{\partial x^m} \left( \frac{P}{\rho} + \omega \right) \quad (8)$$

いま、 $x_1$ =一定の面に垂直な速度成分を $W^i$ と表すと、式(6)、(8)は次のように表される。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ J \left( W^i \phi - \Gamma g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) \right] = s(\phi) \quad (9)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^m} \left[ J (W^m U^k - h^m_i \tau^{ij}) \right] + \gamma_{jm}^k (W^m U^j - h^m_i \tau^{ij}) = -h^{mk} \frac{\partial}{\partial x^m} \left( \frac{P}{\rho} + \omega \right) \quad (10)$$

$$W^i = h^i_j U^j \quad (11)$$

### 2. 3 座標系の例とその特徴

2種類の座標系を考える。まず、位置ベクトルと速度ベクトルをともに境界適合座標系に対して定義する

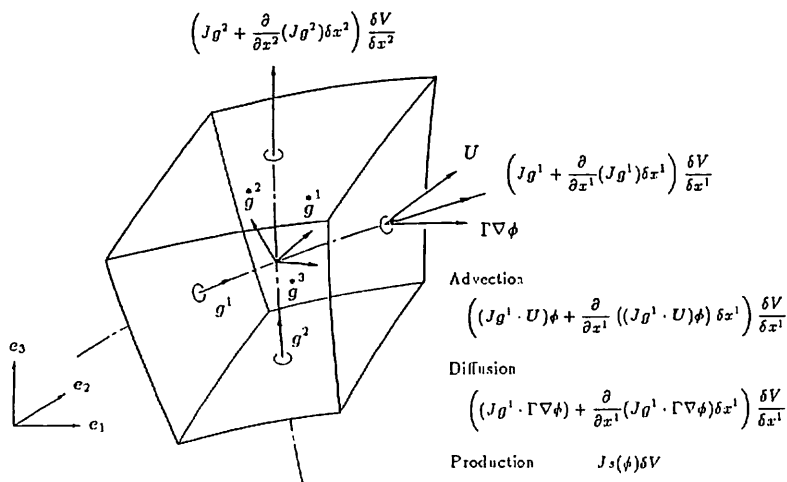


図-1 スカラー量の輸送方程式中の項の物理的意味

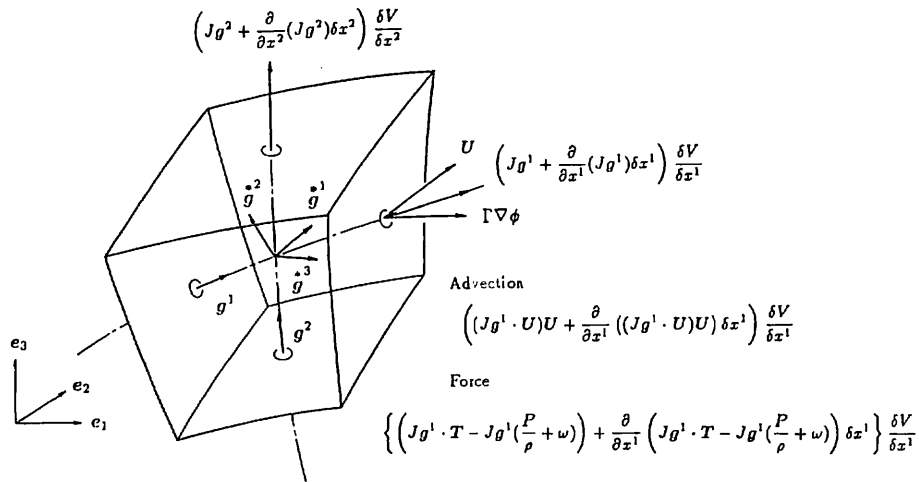


図2 運動量方程式中の項の物理的意味

場合を考える。このとき  $\mathbf{g}_i = \mathbf{g}_i$ ,  $\mathbf{g}^i = \mathbf{g}^i$  より、基底ベクトルの内積に関して次式が成り立つ。

$$h^i_j = \delta^i_j, \mathbf{g}^i_j = g_{ij}, \mathbf{g}^{ij} = h^{ij} = g^{ij}, \gamma_{ln}^m = \Gamma_{ln}^m, W^i = U^i \quad (12)$$

ここで、 $\Gamma^i_{jkl}$  はテンソル解析で使用される第2種クリストッフエル記号である。したがって、スカラー変数の輸送方程式と運動量方程式はそれぞれ以下のようなになる。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ J \left( U^i \phi - \Gamma g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) \right] = s(\phi) \quad (13)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ J \left( U^i U^k - \tau^{ik} \right) \right] + \Gamma^k_{ij} \left( U^i U^j - \tau^{ij} \right) = -g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{P}{\rho} + \omega \right) \quad (14)$$

これらの結果は通常のテンソル解析から得られる結果と同一である。

次に、位置ベクトルを境界適合座標系に対して、速度ベクトルをデカルト座標系に対して定義する場合の基礎方程式を導く。このとき  $\mathbf{g}_i = \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{g}^i = \mathbf{e}^i$  であるから、基底ベクトルの内積に対して次式が成り立つ。

$$\mathbf{g}^i_j = \delta^i_j, \mathbf{g}^{ij} = \delta^{ij}, \gamma_{ln}^m = 0 \quad (15)$$

これらの関係を用いると、スカラー変数の輸送方程式と運動量方程式とが求められる。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ J \left( h^i_j U^j \phi - \Gamma g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) \right] = s(\phi) \quad (16)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^m} \left[ J h^m_i \left( U^i U^k - \tau^{ij} \right) \right] = -h^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{P}{\rho} + \omega \right) \quad (17)$$

あるいは、速度成分  $W^i$  を用いれば以下のように表される。

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ J \left( W^i \phi - \Gamma g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \right) \right] = s(\phi) \quad (18)$$

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x^m} \left[ J \left( W^m U^k - h^m_i \tau^{ij} \right) \right] = -h^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{P}{\rho} + \omega \right) \quad (19)$$

式(13, 14)の組と式(18, 19)の組とを比較すると、速度ベクトルの定義の差異の影響として次のことが知られる。位置ベクトルと速度ベクトルとを同じ境界適合座標系に対して定義すると、基礎方程式の左辺の移流項のうち微分操作を受ける項が簡潔に表現されることが理解される。しかし、クリストッフエル記号を含む項が現れ、しかもそれが微分操作を受けない非保存形をとっている。この項は必ずしも絶対値が小さくなく高精度の体積積分を必要とする。クリストッフエル記号が十分に滑らかに変化するように格子網を生成しない場合や、精度の低い体積積分を施す場合には数値解が使用する格子網に敏感となる。一方、速度ベクトルをデカルト座標系に対して定義すると、移流項が複雑になる。また、ここでは示さないが、境

界条件の処理も複雑になる。しかし、移流項がすべて保存系で書かれ、格子網への依存性を低減することが期待できる。

### 3. 河川合流部の流れ場の解析

#### 3. 1 概説

河川合流部は異なる特性を有する2つ以上の河川が会合する地点であり、河川工学上さまざまな問題を生じさせる。河床の洗掘・堆積、水衝部の発生、合流部の水位上昇による洪水疎通能力の低下などの治水上の問題や合流後の物質の混合などの水質環境にかかわる問題が挙げられる。合流部の流れの解明は極めて重要な課題ではあるが、未だ十分な解析が行われていない。これは、本川と支川からの流れの衝突・混合や主流線の湾曲、あるいは河幅や河床形態などの河道の幾何学的形状の変化の影響などが重なり合い、非定常で複雑な3次元流況を示すからである。流れの3次元構造に関する実験結果<sup>15-18)</sup>の一層の蓄積が不可欠であり、特に、詳細な平均流速場やレイノルズ応力場に関する詳細な測定結果が要望されている。このような複雑な境界形状内の複雑な流れ場の解析に対して、3次元数値解析は有効な手法であるばかりでなく、流れの構造解明に主要な役割を演ずることと考えられる。3次元解析例は数少なく<sup>19-22)</sup>、今後の発展が大いに期待される場所である。

ここでは、流れ場の非定常性や土砂輸送の問題は取り扱わず、平坦な固定床上の定常な流れ場を対象とする。この流れ場には、図-3に示すように、流線の湾曲に伴う第1種2次流が存在するとともに、混合層や再循環領域、剝離剪断層が形成される。これらの特徴的な流れの構造を1つの乱流モデルを用いて精度よく再現することは現時点では困難である。応力モデルが最も有力な乱流モデルであるが、複雑な形状の3次元解析に利用することは有効でなく、モデル自体の改良と数値解析法の発展が必要である。そこで、ここでは標準k-εモデルを全解析領域に適用することとする。

以下では、主流、2次流あるいは水深を測定した実験結果と数値解析結果とを比較し、乱流モデルの適用性や数値解析法の問題点を検討する。2つの実験結果を取り上げる。1つはWeerakoonらによる再循環領域を形成する流れの結果<sup>19)</sup>である。他の1つは多田による導流堤を有し再循環領域のない流れの結果<sup>23)</sup>である。

#### 3. 2 基礎方程式と計算手法

本川、支川とも直線状の開水路流れを対象とする。解析コードの信頼性と汎用性を確保するために境界適合座標系を設定する。この座標系、

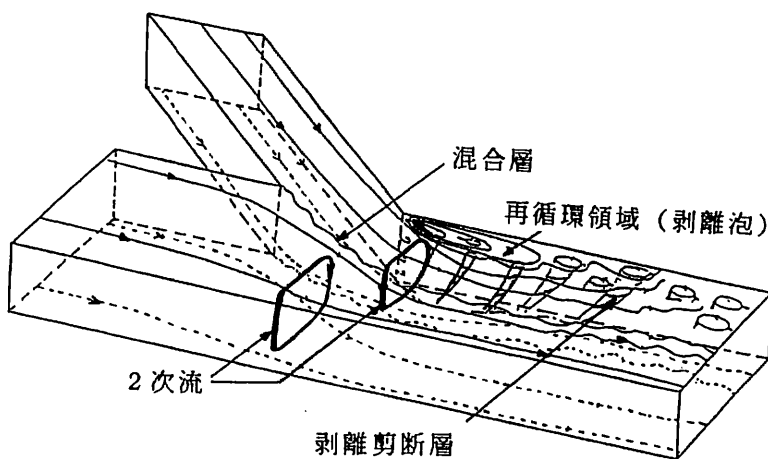


図-3 河川合流部の流れの特徴

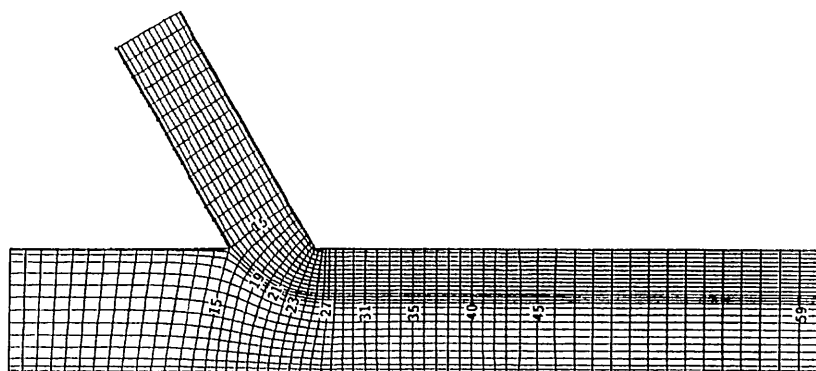


図-4 計算に使用した格子網の一部 (Weerakoon らの実験)



すなわち3次元格子網は次のように生成される<sup>22)</sup>。まず平坦河床に平行な平面内で偏微分方程式を解くことにより直交に近くかつ滑らかな2次元格子網を生成する。次に河床に直交するように水深方向の格子点を配置する。ここでは水面の位置が場所に依らず河床に平行であるとして格子点を配置している。

基礎方程式を境界適合座標系に対して書き表すと、前述の式(13, 14)となる。境界条件は次のように設定する<sup>22)</sup>。上流端では別途計算で求めた十分に発達した流れ場を与える。下流端では流下方向の変化がないという条件、すなわち未知量の流下方向の勾配がゼロの条件を用いる。また、壁面では壁関数法を適用し、水面では対称面の条件、つまり未知量の水面に垂直方向の勾配をゼロとする。

変数の定義位置はスタガード配置である。有限体積法に基づき基礎方程式を離散化し、SIMPLEアルゴリズムを用いて収束解を得る。移流項の離散化にはハイブリッドスキームを用いる。また、連立一次方程式の解法としては、圧力補正に対してのみMSI法を使用し、その他の未知量に対しては線ガウス-ザイデル法を使用している。

### 3.3 計算結果と実験結果との比較

#### (1) Weerakoonらの実験結果との比較

実験条件は次のようである。本川、支川の水路幅はそれぞれ50cm, 30cmであり、合流角度が60度、河床勾配が1/1000の水路を用いて、本川、支川それぞれに10.0 (1/s), 8.0 (1/s)の流量を流し、下流の等流水深9cmを得ている。計算に用いた格子点配置を図-4に示す。図中の番号は断面位置を表す。格子点数は流下方向に60、幅方向に30、水深方向に8点である。

図-5は、河床に平行な平面内の流速ベクトルの分布について解析結果と実験結果とを対比したものである。図(a), (b)はそれぞれ水面近くおよび河床近くの位置での流況を示す。実験結果より、流向が2平面で異なり2次流の存在が示唆されることや再循環領域の大きさが河床に近づくにつれて小さくなることから知られる。計算結果と実験結果とを比較すると、計算結果が上述の特徴を定性的には正しく再現していることがわかる。しかし、剣離泡の大きさが30%程度過小評価されている。このために有効な流水断面積が正しく算出されず流速の大きさに差異が生じている。この原因として次のことを指摘できる。最も大きな原因は $k-\epsilon$ モデルの適用限界である。 $k-\epsilon$ モデルは乱れエネルギーの生成機構を表

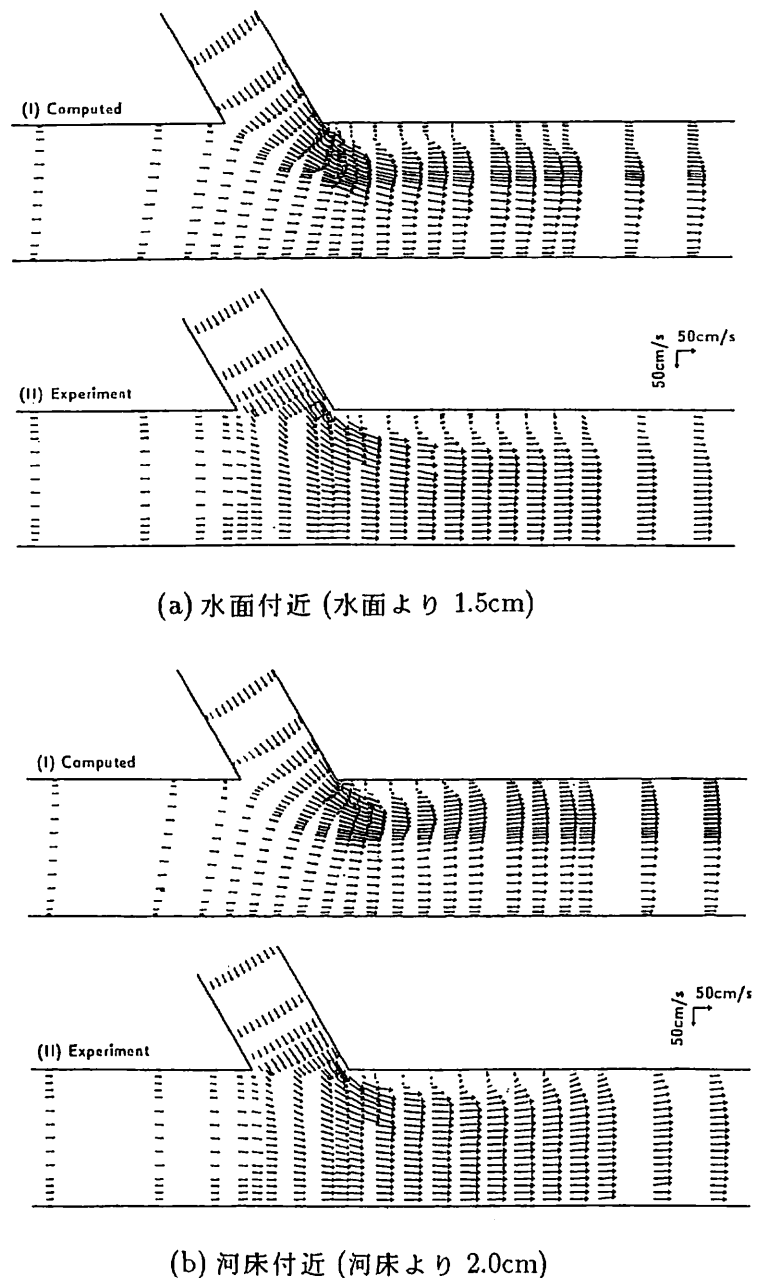


図-5 平面内の流速ベクトルの比較

現できないために再循環領域での乱れエネルギーの生成率を過大に算出する。それが乱れエネルギーそのもの、さらには渦動粘性係数の過大評価をもたらす。すなわち、数値解析では実験より大きな拡散機構が生み出され、それが主流の運動量を剝離泡中に輸送するために剝離泡の大きさが小さくなるものである。同様なことは段落ち部や段上がり部の再循環領域の解析でも起こる問題である。その他の原因として計算手法に起因するものが挙げられる。再循環領域付近では格子網を斜めに横切る流速が生じる。このような場合にはハイブリッドスキームはかなり大きな人工粘性を導入することになる。また、剝離泡内では水深が小さく計算領域として設定した水深との差が大きい。さらに、再循環領域の上流端付近では格子網が大きく変化するために、クリストッフェル記号を含む項の取り扱いも誤差を導入することになる。これらの原因を定量的に評価することは現段階では困難であるが、渦動粘性係数の過大評価と2次流の算出精度の低下の2種類の問題があると考えられる。

図-6は異なる流下方向位置での横断面内の2次流ベクトルの分布を示している。図中の番号は図-4の格子網中に示された断面位置と対応する。支川の流線の湾曲は本川のそれと比較して大きいので、2次流は支川側で強くなっている。また、支川側の2次流は流下するにつれて水路幅方向に広がっていく。断面31と35では剝離泡の周辺に上昇流が生じているが、これは流れの可視化法により得られた実験結果と一致している。

## (2) 多田の実験結果との比較

多田が使用した実験装置の概要を図-7に示す。本川、支川の流量はそれぞれ1.65 (l/s), 1.37 (l/s) である。合流角度は60度であり、上述の実験と同一

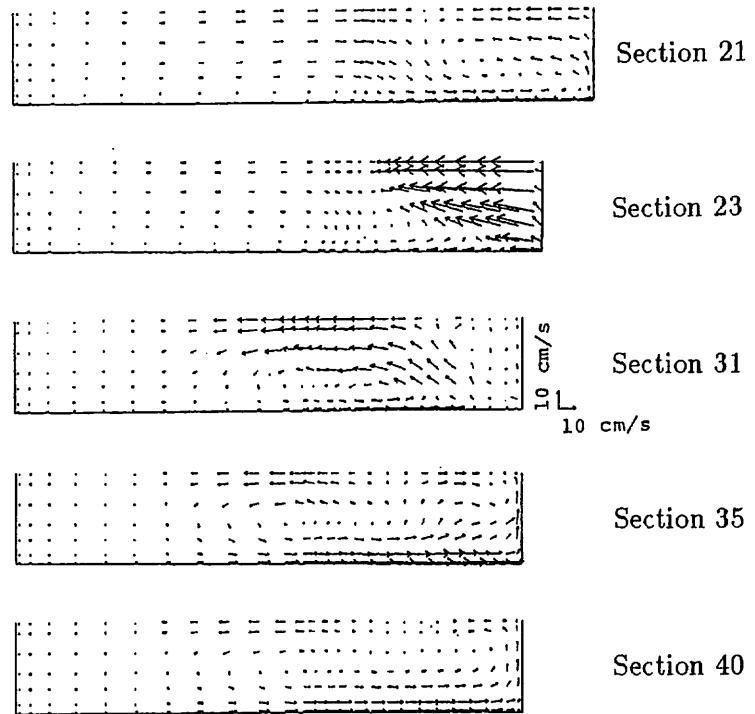


図-6 2次流ベクトルの変化(計算結果)

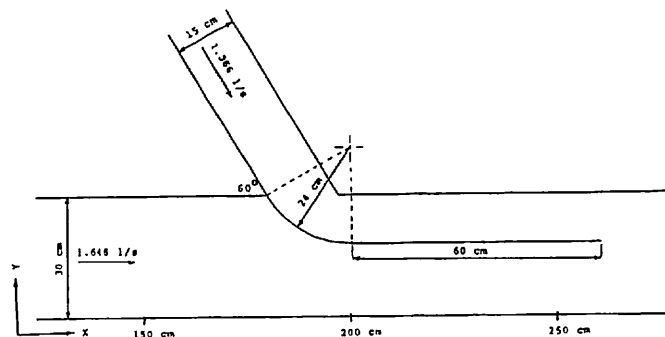


図-7 実験水路概要(多田の実験)

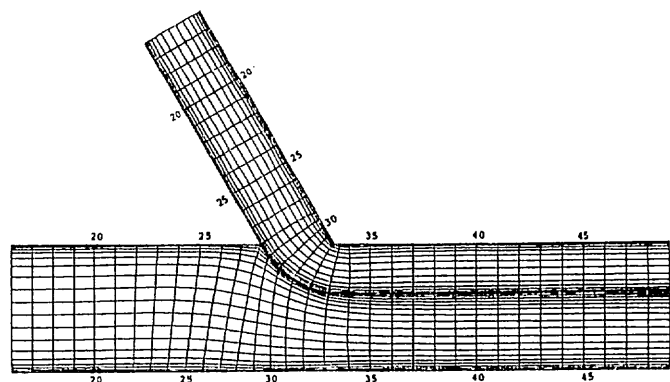


図-8 計算に使用した格子網の一部(多田の実験)

である。解析領域は流下方向に450cmであり、合流部後の範囲が300cmである。

この領域内に格子点を66×36×8点数配置している。その一部を図-8に表す。

図-9は河床に平行な平面内の流速ベクトルの計算結果を示すものである。図(a)の水面付近の流向と図(b)の河床付近の結果とを比較すると、支川側で流向の変化が大きく、そこに強い2次流が存在することが推測される。また、導流堤の設置により再循環領域が形成されていないことが予想される。

異なる流下位置における主流速度の鉛直方向分布について、解析結果と実験結果とを対比したものが図-10である。

図の縦軸hは底面からの高さであり、座標X、Yは図-7に示されている流下方向の位置と右岸からの距離を表す。図中の黒丸が測定結果を示す。この図から計算結果は実験結果と非常によく一致することがわかる。この結果は前述の再循環領域が形成される場合の結果と比較すると対照的であり、k-εモデルの有効性が理解される。ただし、合流部左岸(Y=29cm)における低流速領域に対して過大に算出している。この原因は不詳であるが、ハイブリッドスキームの使用が流速を加速する原因となっているのではないかと推測する。

水深の分布について比較したものが図-11である。黒丸が実験結果である。計算結果と実験結果との一致は良好である。

### 3.4 まとめ

河川合流部の流れに関して、再循環領域が形成される場合とされない場合とを解析した。その結果として次のようなことが明かとなった。標準k-εモデルは再循環領域が存在しない場合には実験結果を良好に再現する。しかし、剝離泡が形成される場合には、その大きさを過小

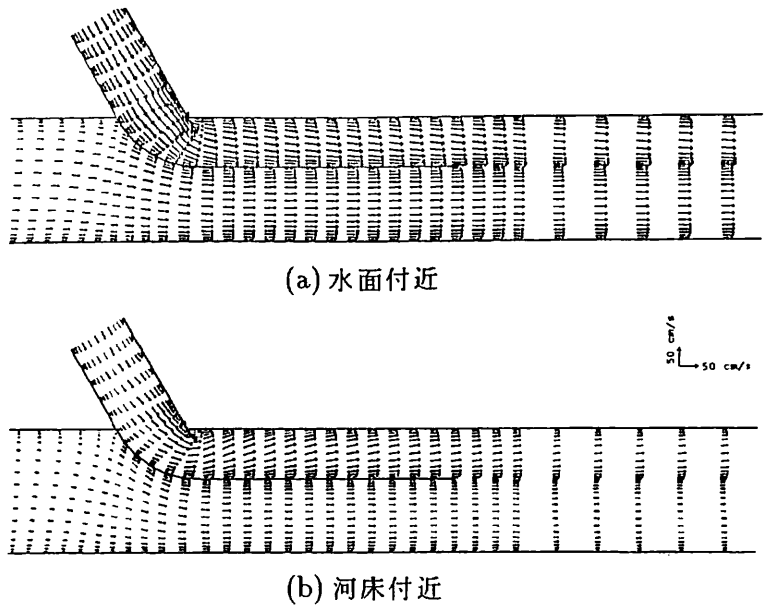


図-9 平面内の流速ベクトル(計算結果)

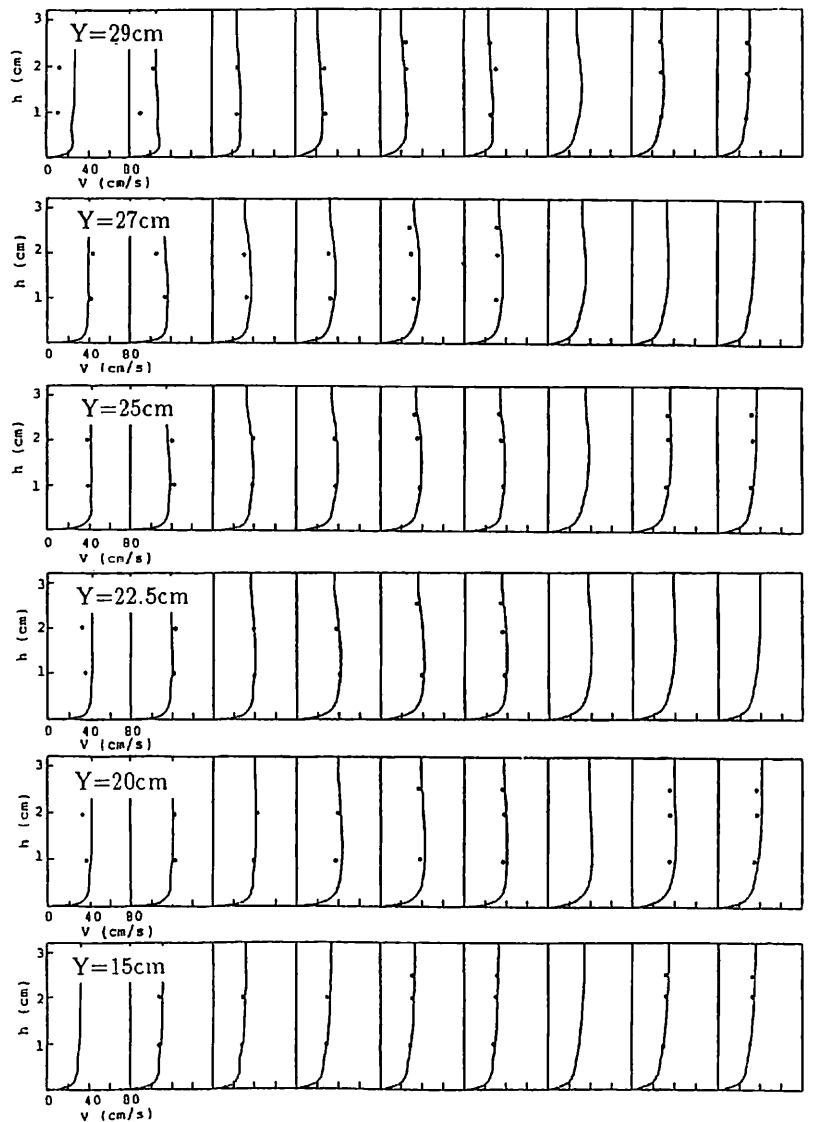


図-10 主流速度の鉛直分布の比較

流下方向位置: X=200,215,235,265,270,280,325,380,480cm

評価し主流の流速分布にかなりの差異を生じさせる。したがって、このような流れ場への標準  $k-\varepsilon$  モデルの適用性は高くなく、注意が必要である。今後、乱流モデル自体の信頼性の向上が第一義的に必要である。また、非定常性の影響を明らかにすることも必要であろう。

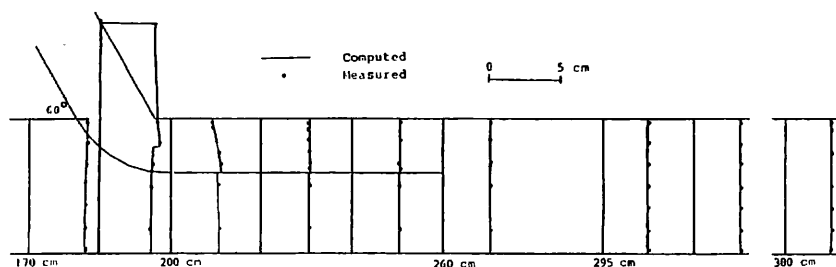


図-11 水深の比較

数値解析手法に関しては次の点に工夫をすることが必要である。まず、移流項に対する高精度スキームの採用である。これを利用することにより解の精度が向上することは明瞭である。さらに、これを組み込まない限り、乱流モデルの改良の成果を正確に評価することが困難である。もう一つは、自由水面の位置を効率的に更新する解析法を開発することが必要不可欠である。計算初期に水深に対してよい推定値を与えることは容易ではない。3次元解析手法の汎用性を考えるとき、この問題に対する有効な手法が早期に考案されることを期待したい。

#### 4. 複断面直線流路における流れ場の解析

##### 4. 1 概説

複断面直線開水路流れは、鉛直方向と横断方向とに大きな速度勾配をもち第2種2次流が存在するために、3次元性の強い流況を示すことが知られている<sup>24,25)</sup>。特に、高水敷先端から低水路へ向かう2次流の存在は顕著であり、これが低水路の主流に壁面近傍の小さい運動量を供給する。また、この2次流は水面近くで流向を変え、その一部が低水路から高水敷へ向かう流れとなるために、低水路の主流のもつ大きい運動量が高水敷側へ輸送される。これらにより、低水路と高水敷との境界付近の主流は鉛直方向にも横断方向にも極小値をとる複雑な流れとなる。第2種2次流は隅角部や低水路中央にも存在するが、その強さやパターンは水深や横断面形状、粗度の分布などの多くの因子の影響を受け変化する。このため、水理実験により各因子の影響を系統的に検討することは容易ではない。ここに、信頼性の高い3次元数値解析法を開発することの必要性和有効性とがある。

第2種2次流は横断面方向のレイノルズ応力の分布により決定される。これまで第2種2次流に対して乱流モデルは正方形断面流路の流れを主たる対象として開発されてきた。例えば、応力モデル<sup>26)</sup>、代数応力モデル<sup>27-30)</sup>、非線形  $k-\varepsilon$  モデル<sup>31-33)</sup> などがある。しかし、それらの乱流モデルの複断面流路の流れへの適用例は極めて少なく<sup>34-38)</sup>、モデルの精度や有効性には未だ不明な点が多い。例えば、応力モデルや代数応力モデルにおける壁面効果を取り込むための経験関数の関数形が不詳であることや非線形モデル  $k-\varepsilon$  モデル中の定数の最適化が十分でないことなどが挙げられる。また、自由水面においてレイノルズ応力の異方向性が強められるという特性を正確に表現できないことも課題である。

以下では、主流、2次流あるいはレイノルズ応力を測定した実験結果と数値解析結果とを比較し、乱流モデルの適用性を検討する。利用できる実験結果は少なく、ここでは2つの実験結果を取り上げる。1つは、富永らの開水路流れの実験結果<sup>39)</sup>であり、他の1つは中山らの十字形管路内の空気流に対する実験結果<sup>40)</sup>である。

##### 4. 2 基礎方程式と計算手法

使用する座標系を図-12に示す。比較に用いる実験の低水路側壁はいずれも低水路底面に垂直であるので、デカルト座標系を設定し、主流方向にx軸、底面に垂直方向にy軸、水路幅方向にz軸をとる。

基礎方程式は連続の式、運動量の方程式、乱れエネルギー(k)及びその逸散率(ε)の各輸送方程式であり、以下のように統一的に表現される。

$$\frac{\partial}{\partial x}(U\phi) + \frac{\partial}{\partial y}\left(V\phi - \Gamma\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(W\phi - \Gamma\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = s(\phi) \quad (20)$$

変数(φ)と拡散係数(Γ), 生成項(s(φ))の具体的な表現は次のようである。

連続の式:

$$\phi = 1, \quad \Gamma = 0, \quad s = 0 \quad (21a)$$

運動量方程式:

$$\phi = U, \quad \Gamma = \nu + \nu_t, \quad s = g \sin \theta - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\bar{P}}{\rho}\right) \quad (21b)$$

$$\phi = V, \quad \Gamma = \nu + \nu_t, \quad s = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P'}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{v^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\overline{vw}) \quad (21c)$$

$$\phi = W, \quad \Gamma = \nu + \nu_t, \quad s = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{P'}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(-\overline{vw}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\overline{w^2}) \quad (21d)$$

乱れエネルギーの輸送方程式:

$$\phi = k, \quad \Gamma = \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}, \quad s = \text{Prod} - \varepsilon \quad (21e)$$

エネルギー散逸率の輸送方程式:

$$\phi = \varepsilon, \quad \Gamma = \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}, \quad s = \frac{\varepsilon}{k}(c_{\varepsilon 1} \text{Prod} - c_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (21f)$$

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad \text{Prod} = \nu_t \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right] \quad (21g, h)$$

$$c_\mu = 0.09, \quad c_{\varepsilon 1} = 1.45, \quad c_{\varepsilon 2} = 1.9, \quad \sigma_k = 1.4, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

ここで、U, V, Wはそれぞれ平均流のx, y, z方向の速度成分、Pは圧力であり、主要部分(P)と偏差部分(P')とに分けられている。また、gは重力加速度、θは河床勾配、ν, ν<sub>t</sub>はそれぞれ分子動粘性係数と渦動粘性係数である。上式においては、主流が存在することと2次流の大きさが主流に比べて十分小さいことに基づき、放物形流れの近似<sup>41)</sup>を施している。すなわち、運動量の方程式において主流方向の拡散項とレイノルズ応力のx方向の微分項を無視している。さらに、圧力については主要部分が偏差部分に対して十分大きいとしている。その主要部分とは、開水路流れに対しては静水圧であり、管路流れに対しては断面平均圧力である。圧力の具体的な表示は次のようである。

開水路流れ:

$$P = \bar{P} + P' = \rho g \cos \theta (D_c - y) + P'(y, z) \quad (22a)$$

管路流れ:

$$P = \bar{P} + P' = \bar{P}(x) + P'(y, z) \quad (22b)$$

ここで、D<sub>c</sub>は低水路内の水深である。

2種類の乱流モデルを用いる。1つはモデル定数を再調整したLaunder-Yingモデル<sup>37)</sup>(LYモデルと略記)であり、他の1つは河原-玉井による代数応力モデル<sup>38)</sup>(KTモデル)である。前者は正方形断面の管内流に対して提案されたLaunder-Yingモデル<sup>27)</sup>を複断面流れ適用できるようにモデル定数の1つを変更したものである。一方、後者はNaot-Rodiモデル<sup>29)</sup>の拡張であり、非線形k-εモデルを包含する表現形式をとって

いる。各モデルにおけるレイノルズ応力はデカルト座標系では次のように示される。

L Yモデル：

$$\begin{aligned}
 -\overline{u^2} &= 2\nu_t \frac{\partial U}{\partial x} - c_{k_0}' k, \\
 -\overline{v^2} &= c' \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - c_k' k, \\
 -\overline{w^2} &= c' \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - c_k' k, \\
 -\overline{uv} &= \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\
 -\overline{uw} &= \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \\
 -\overline{vw} &= c' \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$c'_{k_0} = 0.915, \quad c_k' = 0.522, \quad c' = 0.037$$

K Tモデル：

$$\begin{aligned}
 -\overline{u^2} &= -\frac{2}{3}k + 2\nu_t \frac{\partial U}{\partial x} - c_1 \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right], \\
 -\overline{v^2} &= -\frac{2}{3}k + 2\nu_t \frac{\partial V}{\partial y} - \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[ c_2 \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + c_3 \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right], \\
 -\overline{w^2} &= -\frac{2}{3}k + 2\nu_t \frac{\partial W}{\partial z} - \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[ c_3 \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + c_2 \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right], \\
 -\overline{uv} &= \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\
 -\overline{uw} &= \nu_t \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \\
 -\overline{vw} &= \nu_t \left( \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + c_4 \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$c_1 = \frac{2}{3c_\psi} [2(1-\alpha) + \beta], \quad c_2 = \frac{2}{3c_\psi} [1-\alpha + 2\beta],$$

$$c_3 = \frac{2}{3c_\psi} [1-\alpha - \beta], \quad c_4 = \frac{2\beta}{c_\psi},$$

$$\alpha = 0.7638 - 0.06f, \quad \beta = 0.1091 + 0.06f, \tag{25}$$

$$\gamma = 0.185, \quad c_\psi = 1.5 - 0.5f$$

$$f = \left| \text{grad} \left( \frac{c_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa \varepsilon} \right) \right|$$

境界条件は入口断面、壁面及び対称面や水面にて与えられる。入口断面ではすべての変数に一様分布を与える。また、壁面の境界条件には壁関数を用いる。対称面ではすべての変数に対して勾配ゼロの条件を与える。水面ではエネルギー散逸率を以下の式で指定し<sup>29)</sup>、その他の変数に対しては勾配をゼロとする。

$$\varepsilon = \frac{c_\mu^{3/4} k^{3/2}}{k} \left( \frac{1}{z'} + \frac{1}{0.07D} \right) \tag{26}$$

ここで、Dは水深、z'は側壁からの距離である。

格子網は、必要な格子点数を与えることにより計算内部で壁面近傍で格子点間隔が密になるように生成する。変数の定義位置はスタガード配置としている。有限体積法に基づき基礎方程式を離散化し、放物形流れに対するSIMPLEアルゴリズム<sup>41)</sup>を用いて収束解を得る。移流項の離散化にはべき乗スキームを用いる。

連立一次方程式の解法としては、圧力補正式に対してのみMSI法を使用し、その他の未知量に対しては線ガウス-ザイデル法を使用している。

計算においては、断面寸法、流量、河床勾配を与え、流れが十分発達すると考えられる距離（径深の400倍）まで上流から下流に向けて計算を進め、下流端の計算結果を実験結果との比較に使用する。実験結果がいずれも十分発達した流れ場についてのものであるからである。また、各断面での反復計算は、連続の式と平均流の運動量方程式の残差の絶対値の総和がそれぞれ主流方向の流量と全運動量の $1.0 \times 10^{-5}$ 倍未満になるまで繰り返されている。

#### 4. 3 計算結果と実験結果との比較

##### (1) 富永らの実験結果との比較

富永らは低水路幅8.7cm、高水敷幅10.8cm、高水敷高さ5.1cmの水路を用い、水深10.0cm、平均流速34.4cm、レイノルズ数 $5.1 \times 10^4$ の条件で実験を行い、流れ場の詳細な比較を行っている。この流れに対してLYモデルを適用する。使用した格子点数は幅方向に27点、水深方向に16点である。

図-13は主流速度の分布を比較したものである。図中の $U_{max}$ は最大流速値である。実験では、高水敷先端から低水路に向かい低流速の領域が広がり、高水敷上に流速の大きい領域が形成されている。それらの特徴は計算結果でも良好に再現されている。ただし、計算結果では最大流速がわずかに大きめに算出されており、等値線の値がややずれている。また、低水路と高水敷との境界部での等値線の湾曲の度合が小さめに、低水路中央の底面に向かっての張り出しが強めに算出されている。

2次流ベクトルの分布を図-14に示す。計算された2次流のパターンは実験結果の特徴を良く捉えている。計算結果と実験結果とを比較すると、計算結果の2次流の強さは、高水敷先端付近でやや小さく、低水路の対称軸上では大きくなっていく。これらが主流の等値線図の湾曲にみられた相違の原因である。なお、原型のLYモデルを用いると、2次流のパターンは再現するものの強さが過小評価され、主流速度分布の特徴を算出することはできない。

図-15は乱れエネルギーの分布を比較したものである。実験結果では壁面近傍のみならず高水敷先端付近にもエネルギーのレベルの高い領域が形成されている。解析結果はその特徴を良好に算出している。しかし、自由水面付近での乱れエネルギーを過小に計算している。自由水面において乱れ特性長さスケールが小さくなるという実験結果を表現するために、境界条件としてエネルギー散逸率の値を与えているが、その値が過大に評価されているために乱れエネルギーが小さく求められているものと考えられる。なお、高

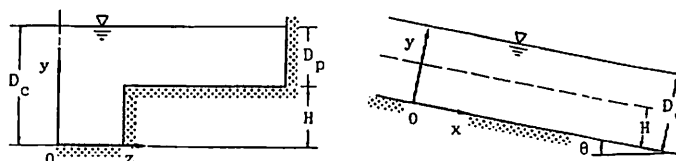


図-12 複断面開水路流れに対する座標系

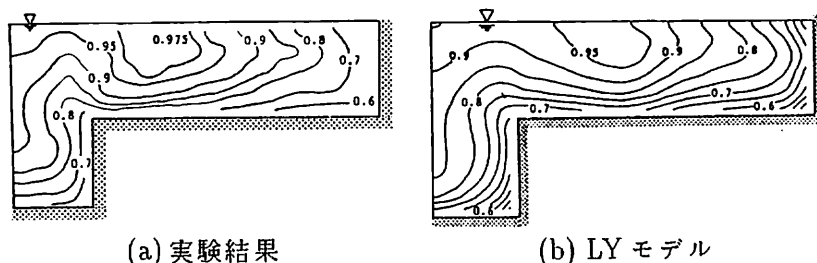


図-13 主流の流速分布;  $U/U_{max}$

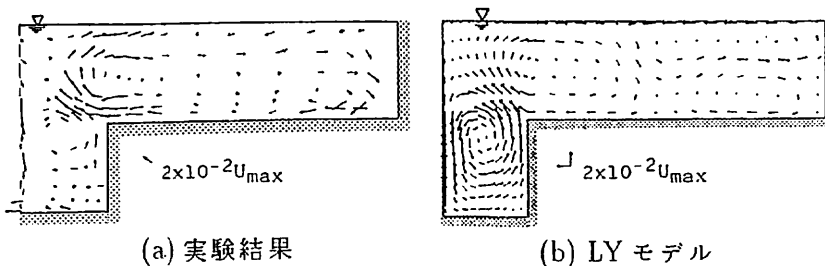


図-14 2次流ベクトル

水数先端部から低水路内に広がる乱れエネルギーの強い領域の形成機構を解析結果から考察することができる。ここでは示さないが、乱れエネルギーの輸送方程式の各項の比較より、壁面近傍の強い乱れエネルギーが2次流による移流されるためではなく、2次流が主流の流速分布を変化させ、それにより乱れエネルギーの生成率が大きくなっているためであることが知られる<sup>35)</sup>。

レイノルズ応力のうち、 $-\overline{uv}$ 成分を比較したものが図-16である。 $U_f$ は平均摩擦速度である。低水路側壁付近で負の領域が形成されていること、底面近傍以外に高水数先端から低水路に向かいレベルの高い領域が存在することを計算も実験も表している。この一致は2次流およびそれによる主流の速度分布の変形、乱れエネルギー分布の良好な再現によってしている。

図-17はレイノルズ応力 $-\overline{uw}$ を対

比したものである。計算結果は、高水数上の低水路側に異符号の領域が存在することや側壁近傍に絶対値の大きい領域が形成されることを示しており、実験結果をよく説明している。しかし、異符号領域中の強さや複雑な分布形状を再現してはいない。

以上の結果より、ここで使用したLYモデルは左右対称な複断面開水路における平均流速場や主流に抗するレイノルズ応力の算出に使用できると考えられる。しかし、次の実験結果との比較で明示するように、このモデルは2次流の生成機構である $\overline{v^2-w^2}$ や $-\overline{vw}$ の強さを過小評価する。これは、LYモデルが壁面近傍で乱れの異方性が強くなるという機構を含んでいないためである。レイノルズ応力の形成機構を正しく表していないために、このモデルは経験定数を横断面形状によって調整しなければならないことになっている。したがって、高い信頼性と汎用性をもつ3次元解析手法の開発のためには乱流モデルの改良が不可欠である。この目的のために、提案されたものがLarssonの代数応力モデル<sup>36)</sup>や河原-玉井の代数応力モデル<sup>38)</sup>である。河原-玉井のモデルは表現が簡単であり、非線形 $k-\varepsilon$ モデルと同様の特徴を有している。次に、このモデルを複断面管内流に適用した結果を述べる。なお、ここには示さないが、このモデルは正方形管内流における平均流速場を良好に算出することができる。

## (2) 中山らの実験結果との比較

中山らは十字形管路の十分に発達した空気流に対して、平均速度場とレイノルズ応力場を測定している。管路の断面諸元は低水路幅、高水数幅ともに1.8cmであり壁面は滑らかである。断面平均流速と径深の4倍を用いたレイノルズ数が $3.0 \times 10^4$ の条件下で流れ場の詳細な測定を行っている。計算に用いた格子点数は全断面で $22 \times 22$ である。

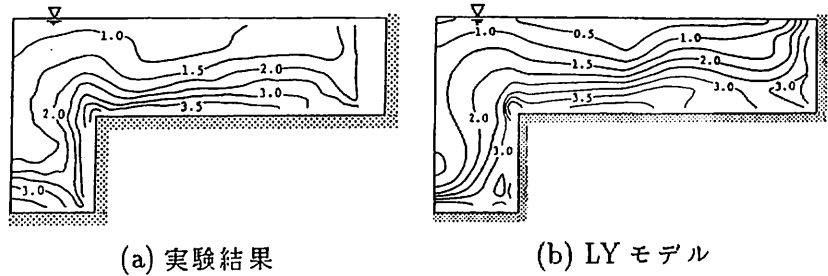


図-15 乱れエネルギー分布の比較;  $k/U_f^2$

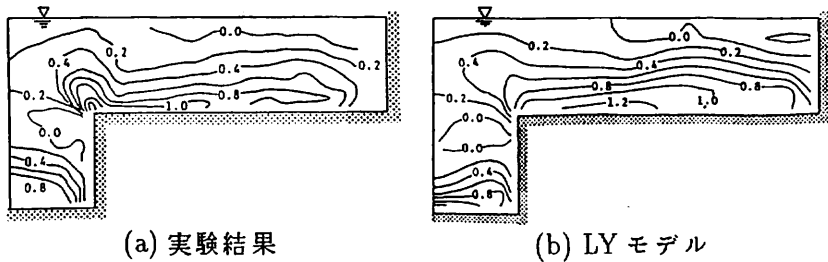


図-16 レイノルズ応力;  $-\overline{uv}/U_f^2$

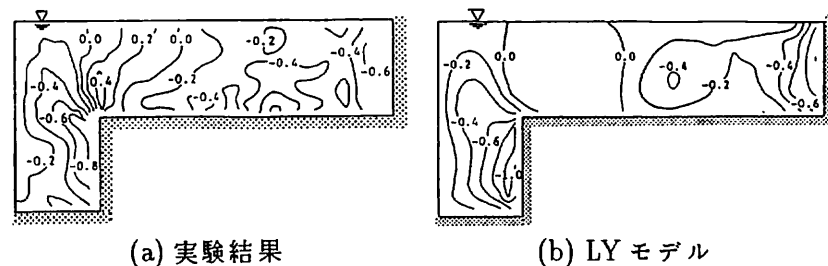


図-17 レイノルズ応力;  $-\overline{uw}/U_f^2$



図-18は十字管路の1/4断面における主流の等速度線図である。UBは断面平均流速である。図(a)は実験結果、図(b)KTモデルによる計算結果、図(c)は前述のモデル定数を再調整したLYモデルによる結果である。実験結果では等流速線が大きく湾曲し、高水敷先端から管路の中心に向けて低流速の領域が広がっている。これに対して、LYモデルやKTモデルを用いた計算結果では、等値線の値は実験結果と比べやや小さいが、等値線にみられる特徴を良好に算出している。LYモデルは、流速の大きな領域が低水路中央の底面付近まで延びている。これに対して、KTモデルによる等値線の湾曲の度合は実験結果に近くなっている。

2次流ベクトルを比較した結果が図-19である。実験結果では、高水敷先端付近の2次流が強く、低水路と高水敷とに1対の渦が形成されている。LYモデルもKTモデルも2次流のパターンを再現している。LYモデルは、低水路中央の底面に向かう下降流を大きく算出している。また、2次流のセルの中心が実験結果と比較して高水敷先端からやや離れている。KTモデルは低水路底面付近での2次流ベクトルの方向がやや実験結果とずれているが、LYモデルより良好な結果を与えている。

レイノルズ応力 $-\overline{uv}$ を図-20に示す。レイノルズ応力が底面近傍で大きな値をとるのは当然であるが、低水路と高水敷との境界部でも大きな値を示している。また、低水路側壁付近にはレイノルズ応力が負となる領域が存在している。これらの特徴をLYモデルもKTモデルも捉えている。KTモデルの方が2次流をより実験結果に近く算出するため、主流速度分布を良好に再現し、レイノルズ応力の分布をうまく計算している。

第2種2次流を維持するのに主要な働きをしているレイノルズ応力の垂直成分の差の分布を表したものが図-21である。図(a)の実験結果から、応力差の大きいところが壁面近傍と管路の中心に近い対称軸あたり

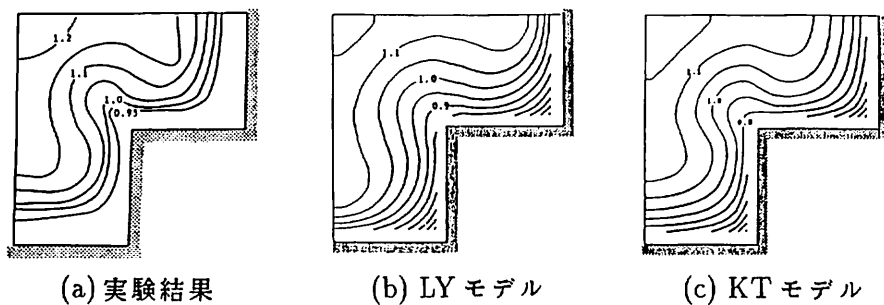


図-18 主流の流速分布;  $U/U_B$

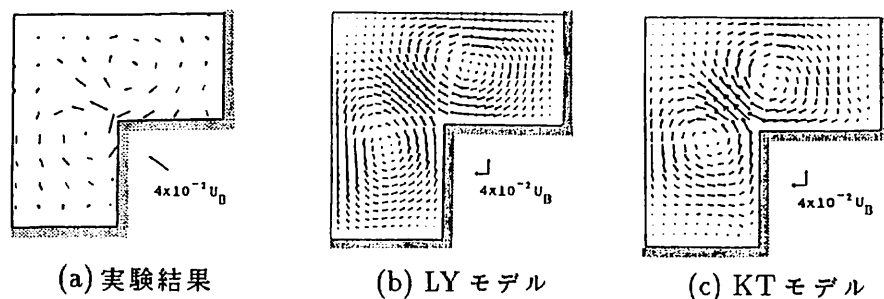


図-19 2次流ベクトル

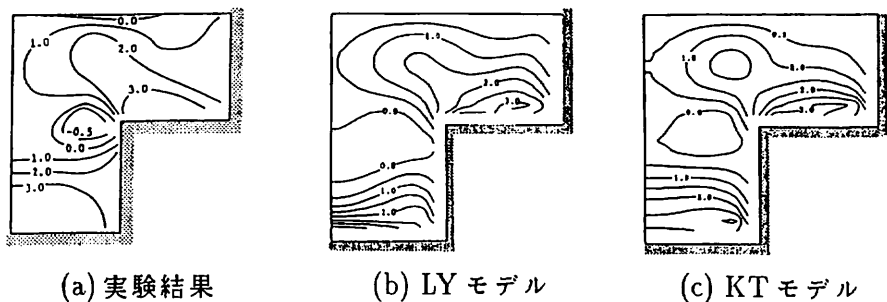


図-20 レイノルズ応力;  $(-\overline{uv}/U_B^2) \times 10^3$

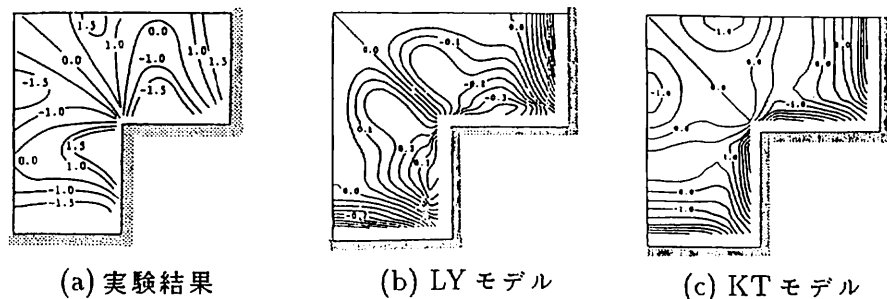


図-21 レイノルズ応力の異方性;  $[(\overline{v^2} - \overline{w^2})/U_B^2] \times 10^3$

にあること、反対に応力差なしの等値線が高水敷先端から管路の中心に向かう対称軸以外に低水路内や高水敷上にも存在することが知られる。L Yモデルによる計算結果では、垂直応力差は壁面近傍で大きな値を算出しているが、中心に近い対称軸あたりの差については再現できていない。このため、垂直応力の等しい線の形状も異なっている。また、計算結果は等値線の大きさについても実験結果の1/5から1桁程度過小に計算している。これは、L Yモデルの本質的な欠点でありレイノルズ応力の垂直成分が壁面近傍で減衰する効果を考慮していないためである。一方、K Tモデルでは、等値線の形状まで再現するには至っていないが、垂直応力の異方性を正しいオーダーで算出している。

#### 4. 4 まとめ

複断面直線開水路流れや管路流れには第2種2次流が存在する。その流れ場に対してモデル定数を修正したLaunder-Yingモデルは平均流速場をかなり良好に再現することができる。しかし、そのモデルはレイノルズ応力の形成機構を正確に表現する乱流モデルではなく、適用範囲が限られていると考えられる。数値解析手法の信頼性や汎用性を向上させるためには、乱流モデルを改良しなければならない。河原-玉井による代数応力モデルはそのようなモデルの1つであり、乱流モデルの横断面形状へ依存性を減らすことが可能となっている。しかし、そのモデルも検証が十分であるとは言えず、流れの発達過程やすべてのレイノルズ応力の分布、壁面剪断応力分布に関して詳細な検討を続けることが必要である。

#### 参考文献

- [1] Patankar, S.V.: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere, Washington, D.C., 1980.
- [2] 河原能久, 玉井信行: 非円形断面直線流路の2次流に対する乱流モデルについて, 土木学会論文集, 第399号, pp. 247-250, 1988.
- [3] 中山 顕, 児山 仁: 任意座標および速度系に基づく内部流れの一解析手法, 日本機械学会論文集, B編, 50巻, 460号, pp. 3091-3098, 1984.
- [4] Van Doormaal, J.P. and Raithby, G.D.: Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flow, Numer. Heat Transfer, Vol.7, 147-163, 1984.
- [5] Issa, R.I.: Solution of the implicit discretized fluid flow equations by operator splitting, Mechanical Eng. Rept. FS/82/15, Imperial College, London, 1982.
- [6] Brandt, A.: Multi-level adaptive solutions to boundary value problems, Math. Comp., Vol.31, pp. 333-390, 1977.
- [7] Leonard, B.P.: A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation, Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg., Vol. 19, pp.59-98, 1979.
- [8] Kawamura, T. and Kuwahara, K.: Computation of high Reynolds number flow around a circular cylinder with surface roughness, AIAA paper, No.84-0340, 1984.
- [9] Sweby, P.K.: High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, SIAM J. Numer. Anal., Vol.21, pp. 995-1011, 1984.
- [10] Gaskell, P.H. and Lau, A.K.C.: Curvature compensated convective transport: SMART, a new boundedness preserving transport algorithm, Int. J. Numer. Methods in Fluids, Vol. 8, pp. 617-641, 1988.
- [11] Leonard, B.P.: Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities, Int. J. Numer. Methods in Fluids, Vol. 8, pp. 1291-1318, 1988.
- [12] Schneider, G.E. and Zedan, M.: A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems, Numer. Heat Transfer, Vol. 4, pp.1-19, 1981.

- [13] 河原能久: 流体解析における連立一次方程式の解法の性能比較, 第4回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp. 447-450, 1990.
- [14] 河原能久, Rodi, W.: 2次元および3次元数値流体解析への前処理付き共役勾配法システムの解法の適用, 水工学論文集, 第35巻, pp. 671-674, 1991.
- [15] Ramamurthy, A.S., Carballada, L.B. and Tran, D.M.: Combining open channel flow at right angled junctions, J. Hydr. Engrg. ASCE, Vol.114, pp. 1449-1459, 1988.
- [16] Hager, W.H.: Transitional flow in channel junctions, J. Hydr. Engrg. ASCE, Vol.115, pp. 243-259, 1989.
- [17] 藤田一郎: 開水路合流部の流れの構造に関する研究, 学位論文, 1991.
- [18] Weerakoon, S.B. et al.: Flow measurement at a 60 deg. confluence, 土木学会第44回年次学術講演会, 第2部, pp. 192-193, 1990.
- [19] 水島敏治, 板倉忠興, 岸 力: 乱流モデルによる開水路合流部の流れの数値計算, 土木学会第38回年次学術講演会, 第2部, pp. 357-358, 1983.
- [20] 富所五郎, 荒木正夫, 阿尾吉章: 開水路合流部の流れの三次元数値解析, 土木学会第40回年次学術講演会, 第2部, pp. 217-218, 1985.
- [21] 玉井信行, 上田 悟: 乱流モデルによる河川合流部の流れの予測, 第31回水理講演会論文集, pp. 437-442, 1987.
- [22] Weerakoon, S.B. and Tamai, N.: Three-dimensional calculation of flow in confluences using boundary-fitted coordinates, J. Hydrosience and Hydraulic Engrg, Vol. 7, pp.51-62, 1989.
- [23] 多田博登: 河川合流部の流れに関する実験結果, 私信, 1987.
- [24] 今本博健, 久下俊夫: 複断面流れの水理特性に関する基礎的研究, 京都大学防災研究所年報, 第17号B, pp. 665-679, 1974.
- [25] 富永晃宏, 江崎一博, 小葉竹重機: 複断面開水路流の三次元乱流構造, 土木学会論文集, 第417号, pp. 129-138, 1990.
- [26] Reece, W.: A generalized Reynolds stress model of turbulence, Ph.D. Thesis, Imperial College, London, 1976.
- [27] Launder, B.E. and Ying, W.M.: Prediction of flow and heat transfer in ducts of square cross-section, Heat and Fluid Flow, Vol.3, pp. 455-461, 1973.
- [28] Nakayama, A., Chow, W.L. and Sharma, D.: Calculation of fully developed flows in ducts of arbitrary cross-section, J. Fluid Mech., Vol. 123, pp. 199-217, 1983.
- [29] Naot, D. and Rodi, W.: Calculation of secondary currents in channel flow, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol.108, pp. 948-968, 1982.
- [30] Demuren, A.O. and Rodi, W.: Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts, J. Fluid Mech., Vol.140, pp.189-222, 1984.
- [31] 西島勝一, 吉沢 徹: 非等方  $k-\epsilon$  モデルを用いた矩形管内乱流の数値解析, 生産研究, 36巻, pp. 46-49, 1986.
- [32] Spezial, C.G.: On nonlinear  $K-l$  and  $K-\epsilon$  models of turbulence, J. Fluid Mech., Vol.178, pp. 459-475, 1987.
- [33] 明 賢國, 小林敏雄: 正方形断面管内の発達する乱流の数値解析, 日本機械学会論文集, B編, 56巻, 532号, pp. 94-101, 1990.
- [34] Krishnappan, B.G. and Lau, Y.L.: Turbulence modeling of flood plain flows, J. Hydr. Engrg., ASCE, Vol.112, pp. 251-266, 1986.
- [35] 河原能久, 玉井信行: 複断面開水路乱流の三次元数値解析, 第31回水理講演会論文集, pp. 425-429, 1987.
- [36] Larsson, R.: Numerical simulation of flow in compound channels, Proc. 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, Japan, pp. 537-544, 1988.

- [13] 河原能久: 流体解析における連立一次方程式の解法の性能比較, 第4回数値流体力学シンポジウム講演論文集, pp. 447-450, 1990.
- [14] 河原能久, Rodi, W.: 2次元および3次元数値流体解析への前処理付き共役勾配法システムの解法の適用, 水工学論文集, 第35巻, pp. 671-674, 1991.
- [15] Ramamurthy, A.S., Carballada, L.B. and Tran, D.M.: Combining open channel flow at right angled junctions, J. Hydr. Engrg. ASCE, Vol.114, pp. 1449-1459, 1988.
- [16] Hager, W.H.: Transitional flow in channel junctions, J. Hydr. Engrg. ASCE, Vol.115, pp. 243-259, 1989.
- [17] 藤田一郎: 開水路合流部の流れの構造に関する研究, 学位論文, 1991.
- [18] Weerakoon, S.B. et al.: Flow measurement at a 60 deg. confluence, 土木学会第44回年次学術講演会, 第2部, pp. 192-193, 1990.
- [19] 水島敏治, 板倉忠興, 岸 力: 乱流モデルによる開水路合流部の流れの数値計算, 土木学会第38回年次学術講演会, 第2部, pp. 357-358, 1983.
- [20] 富所五郎, 荒木正夫, 阿尾吉章: 開水路合流部の流れの三次元数値解析, 土木学会第40回年次学術講演会, 第2部, pp. 217-218, 1985.
- [21] 玉井信行, 上田 悟: 乱流モデルによる河川合流部の流れの予測, 第31回水理講演会論文集, pp. 437-442, 1987.
- [22] Weerakoon, S.B. and Tamai, N.: Three-dimensional calculation of flow in confluences using boundary-fitted coordinates, J. Hydroscience and Hydraulic Engrg, Vol. 7, pp.51-62, 1989.
- [23] 多田博登: 河川合流部の流れに関する実験結果, 私信, 1987.
- [24] 今本博健, 久下俊夫: 複断面流れの水理特性に関する基礎的研究, 京都大学防災研究所年報, 第17号B, pp. 665-679, 1974.
- [25] 富永晃宏, 江崎一博, 小葉竹重機: 複断面開水路流の三次元乱流構造, 土木学会論文集, 第417号, pp. 129-138, 1990.
- [26] Reece, W.: A generalized Reynolds stress model of turbulence, Ph.D. Thesis, Imperial College, London, 1976.
- [27] Launder, B.E. and Ying, W.M.: Prediction of flow and heat transfer in ducts of square cross-section, Heat and Fluid Flow, Vol.3, pp. 455-461, 1973.
- [28] Nakayama, A., Chow, W.L. and Sharma, D.: Calculation of fully developed flows in ducts of arbitrary cross-section, J. Fluid Mech., Vol. 123, pp. 199-217, 1983.
- [29] Naot, D. and Rodi, W.: Calculation of secondary currents in channel flow, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol.108, pp. 948-968, 1982.
- [30] Demuren, A.O. and Rodi, W.: Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts, J. Fluid Mech., Vol.140, pp.189-222, 1984.
- [31] 西島勝一, 吉沢 徴: 非等方  $k-\epsilon$  モデルを用いた矩形管内乱流の数値解析, 生産研究, 36巻, pp. 46-49, 1986.
- [32] Spezial, C.G.: On nonlinear K-1 and K- $\epsilon$  models of turbulence, J. Fluid Mech., Vol.178, pp. 459-475, 1987.
- [33] 明 賢國, 小林敏雄: 正方形断面管内の発達する乱流の数値解析, 日本機械学会論文集, B編, 56巻, 532号, pp. 94-101, 1990.
- [34] Krishnappan, B.G. and Lau, Y.L.: Turbulence modeling of flood plain flows, J. Hydr. Engrg., ASCE, Vol.112, pp. 251-266, 1986.
- [35] 河原能久, 玉井信行: 複断面開水路乱流の三次元数値解析, 第31回水理講演会論文集, pp. 425-429, 1987.
- [36] Larsson, R.: Numerical simulation of flow in compound channels, Proc. 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, Japan, pp. 537-544, 1988.

- [37] Kawahara, Y. and Tamai, N.: Numerical calculation of turbulent flows in compound channels with an algebraic stress turbulence model, Proc. 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, Japan, pp. 9-16, 1988.
- [38] 河原能久, 玉井信行: 新しい代数的応力モデル提案とその複断面流路の流れへの適用, 第33回水理講演会論文集, pp. 289-294, 1989.
- [39] 富永晃宏, 江崎一博, 中村悦由: 複断面開水路流の三次元乱流構造, 土木学会第42回年次学術講演会, 第2部, pp. 372-373, 1987.
- [40] 中山 顕, 児山 仁, 渡辺 貴彦: 十字形管路内の流れおよび熱伝達, 日本機械学会論文集, B編, 53巻, 489号, pp. 573-579, 1987.
- [41] Patankar, S.V. and Spalding, D.B.: A calculation method for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.15, pp. 1787-1806, 1972.