

水工学シリーズ92-A-1

代数応力モデルによる開水路乱流場の解析

東京大学工学部 助教授

河 原 能 久

〒113 東京都文京区本郷7-3-1
東京大学工学部土木工学科
(03-3812-2111)

土木学会水理委員会

1992年8月

代数応力モデルによる開水路乱流場の解析

Numerical Analysis of Turbulent Open Channel Flows
with Algebraic Stress Turbulence Models

河原能久
Yoshihisa KAWAHARA

1. 乱流モデルの位置づけ

開水路乱流はナビエ-ストークス方程式によって正確に記述されると考えられている。したがって、乱流場の全ての情報はナビエ-ストークス方程式を数値積分すれば得られることになる。開水路流れの例は極めて少ないが、種々の流れ場に対してナビエ-ストークス方程式の直接数値シミュレーション (DNS: Direct Numerical Simulation) が現在精力的に進められており、その結果のデータベースをもとに流れの大規模な構造や実験では計測できない各種の乱流統計量について興味深い知見が蓄積されつつある。このような研究はスーパーコンピュータの出現と数値解析法の発展によりはじめて可能になったものである。しかし、乱流運動のスペクトルは広い波数帯の範囲にわたり、その範囲はレイノルズ数の増加とともに広がる。しかも、乱流は本質的に三次元非定常現象である。したがって、河川の洪水流のようなレイノルズ数の大きな乱流を対象とし、空間的にも時間的にも十分な分解能を保ちながら計算することは、記憶容量や計算時間の上からみて未だ不可能に近い。また、開水路流れでは自由水面が移動境界であり、計算時間をさらに膨大なものにする。

乱流の直接数値シミュレーションが不可能に近いことの原因は、注目するスケールとそれに比べて極端に小さいエネルギー散逸スケールを同時に考慮することにある。しかし、乱流現象におけるエネルギー散逸機構の物理的な重要性和乱流を比較的大きなスケールから見た時の散逸スケールの運動の情報としての重要性とは異なる。例えば、レイノルズ数を 10^6 とした場合、着目するスケールの 10^{-5} 程度の小さいスケールの運動の詳細を知りたいことはまずないであろう。すなわち、比較的大きなスケールに注目する場合、散逸運動の詳細は必要ではなくエネルギー散逸率自体を精度よく近似する方法が見い出されればよいと考えられる。現在行われている乱流の数値解析では、アンサンブル平均を用いる乱流モデルにせよ、空間平均を用いる LES (Large Eddy Simulation) にせよ、エネルギー散逸機構に対するモデルが組み込まれており、これなくしては乱流の数値解析はありえない。LES の有用性は確立されているが、多大な計算時間と記憶容量、初期条件や境界条件の設定などの問題があり、現実の流れ場への適用にはいましばらくの時間が必要である。アンサンブル平均を使用する乱流モデル (単に乱流モデルとよぶこととする) の実用性が現状では最も高いとすることができる。

さまざまなレベルの乱流解析手法が開発されている (表-1)。多方面での研究現況については保原-大宮司¹⁾が参考になる。水工学における乱流モデルの解説については、例えば Rodi^{2),3)}、和田⁴⁾などがあげられる。本講で主として取り扱う乱流モデルは表-1 中の代数応力モデル (ASM: Algebraic Stress Model) である。それは時間平均された統計量の輸送方程式を用いるモデルに属するものであり、レイノルズ応力を 1 地点における 2 次の速度積までの統計量で閉じて表現するモデルである。乱流モデルの中では応力方程式モデル (RSM: Reynolds Stress Equation Model, または DSM: Differential Stress Model) が最も進んだモデルである。この乱流モデルでは乱流場の生成機構を厳密に取り扱うことが可能であるために、その高い汎用性を期待することができる。精密な実験結果や LES, DNS のデータベースを基に、応力方程式モデルの低レイノルズ数の流れへの拡張や熱や物質輸送に対する改良が盛んに進められている。それに対して、代数応力モデルは既存の $k-\epsilon$ モデルを用いた解析コードへの組込みが容易であり、計算時間や記憶容量の大幅な増加なしに解析結果の信頼性を向上させることができるという利点に着目され使用されている。これまで乱流モデルの開発はコンピュータの性能の向上と密接な関係にあったが、この傾向はいましばらくは変わらないものと思われる。コンピュータ技

力加速度および基準線からの高さであり、 ∇ はラプラシアンを表す。なお、上式では添字に関して総和規約を適用するものとする。

いま、レイノルズ平均を時間平均で定義することとし、瞬間値を次のように平均成分(大文字で表す)と変動成分(小文字で示す)とに分解する。

$$\bar{u}_i = U_i + u_i, \quad \bar{p} = P + p \quad (3)$$

この分解を式(1), (2)に代入し平均操作を施すと平均流に対する連続の式とレイノルズ方程式が得られる。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial U_i U_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{P}{\rho} + gz_* \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\overline{u_i u_j} + \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (5)$$

上式に現れるレイノルズ応力 $\overline{u_i u_j}$ をいかに他の統計量で記述するかが乱流モデルの要点であるが、そのレイノルズ応力に対する厳密な輸送方程式は変動速度成分に対する輸送方程式より次のように求められる。

$$\underbrace{U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}}_{C_{ij}} = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_i u_j u_k} + \frac{\bar{p}}{\rho} (u_i \delta_{jk} + u_j \delta_{ik}) \right)}_{D_{ij}} - \underbrace{\nu \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}}_{P_{ij}} - \underbrace{\left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)}_{\phi_{ij}} + \underbrace{\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{-2\nu \frac{\partial \overline{u_i} \partial \overline{u_j}}{\partial x_k \partial x_k}} - \underbrace{\varepsilon_{ij}}_{\varepsilon_{ij}} \quad (6)$$

ここで、左辺は移流項であり、右辺の第1項は拡散項、第2項は生成項、第3項は圧力と歪速度との相関であり乱れのエネルギーの再配分に関与する項、最後の項は散逸項である。なお、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

2.2 応力方程式モデル

レイノルズ応力の輸送方程式(6)をモデル化する。 $k-\varepsilon$ モデルでは乱れの長さスケールと時間スケールが方向によらず同一であり、それらが乱れエネルギー k とその散逸率 ε により決定されると仮定している。しかし、応力方程式モデルや代数応力モデルでは特性スケールはレイノルズ応力ごとに異なると考え、式(6)の各項を個別にモデル化する。レイノルズ応力自体が未知量であるために移流項 C_{ij} 、生成項 P_{ij} のモデル化は不要である。以下では残りの項のモデル化を要約する。ここでは Launder-Reece-Rodi モデル⁶⁾に沿って説明する。

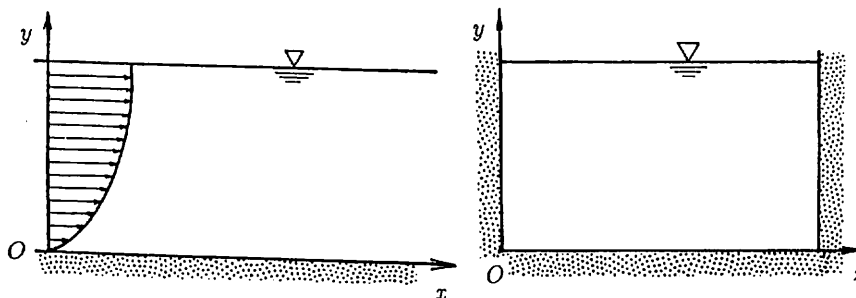


図-1 座標系

1) 拡散項 D_{ij}

よく使用される拡散項のモデルには2通りがある。1つは Hanjalic-Launder によるモデルであり、次のように表現される。

$$D_{ij} = c_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u_i u_l} \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_j u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_l} + \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) \right] \quad (7)$$

もう1つは Daly-Harlow によるモデルであり、その簡単な式形のためにしばしば利用されている。

$$D_{ij} = c'_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) \quad (8)$$

なお c_s, c'_s は定数である。

2) 散逸項 ε_{ij}

レイノルズ数の大きな流れでは小さなスケールの渦運動は局所等方的であると考えられる。レイノルズ応力方程式中の散逸項はエネルギー散逸率 ε を用いて次のようにモデル化される。

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon, \quad \varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad (9)$$

3) 圧力-歪速度相関項 ϕ_{ij}

この項はレイノルズ応力のモデル化において最も重要かつ表現の困難なものである。変動圧力に対するポアソン方程式から知られるように、変動圧力には流れ場全体が寄与する。流れ場全体の平均速度勾配が各点での局所的な変動圧力の一部を作りだしている。この項は変動速度成分間の相互作用 ϕ_{ij}^1 , 変動速度成分と平均速度勾配との相互作用 ϕ_{ij}^2 , 固体壁の効果 ϕ_{ij}^w および自由水面の効果 ϕ_{ij}^s の4つの部分に分けてモデル化される。ただし、 ϕ_{ii} (添字 i について総和をとる) はゼロであり乱れエネルギーのレベルを変化させないため、この項は再配分項ともよばれる。

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^1 + \phi_{ij}^2 + \phi_{ij}^w + \phi_{ij}^s \quad (10)$$

ϕ_{ij}^1 は Rotta 項または slow 項とよばれ、レイノルズ応力の非等方性を緩和する作用を示す項として以下のように表される。

$$\phi_{ij}^1 = -c_1 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) \quad (11)$$

非等方テンソル b_{ij} を導入すると、上式は次のように書かれる。

$$\phi_{ij}^1 = -2c_1 \varepsilon b_{ij}, \quad b_{ij} = (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) / 2k \quad (12)$$

ϕ_{ij}^2 は rapid 項とよばれるが、平均流の速度勾配の線形結合で近似される。

$$\phi_{ij}^2 = -\frac{c_2 + 8}{11} (P'_{ij} - \frac{2}{3} P_{rod} \delta_{ij}) + \frac{30c_2 - 2}{55} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) k - \frac{8c_2 - 2}{11} (D'_{ij} - \frac{2}{3} P_{rod} \delta_{ij}) \quad (13)$$

$$P'_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \quad P_{rod} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}, \quad D'_{ij} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \quad (14)$$

ただし、 c_2 はモデル定数である。この ϕ_{ij}^2 に対するモデルは QI モデル (Quasi-Isotropic Model) とよばれる。一方、Gibson-Launder モデル⁷⁾では ϕ_{ij}^2 を式(13)の右辺第1項のみで表現するが、そのようなモデルを IP モデル (Isotropization of Production Model) とよび区別している。直線管内乱流の解析によれば、QI モデルの方が IP モデルより良い再現結果を与えると報告されている^{8),9)}。なお、QI モデル、IP モデルも Naot らの研究^{10),11)}に端を発する。

壁面近傍では壁面に向かう方向の運動が抑制され壁面に平行な運動が加速される。これにより、垂直応力の非等方性が強められる。この壁面の効果 ϕ_{ij}^w は次のようにモデル化される。ただし、現象論的に構築されたものであり明確な物理的根拠があるわけではない。

$$\phi_{ij}^w = \left\{ c_1' \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) + c_2' (P_{ij}' - D_{ij}') + \zeta' \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) k \right\} f_w \left(\frac{l}{d} \right) \quad (15)$$

ここで l , d は乱れの特徴長さスケールおよび壁面からの距離である。関数 $f_w(l/d)$ は流れの対数則領域では値 1 をとり、壁面から離れるにしたがって減少する関数である。

$$f_w \left(\frac{l}{d} \right) = \frac{c_\mu^{3/4} k^{3/2} l}{\kappa \varepsilon d} \quad (16)$$

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{s} \quad (17)$$

なお κ はカルマン定数である。 d の定義から推察されるように (図-2 参照), その関数は凸形の横断面形状には適用できるが凹形の領域にそのまま使用することはできない。

自由水面の効果は壁面のそれと類似な点もあるが、水面上で主流方向の速度がゼロではなく速度勾配が小さいことなど異なっている。自由水面のモデル化については次節にてあらためて述べる。

以上の結果を整理すると、応力方程式モデルとして次式が得られる。拡散項には Daly-Harlow の表現を用いている。

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = & c_1' \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) - c_1 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}) \\ & - \alpha (P_{ij}' - \frac{2}{3} P_{rod} \delta_{ij}) - \beta (D_{ij}' - \frac{2}{3} P_{rod} \delta_{ij}) - \gamma \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) k + \phi_{ij}^s \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、 α , β , γ はモデル係数であり、 c_1 , α , β には関数 f_w が含まれている。

なお、Launder-Reece-Rodi モデル以外にも多くの応力方程式モデルが提案されている。例えば、Gibson-Launder モデル⁷⁾, Mellor-Yamada モデル¹²⁾, 島による低レイノルズ数モデル¹³⁾ など種々のものがある。

式 (18) において $i = j$ とおき縮約をとると、乱れエネルギー k に対するモデルが得られる。

$$\frac{Dk}{Dt} = c_1' \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial k}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\nu \frac{\partial k}{\partial x_k}) + P_{rod} - \varepsilon \quad (19)$$

あるいは、拡散項を等方的な渦動粘性係数 ν_t を用いて表現すると、

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + P_{rod} - \varepsilon \quad (20)$$

となる。ただし、渦動粘性係数 ν_t および乱れエネルギーの生成率 P_{rod} は次のように表される。

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad P_{rod} = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (21)$$

また、乱れエネルギー散逸率 ε に対するモデル化した方程式は次のようである。

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = c_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\nu \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}) + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon_1} P_{rod} - c_{\varepsilon_2} \varepsilon) \quad (22)$$

あるいは、以下のように書かれる。

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon_1} P_{rod} - c_{\varepsilon_2} \varepsilon) \quad (23)$$

式 (20), (21), (23) 中の定数の値は次のようである。

$$c_\mu = 0.09, \quad c_{\varepsilon_1} = 1.44, \quad c_{\varepsilon_2} = 1.92, \quad \sigma_k = 1.4, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad (24)$$

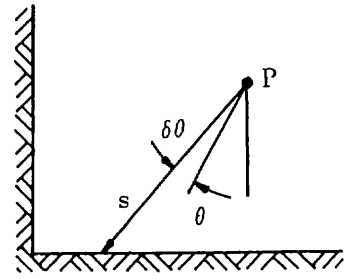


図-2 壁面からの距離の定義

2.3 代数応力モデル

応力方程式モデルでは6本の方程式とエネルギー散逸率の方程式からなる7本の連立偏微分方程式を連続式と運動量式に追加して解くことが必要である。Rodi¹⁴⁾は適用範囲を制限するが計算時間や記憶容量を節約するために応力方程式モデルの簡略化を行った。代数応力モデルを導く方法にはLaunderによるもの¹⁵⁾もあるが、Rodiの方法が通常用いられている。以下にその方法を概説する。

式(18)の移流項と拡散項 D_{ij} を次のように変形する。ただし、分子拡散項を無視する。

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \frac{Dk}{Dt} + k \frac{D\overline{u_i u_j}/k}{Dt} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} D_{ij} &= c'_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(k \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \right) \right] \\ &= \frac{\overline{u_i u_j}}{k} D_{\text{iff}} + c'_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{k^2}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}/k}{\partial x_k} \right) + c'_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial k}{\partial x_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}/k}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (26)$$

ただし D_{iff} は乱れエネルギーのモデル式(19)中の拡散項を表す。いま $\overline{u_i u_j}/k$ の勾配が小さいものと仮定し、それを無視することとする。式(25)、式(26)の辺々を引くと、

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} - D_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \left(\frac{Dk}{Dt} - D_{\text{iff}} \right) = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P_{\text{rod}} - \varepsilon) \quad (27)$$

となる。上式よりレイノルズ応力に関する偏微分が消え、レイノルズ応力に関する6本の代数方程式が得られることになる。また、この操作によりレイノルズ応力間の空間依存性が薄れ局所性が強まることになる。代数応力モデルを使用する際に追加される偏微分方程式は乱れエネルギーとその散逸率の方程式の2本である。

応力方程式中の移流項と拡散項を省略したり、乱れの局所平衡を仮定することにより、一層の簡略化を進めた代数応力モデルも多数提案されている。以下ではLaunder-Yingモデル¹⁶⁾と河原-玉井のモデル^{17),18)}、Naot-Rodiモデル¹⁹⁾を取り上げるが、いずれの応力代数モデルもその簡略化を行って導出されたモデルである。なお、自由水面の効果を取り入れたNaot-Rodiモデル¹⁹⁾の説明は次節で行う。

1) Launder-Yingモデル¹⁶⁾

このモデルはHanjalic-Launderによる応力方程式モデルをもとにし、3次元解析のために提案された最初の代数応力モデルである。モデル定数が少なく、構造が明解であるために他の研究者により改良され、種々の横断面形状の管内乱流へ適用されてきた。ただし、壁面近傍の乱れの異方性を表現できないというHanjalic-Launderモデルの欠点を受け継いでいる。このモデルではレイノルズ応力を次のように表現する。

$$-\overline{u^2} = 2\nu_t \frac{\partial U}{\partial x} - c_{k_0}' k, \quad (28)$$

$$-\overline{v^2} = c' \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - c_k' k, \quad (29)$$

$$-\overline{w^2} = c' \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - c_k' k, \quad (30)$$

$$-\overline{uv} = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad (31)$$

$$-\overline{uw} = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad (32)$$

$$-\overline{vw} = c' \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (33)$$

$$c'_{k_0} = 0.915, \quad c_k' = 0.552, \quad c' = 0.0185 \quad (34)$$

2) 河原-玉井モデル^{17),18)}

これは Hanjalic-Launder モデルより合理的な Launder-Reece-Rodi モデルをもとに、壁面効果を表現する関数 f_w の改良を試み、より複雑な横断面形状の流れ場を解析できるように拡張したモデルである。また、 $k-\varepsilon$ モデルに非線形項を追加した表現になっている。

$$-\overline{u^2} = -\frac{2}{3}k + 2\nu_t \frac{\partial U}{\partial x} - c_1 \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (35)$$

$$-\overline{v^2} = -\frac{2}{3}k + 2\nu_t \frac{\partial V}{\partial y} + \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[c_2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + c_3 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (36)$$

$$-\overline{w^2} = -\frac{2}{3}k + 2\nu_t \frac{\partial W}{\partial z} + \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[c_3 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (37)$$

$$-\overline{uv} = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), \quad (38)$$

$$-\overline{vw} = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad (39)$$

$$-\overline{vw} = \nu_t \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + c_4 \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (40)$$

$$c_1 = \frac{2}{3c_\psi} (2(1-\alpha) + \beta), \quad c_2 = \frac{2}{3c_\psi} (1-\alpha + 2\beta), \quad c_3 = \frac{2}{3c_\psi} (1-\alpha - \beta), \quad c_4 = \frac{2\beta}{c_\psi} \quad (41)$$

$$\alpha = 0.7638 - 0.06f_w, \quad \beta = 0.1091 + 0.06f_w, \quad \gamma = 0.185, \quad c_\psi = 1.5 - 0.5f_w \quad (42)$$

$$f_w = \left| \text{grad} \left(\frac{c_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa \varepsilon} \right) \right|^2 \quad (43)$$

このモデルは第2種2次流の生成に重要な役割を果たす垂直応力の異方性を以下のように2次流の勾配と主流の等流速線の湾曲により説明するものである。

$$\overline{v^2} - \overline{w^2} = 2\nu_t \left(\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) - c_4 \nu_t \frac{k}{\varepsilon} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (44)$$

最近、上記の代数応力モデルと類似の乱流モデルが異なる観点から提案されている。すなわち、非線形 $k-\varepsilon$ モデル^{20),21)} または非等方 $k-\varepsilon$ モデル²²⁾ とよばれるモデルである。それらはレイノルズ応力の表現に物理的な合理性を与えることに成功している。しかし、モデル定数の最適化や適用性に関する検証が必要である。一方、代数応力モデルは式中の項の由来を追うことにより形成機構を考察することが可能であり、改良を施しやすいという長所をもつ。反面、テンソル量としての物理性を確保することはむずかしい。

3. 乱流モデルにおける自由水面の影響のモデル化

3.1 自由水面の乱流場に及ぼす影響

開水路流れの特徴が自由水面の存在であることは明かであるが、水面が乱流場に及ぼす影響については十分な検討がなされていない。自由水面近傍でのレイノルズ応力の分布やそれに与える水面変動の効果などに関して信頼できる測定結果の蓄積が要請されている。

水面の存在が乱流場に与える影響として以下のような点が指摘できよう。

- (1) 水面に垂直方向の変動速度成分が抑えられ、水面に平行な速度成分が強められる。
- (2) 水面近傍の乱れの長さスケールが小さくなる。
- (3) 乱れエネルギーの散逸率 ε が水面付近で増加する。
- (4) 乱れエネルギー k が水面付近で減少する。
- (5) 渦動粘性係数が水面近傍で小さくなる。

これらは自由水面付近での乱流場に及ぼす水面の影響であるが、その影響が横断面全体の平均流速場にまで及ぶことがある。典型的な例が第2種2次流をともなう流れである。図-3は同じアスペクト比(=水路幅/水深)を有する開水路流れと管路流れにおいて測定された主流速度と2次流の分布を比較したものである²³⁾。自由水面付近の2次流が管路流れに比べて発達し、側壁付近の主流の速度分布が大きく変化していることがわかる。また、アスペクト比の小さい条件下で主流速度の最大値が水面下に生ずる事実も同様な例である。

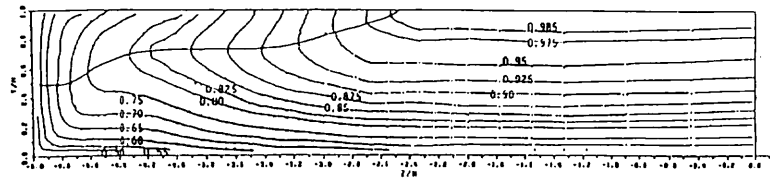
3.2 自由水面の影響のモデル化

乱流量の水面近傍での挙動を考え、流れを等流状態と仮定し、水面を時間的に変動しない平坦な滑面として取り扱うこととする。また、座標系の原点を水面に移し鉛直上向きの座標軸 y を η と表し、乱流統計量を η の多項式として表現することを考える。

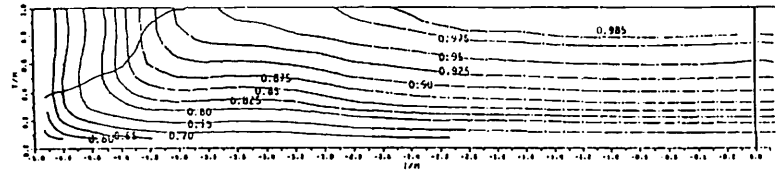
変動速度成分 v は水面にて値がゼロであるから速度 v は η に関して1次以上の関数となる。それに対し、変動速度成分 u, w は水面でスリップ速度を有するために η に関しては0次からはじまる関数となる。したがっ

て、レイノルズ応力 $\overline{u^2}, \overline{w^2}, \overline{uv}$ は η に関して0次以上、 $\overline{uv}, \overline{vw}$ は1次以上、 $\overline{v^2}$ は2次以上となる。また、乱れエネルギー k は0次以上、散逸率 ϵ は0次以上、渦動粘性係数 ν_t は1次以上となることがわかる。なお、レイノルズ応力 $\overline{v^2}$ は水面の位置の変化に敏感であると推察できる。このような乱流量の水面近傍での漸近挙動の知見は今後のモデルの改良や開発に有益であると考えられる。しかし、平坦で不動という水面の仮定を緩めた検討が必要である。

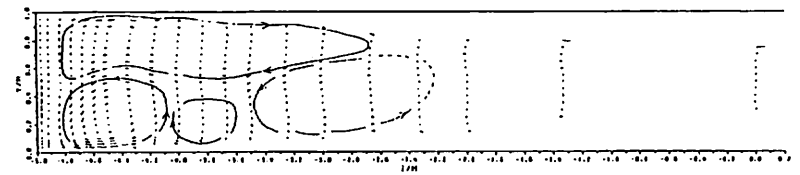
前述のような自由水面の影響を乱流モデルに取り込んだ研究は数少ない。水面に垂直方向の垂直応力が水面近傍で減少し残りの垂直応力が増加することを最初にモデル化したのは Reece²⁴⁾ である。彼は応力方程式モデルを用いて最大流速が水面下に現れることを再現した。Gibson-Rodi²⁵⁾ は応力方程式モデル中の圧力-歪速度相関項に水面効果を導入し水面近傍での乱れの異方性を算出している。また、散逸率 ϵ の方程式中に乱れ成分間の相互作用による生成項を追加することにより水面近傍での散逸率の増加をモデル化している。これに対して、代数応力モデルでも水面付近での乱れの異方性や長さスケールの減少を再現できることを明示したのが Naot-Rodi¹⁹⁾ である。このモデルは経験的な関係式を使用するが、水理条件の異なる実験結果との対比の結果も良好である。応力方程式モデルは代数応力モデルとほぼ同様なモデル化上の問題をかかえている。このモデルは開水路流れに対する応力方程式モデルの改良にも参考になると考えられる。以下にその概要を述べる。



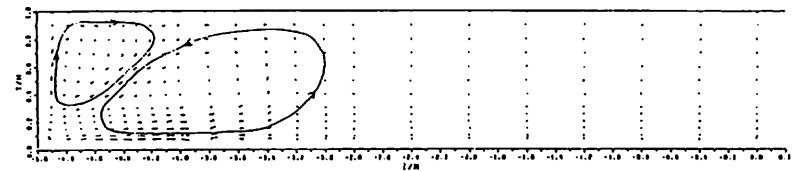
(a) 開水路での主流速度 ; U/U_{max}



(b) 管路での主流速度 ; U/U_{max}



(c) 開水路での2次流



(d) 管路での2次流

図-3 開水路流れと管路流れとの相違 ($B/H=10$ の実験結果)

1) Naot-Rodi モデル¹⁹⁾

Naot-Rodi は式(18)中の移流項と拡散項を無視し、水面効果を Shir のモデル²⁶⁾で表現した。水面の効果を Launder-Reece-Rodi モデル中の壁面効果の評価と同様に表現すると、自由水面付近では主流の速度勾配が小さいために、水面の影響は実質的には係数 c_1 を通して現れることになる。彼らはこの係数を変化させても水面付近での乱れの異方性が十分には強化されないことを確認し、壁面効果とは異なる表現を採用した。すなわち、圧力-歪速度相関項に次式で示される水面効果の項を導入した。

$$\phi_{ij}^s = c_3 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_n^2} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_n u_i} \delta_{nj} - \frac{3}{2} \overline{u_n u_j} \delta_{ni}) f_s \quad (45)$$

ここで、 c_3 は係数でありその値は 0.1 である。壁面効果に対する関数 f_w 、水面効果の関数 f_s は無次元化された乱れの長さスケール l の関数として以下のように表されている。

$$f_w = l^2 \left\langle \frac{1}{d^2} \right\rangle \quad (46)$$

$$f_s = \left[\frac{l}{\left\langle \frac{1}{d^2} \right\rangle^{-1/2} + c_f l} \right]^2 \quad (47)$$

$$\left\langle \frac{1}{d^2} \right\rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{s^2} \quad (48)$$

壁面からの距離の算出式(48)は式(17)と異なり、関数 f_w の影響範囲を壁面付近に限定するように改良されている。また、水面では乱れの長さスケールは有限であり関数 f_s が実験値と一致するようにモデル化されている。なお、係数 c_f の値は 0.016 である。

式(45)を式(18)に代入し、レイノルズ応力成分を求めると次のようになる。ただし、渦動粘性係数 ν_t を含む項は 2 次流の速度勾配の影響を考慮する目的で導入されたものであり、式の変形から厳密に導出されたものではない。

$$-\overline{v^2} = 2\nu_t \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{k}{c_1 + 2c_3 f_s} \left[\frac{2}{3} \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta + c_1 - 1 \right) + \frac{\beta}{\varepsilon} \left(\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] \quad (49)$$

$$-\overline{w^2} = 2\nu_t \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{k}{c_1} \left[\frac{2}{3} \left(\alpha - \frac{1}{2} \beta + c_1 - 1 \right) + c_3 f_s \frac{\overline{v^2}}{k} + \frac{\beta}{\varepsilon} \left(\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] \quad (50)$$

$$-\overline{uv} = \nu_{ty} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (51)$$

$$-\overline{uw} = \nu_{tz} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (52)$$

$$-\overline{vw} = \nu_t \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \frac{\beta}{c_1 + \frac{3}{2} c_3 f_s} \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (53)$$

$$\nu_{ty} = \frac{c_1}{c_1 + \frac{3}{2} c_3 f_s} \frac{c_1}{c_1 + 2c_3 f_s} \nu_t \quad (54)$$

$$\nu_{tz} = \frac{c_1 + \frac{5}{2} c_3 f_s}{c_1 + 2c_3 f_s} \nu_t \quad (55)$$

なお、上式中の係数 c_1 , α , β は式(41), (42)中のものと同一である。

このモデルでは水面近傍での長さスケールの減少を表現するために、Hossain-Rodi²⁷⁾に倣い水面でのエネルギー散逸率を指定する。

$$\varepsilon_s = \frac{c_\mu^{3/4} k_s^{3/2}}{\kappa y'}, \quad y' = 0.07 H \quad (56)$$

ここで、下付きの添字 s は水面での値を、 H はその地点での水深を表す。この関係式は実験結果を基に導かれたものであり、その式の信頼性や適用性は必ずしも明かでない。Yacoub ら²⁸⁾は $k-\varepsilon$ モデルの気液界面での境界条件の与え方として上式の拡張を行っている。

水面では乱れエネルギーの拡散と散逸とがバランスすると考えられる。しかし、このモデルでは乱れエネルギーに対する水面の境界条件として対称条件を適用する。なお、水面での乱れエネルギーを指定する方法も報告されている²⁹⁾。

当然のことながら、境界条件は乱流モデルに許容される合理的なものでなければならない。正しい境界条件を設定することは乱流モデル自体と同程度に重要である。自由水面の取り扱いではこの境界条件が提案されるモデルごとに異なっている。壁面での境界条件としてはほとんどのモデルが壁関数を使用する。しかし、壁関数の使用は第2種2次流の解析で重要な壁面近傍での流れ場を仮定することになる。経験的な壁関数を使用しない非等方 $k-\epsilon$ モデル²²⁾はその意味で興味深い。

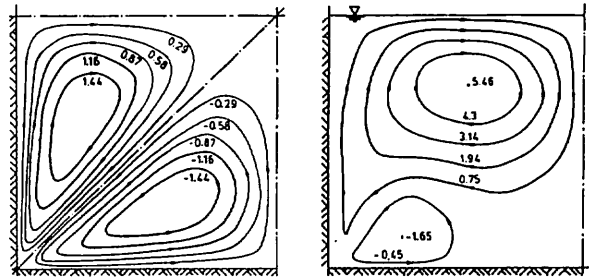
4. 開水路流れへの適用例

前述の乱流モデルを用いて行った直線開水路における十分発達した乱流場の3次元解析例を示す。数値解析法については説明を省略するが、基礎方程式は連続式、レイノルズ方程式、乱れエネルギーの輸送方程式、エネルギー散逸率の輸送方程式の合計6本の偏微分方程式とレイノルズ応力を算出する5本の代数式(主流方向の垂直応力は無視される)である。

4.1 長方形断面開水路流れ

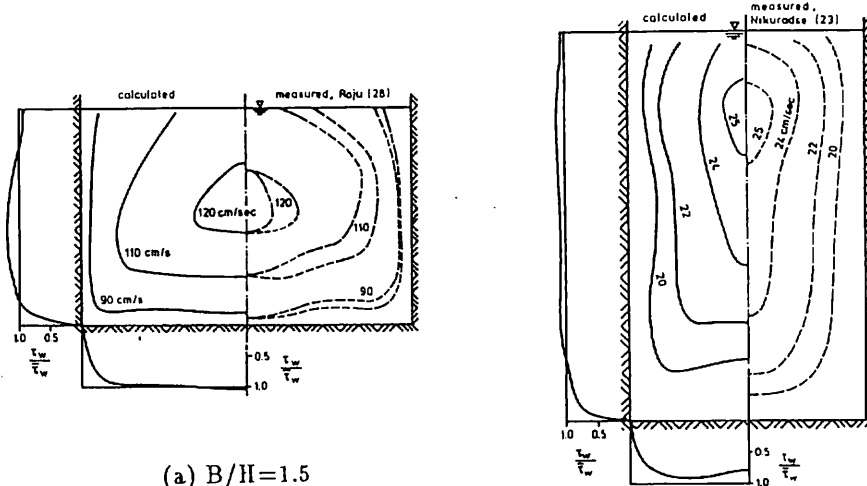
さまざまなアスペクト比を有する長方形断面の開水路流れに対して Naot-Rodi モデルが適用されている。ただし、報告されている計算結果は主流、2次流に限られている。

図-4 は2次流について管路流れと開水路流れとの差異を示したものである¹⁹⁾。ともに計算結果であるが、モデル中の係数 c_3 をゼロとすることにより自由水面の効果をなくし管路流れを解析している。水面付近の2次流が管路流れの場合より発達していること明かである。水面の存在による乱れの異方性の強化が2次流に大きな影響を与えている。



(a) 管路での2次流 (b) 開水路での2次流

図-4 管路流れと開水路流れとの相違(数値解析結果)



(a) $B/H=1.5$

(b) $B/H=0.6$

図-5 主流速度分布の比較

図-5は主流速度に関して計算結果と実験結果とを比較したものである¹⁹⁾。異なるアスペクト比の実験条件に対して計算結果と実験結果との一致は良好である。隅角部に向かう等流速線の張り出しがやや強めに算出されている。

2次流のパターンを実験結果と対比したものの³⁾が図-6である。計算結果のうち1つは矢線で、他の1つは流れ関数値で示してある。2次流のパターンがよく再現されている。

このモデルを用いて平均流速場に及ぼすアスペクト比の影響を調べた結果が図-7である¹⁹⁾。アスペクト比が2から6まで増加すると、水面付近の2次流が水路幅方向のある範囲まで発達していくことがみられる。この2次流の変化にともない主流の流速分布も変化している。

Naot³⁰⁾はこのモデルを使用して横断面内の粗度の分布が流れ場に及ぼす効果をも検討している。

4.2 複断面開水路流れ

複断面開水路流れでは、横断面形状の複雑さと2次流の存在により3次元性の強い流れ場が形成されることが知られている。この流れ場は水深や横断面形状、粗度の分布などの多くの因子の影響を受け変化するため、実験により各因子の影響を系統的に検討することは容易ではなく、信頼性の高い3次元数値解析法の開発が要請されている。これまでKrishnappan-Lau³¹⁾によるLaunder-Yingモデルを用いた解析、Kawahara-Tamai³²⁾のモデル定数に修正を加えたLaunder-Yingモデルによる解析、Larsson³³⁾によるNaot-Rodiモデルの適用などが報告されている。

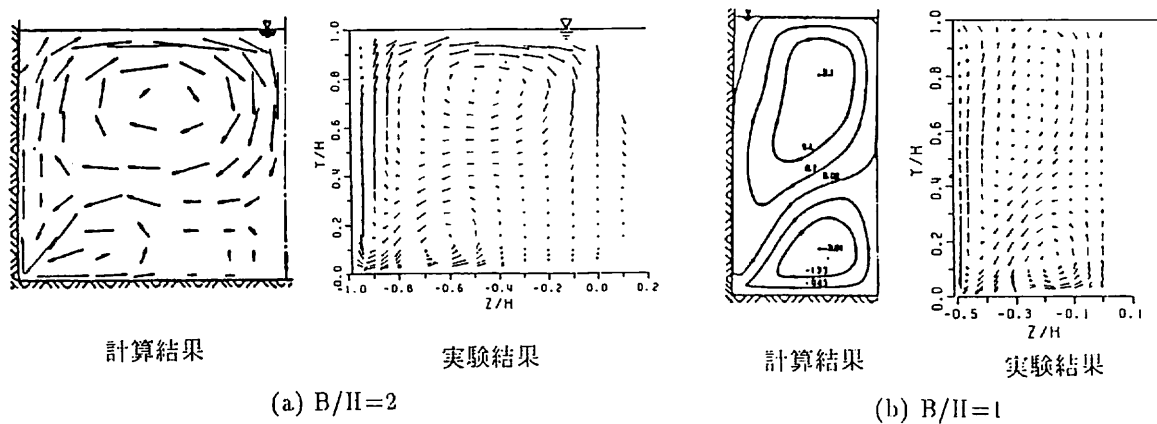


図-6 2次流の比較

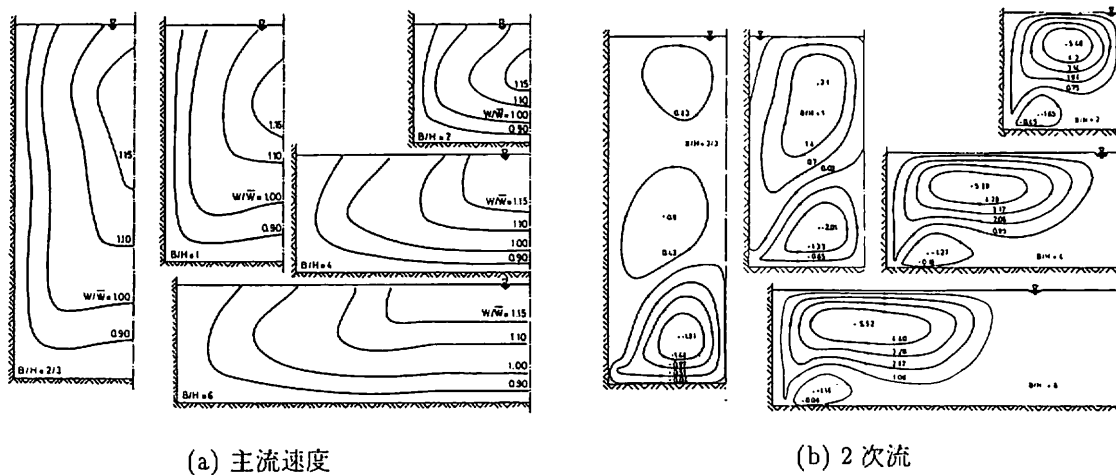


図-7 アスペクト比の平均流速分布に及ぼす影響

図-8 は壁面剪断応力について Launder-Ying モデルによる計算結果と実験結果とを比較したもの³¹⁾である。計算結果が実験結果をよく再現している。

図-9 は Naot-Rodi モデルによる主流速度の計算結果と測定結果との対比している³³⁾。1 つは複断面管路流れに対してであり、他の 1 つが開水路流れについての結果である。管路流れでは解析結果は実験結果を良好に再現しているが、開水路流れでは最大流速の発生位置や低水路内の流速分布などに差異がみられる。

2 次流の強さを決定する係数を調整した Launder-Ying モデルと河原-玉井モデルによる平均流速場の解析結果を図-10 に示す³⁴⁾。Naot-Rodi モデルと同様の方法で、2 つのモデルによる解析とも水面でのエネルギー散逸率の増加を考慮している。主流速度は実験結果と 2 つの計算結果とも良好に一致している。詳細に対比すると、Launder-Ying モデルは低水路底面付近の 2 次流パターンを正確には算出しておらず、低水路内の等流速線の湾曲の程度が異なっている。この点に関しては河原-玉井モデルの方が信頼性が高い。高水敷側壁付近の水面近傍に形成される 2 次流の水路幅方向の大きさが河原-玉井モデルでは過小に算出されている。これは自由水面のレイノルズ応力に及ぼす影響がモデルに取り込まれていないためであろうと推測される。

レイノルズ応力のうち剪断成分を比較したものが図-11 である。レイノルズ応力 \bar{w} は底面近傍で大きな値をとるのは当然であるが、低水路と高水敷との境界部でも大きな値を示している。また、低水路側壁付近にはレイノルズ応力が負となる領域が存在している。これらの特徴を両モデルとも捉えている。しかし、河原-玉井モデルの方が主流速度分布を良好に算出するために、実験結果との一致は良好である。レイノルズ応力 \bar{w} についても河原-玉井モデルの方が再現性がよい。なお、高水敷先端部に乱れエネ

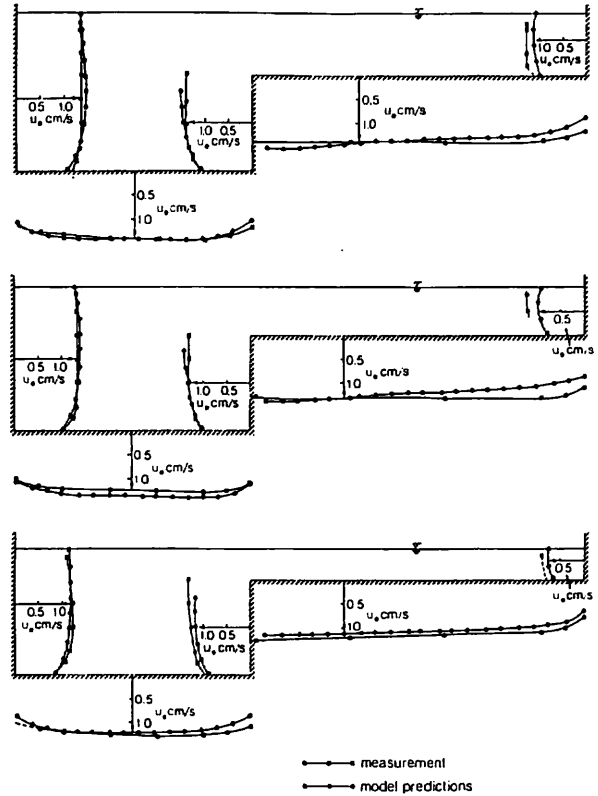


図-8 異なる 3 つの水深での壁面剪断応力の比較

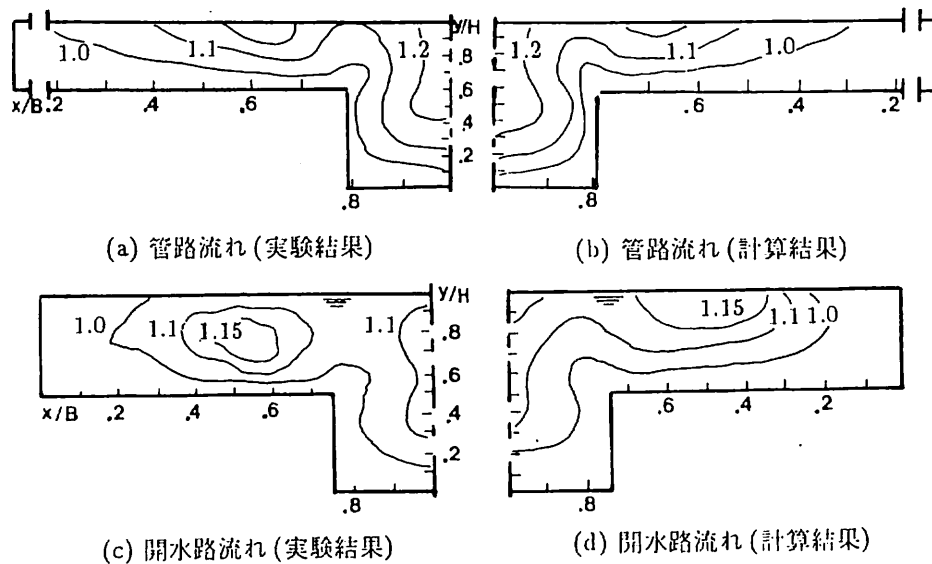
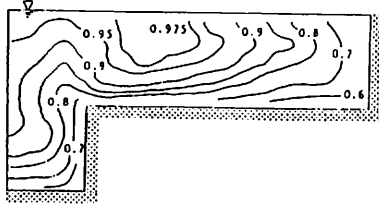
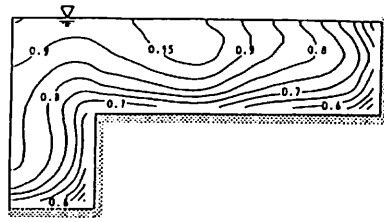


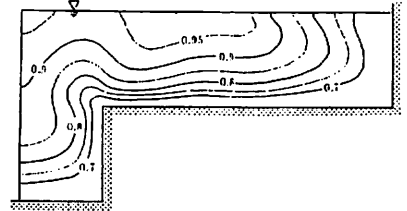
図-9 主流速度分布の比較； U/U_{ave}



実験結果

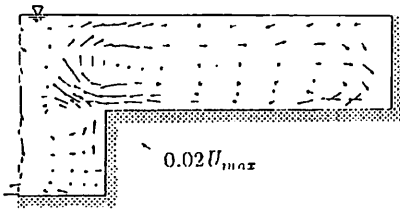


Launder-Ying モデル

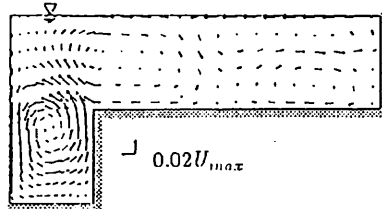


河原-玉井モデル

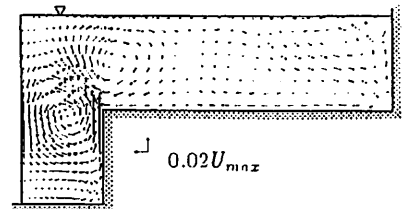
(a) 主流の流速分布 ; U/U_{max}



実験結果

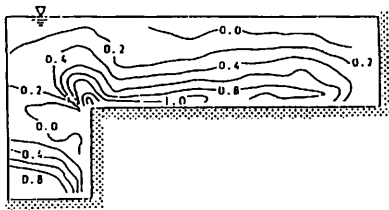


Launder-Ying モデル

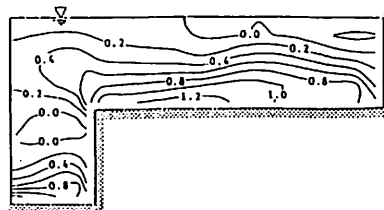


河原-玉井モデル

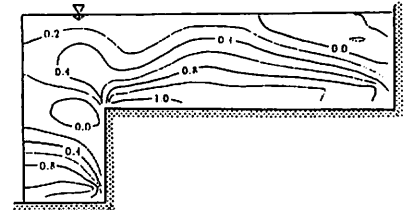
(b) 2次流ベクトル



実験結果

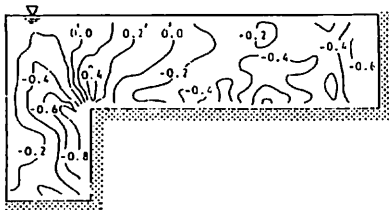


Launder-Ying モデル

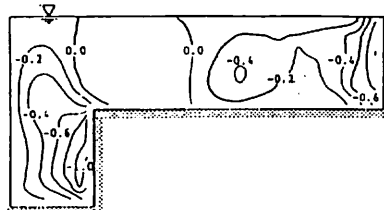


河原-玉井モデル

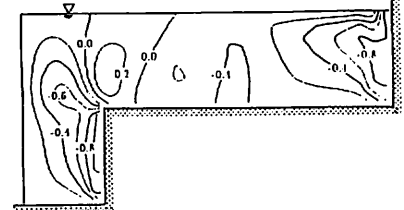
(c) レイノルズ応力 ; $-\overline{uv}/U_f^2$



実験結果



Launder-Ying モデル



河原-玉井モデル

(d) レイノルズ応力 ; $-\overline{uv}/U_f^2$

図-10 実験結果と数値解析の比較

ルギーの強い領域が形成されるが、そこでの乱れの生成が大きいので壁面付近の強い乱れが移流により輸送されたものではないことが知られている³⁴⁾。

河原らは修正 Launder-Ying モデルを用いて水深、横断面形状の流れ場に及ぼす影響を系統的に調べている³⁵⁾。図-12 に水深の変化にともなう平均流速分布の変化を示す。水深にかかわらず、高水敷先端から水面に向かう上昇流が形成されること、水深が増加するにつれて上昇流の流向が鉛直方向になり低水路と高水敷との接合部を通しての運動量交換が相対的に弱まることなどが知られる。

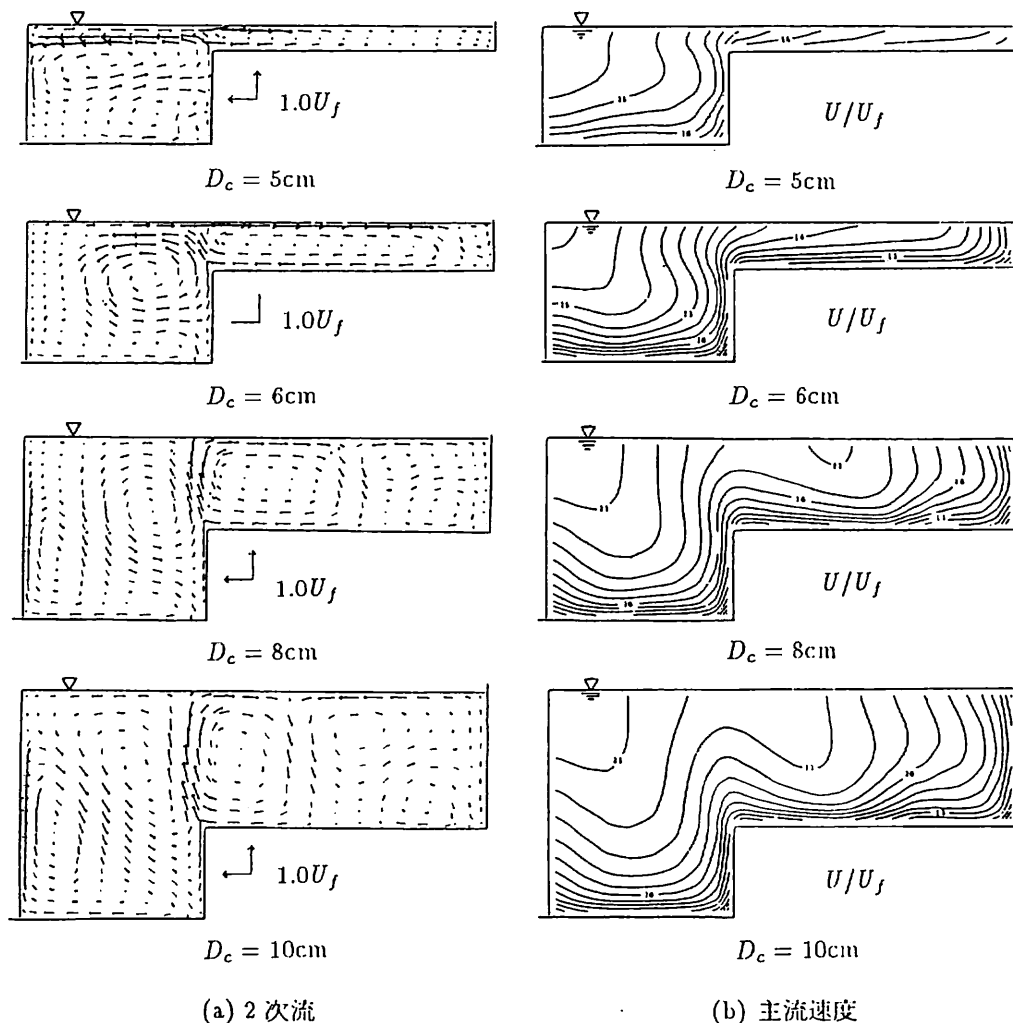


図-11 水深の平均流速分布に及ぼす影響 (D_c :低水路水深)

5. おわりに

代数応力モデルを用いた開水路流れの解析を紹介してきた。長方形断面や複断面を有する開水路流れの平均流速分布やレイノルズ応力分布をある程度予測できることが知られた。しかし、複断面開水路流れまで十分精度よく再現できるモデルは未だ確立されていない。乱流モデル中の圧力-歪速度相関の取り扱い、壁面効果、水面効果などは改良する余地が多い。特に、自由水面の取り扱いについては検討が不十分である。3次元解析の長所は信頼性と汎用性にあるが、その手法の確立のためには精度の高い実験結果の蓄積、DNSやLESのデータベースの利用などが必要である。今後の乱流モデルには乱流構造を表現するパラメータ(例えば非等方テンソルにより定義される座標変換に関する不変量やエネルギーカスケード過程の強さを表現するヘリシティなど)が導入されていくであろう。同時に、連続体力学的手法により流体力学的にも数学的にも合理的なレイノルズ

応力の表現方法が検討されるもの³⁶⁾と思われる。洪水時には土砂輸送や植生の問題もあり水面には波も立つ。より複雑な流れ場や物質輸送を取り扱うことが乱流モデルの方向であり、3次元解析の醍醐味でもある。

最後に、実河川の流れ場の3次元解析に関連する課題として2つの問題を提起しておきたい。1つは、洪水写真などで見いだされる大規模な乱流構造をいかに捉えるかということである。これは既存の乱流モデルでは困難である。さらに、実河川での大きなアスペクト比を考えると、大規模構造は室内実験よりも2次元性を有しやすいと考えられる。2次元乱流は3次元乱流とは本質的に異なり既存の乱流モデルでは取り扱うことができない。2つめは、数値解析ではどの程度の格子網の細かさが必要であるかという問題である。粗い格子網では数値拡散が大きく、精度の高い乱流モデルを使用しても信頼性の高い結果は得られない。少ない格子点数で目的とする解を高精度に求める解析手法の開発が必要である。

参考文献

- [1] 保原 充, 大宮司久明(編): 数値流体力学, 東京大学出版会, 1992.
- [2] Rodi, W.: Turbulence Models and Their Application in Hydraulics - A State of the Art Review -, IAHR, Delft, The Netherlands, 1980.
- [3] Rodi, W.: Use of advanced turbulence models for calculating the flow and pollutant spreading in rivers, Proc. 3rd Int. Symp. on River Sedimentation, Jackson, Miss., 1369-1382, 1986.
- [4] 和田 明(代表者): 水工学における数値解析手法の精度向上と実用化に関する研究報告書, 土木学会水理委員会, 1992.
- [5] 河原能久, 玉井信行: 非円形断面直線流路の2次流に対する乱流モデルについて, 土木学会論文集, 第399号, 247-250, 1988.
- [6] Launder, B.E., Reece, G.J. and Rodi, W.: Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure, J. Fluid Mech., Vol.68, 537-566, 1975.
- [7] Gibson, M.M. and Launder, B.E.: Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer, J. Fluid Mech., Vol.86, 491-511, 1978.
- [8] Pollard, A. and Martinuzzi R.: A comparative study of eleven models of turbulence, Proc. 6th Symp. on Turbulent Shear Flows, Toulouse, France, 17-9, 1987.
- [9] 杉山 均: レイノルズ応力モデルの改良と三次元非等方性乱流解析に関する研究, 東京大学博士論文, 1990.
- [10] Naot, D., Shavit, A. and Wolfshtein, M.: Interaction between components of the turbulent velocity correlation tensor due to pressure fluctuations, Israel J. Tech., Vol.8, 259-269, 1970.
- [11] Naot, D., Shavit, A. and Wolfshtein, M.: Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses, Phys. Fluids, Vol.16, 738-743, 1973.
- [12] Mellor, G.L. and Yamada T.: A hierarchy of turbulence closure models for planetary boundary layers, J. Atmos. Sci., Vol.31, 1791-1806, 1974.
- [13] 島 信行: 強い応力非等方性を考慮したレイノルズ応力モデル, 日本機械学会論文集, B編, 54巻, 505号, 2317-2324, 1988.
- [14] Rodi, W.: A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses, ZAMM 56, T219-T221, 1976.
- [15] Launder, B.E.: A generalized algebraic stress transport hypothesis, AIAA J., Vol.20, 436-437, 1982.
- [16] Launder, B.E. and Ying, W.M.: Prediction of flow and heat transfer in ducts of square cross-section, Heat and Fluid Flow, Vol.3, 455-461, 1973.

- [17] 河原能久, 玉井信行: 新しい代数的応力モデル提案とその複断面流路の流れへの適用, 第33回水理講演会論文集, 289-294, 1989.
- [18] 河原能久: 複雑な横断面形状を有する直線管内乱流の数値解析, 第5回数値流体力学シンポジウム講演論文集, 347-350, 1991.
- [19] Naot, D. and Rodi, W.: Calculation of secondary currents in channel flow, J. Hydraulics Div., ASCE, Vol.108, 948-968, 1982.
- [20] Yoshizawa, A.: Statistical analysis of the deviation of the Reynolds stress from its eddy viscosity representation, Phys. Fluids, Vol.27, 1377-1387, 1984.
- [21] Spezial, C.G.: On nonlinear K- ϵ and K- ϵ models of turbulence, J. Fluid Mech., Vol.178, 459-475, 1987.
- [22] 明賢國, 小林敏雄: 正方形断面管内の発達する乱流の数値解析, 日本機械学会論文集, B編, 56巻, 532号, 3680-3687, 1990.
- [23] Nezu, I. and Rodi, W.: Experimental study on secondary currents in open channel flow, Proc. 21st IAHR Congress, Melbourne, Australia, 115-119, 1985.
- [24] Reece, W.: A generalized Reynolds stress model of turbulence, Ph.D. Thesis, Imperial College, London, 1976.
- [25] Gibson, G.L. and Rodi, W.: Simulation of free surface effects on turbulence with a Reynolds stress model, J. Hydraulic Research, Vol.27, 233-244, 1989.
- [26] Shir, C.C.: A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows in the idealized planetary layer, J. Atmos. Sci, Vol.30, 1327-1339, 1973.
- [27] Hossain, M.S. and Rodi, W.: Mathematical modelling of vertical mixing in stratified channel flow, Proc. 2nd Int. Symp. on Stratified Flows, Trondheim, Norway, 280-290, 1980.
- [28] Yacoub, N., Maron Moalem, D. and Naot, D.: Towards the numerical simulation of the horizontal slug front, Int. J. Numer. Methods in Fluids, Vol.14, 127-146, 1992.
- [29] 瀬津家久, 中川博次: 修正 k- ϵ 乱流モデルによる開水路乱流の数値計算, 土木学会論文集, 第387号, 125-134, 1987.
- [30] Naot, D.: Response of turbulent open channel flow to roughness heterogeneity, J. Hydraulic Engrg., ASCE, Vol.110, 1568-1587, 1984.
- [31] Krishnappan, B.G. and Lau, Y.L.: Turbulence modeling of flood plain flows, J. Hydraulic Engrg., ASCE, Vol.112, 251-266, 1986.
- [32] Kawahara, Y. and Tamai, N.: Numerical calculation of turbulent flows in compound channels with an algebraic stress turbulence model, Proc. 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, Japan, 9-16, 1988.
- [33] Larsson, R.: Numerical simulation of flow in compound channels, Proc. 3rd Int. Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Tokyo, Japan, 537-544, 1988.
- [34] 河原能久, 玉井信行: 複断面開水路乱流の三次元数値解析, 第31回水理講演会論文集, 425-429, 1987.
- [35] 河原能久, 玉井信行: 複断面河道流れに及ぼす横断面形状の影響, 第20回乱流シンポジウム講演論文集, 18-24, 1988.
- [36] Speziale, C.G.: Analytical methods for the development of Reynolds-stress closures in turbulence, Annual Rev. Fluid Mech., Vol.23, 107-157, 1991.