

水工学シリーズ00-A-9

# 乱流モデルの発展と河川工学への応用

香川大学工学部安全システム建設工学科教授

河 原 能 久

土 木 学 会  
水 理 委 員 会 ・ 海 岸 工 学 委 員 会  
2000年8月

# 乱流モデルの発展と河川工学への応用

## Development of Turbulence Models and Their Application to River Engineering

河原能久

Yoshihisa KAWAHARA

### 1. はじめに

河川工学が対象とする流れは、レイノルズ数が極めて高く、複雑な地形の影響を受けているため、通常、流れは乱流である。そのような乱流の解析技術は、近年のコンピュータの性能の飛躍的な進歩に支えられ、質的にも量的にも発展してきている。とりわけ、流れの数値解析技術が高度化したため、乱流モデルの信頼性の向上に対する要求は高くなっていると考えられる。

最近、乱流解析や乱流モデルに関する良書が刊行されている<sup>例えば、1)~5)</sup>。また、数値解析手法についても多くの和書が出版されている<sup>例えば、6)~9)</sup>。乱流モデルの全体像や乱流モデルを用いた数値解析手法についてはそれらの成書を参照していただくものとし、本稿では、乱流モデルの発展を振り返り、様々な乱流モデルの特性について私見を述べさせていただく。具体的には、乱流の基礎的な特性とモデルの開発の経緯を説明した後、乱流モデルの開発に関する基礎的な考え方や制約条件を説明する。次に、複雑な乱流モデルから簡単な乱流モデルを誘導することによって、乱流モデルの特徴を整理する。その後、河川工学の分野への応用例を紹介するとともに、乱流モデルに関する今後の検討課題について述べる。

### 2. 乱流の特性と解析法

乱流は極めて多くのスケールの運動から成り立っている。乱流理論によれば、レイノルズ数を  $Re_T = v_0 \ell_0 / \nu$  ( $v_0$ : 代表的な速度変動の大きさ,  $\ell_0$ : エネルギー保有渦の大きさ,  $\nu$ : 流体の動粘性係数) とすると、乱流運動を解析するのに必要な格子点数は  $O(Re_T^{9/4})$  と評価される。今、河川の流れについて、 $v_0 = 10\text{cm/s}$ ,  $\ell_0 = 100\text{cm}$ ,  $\nu = 0.01\text{cm}^2/\text{s}$  とすると、 $Re_T = 10^5$  となり、格子点数は  $3.2 \times 10^{13}$  となる。流れ場の未知量を速度 3 成分と圧力の 4 変数とし、1 変数に 8B (バイト) を割り当てると、コンピュータの記憶容量として  $1.0 \times 10^{15}$  B が必要となる。現在利用できるスーパーコンピュータの主記憶容量はせいぜい数 GB 程度である。(なお、東京大学情報基盤センターの次期超並列型スーパーコンピュータシステム (1024 台から成る) では総主記憶容量は 2,048GB になる。) また、乱流運動を一定時間だけ追跡に要する計算量は  $O(Re_T^3)$  に比例する。格子点数  $10^6$  の計算を 1 ステップ進めるのに必要な計算時間を 1 秒と評価し、計算時間が格子点数に比例すると仮定すると、上記の例の計算を 1 ステップ進めるのに要する時間は  $3.2 \times 10^7$  秒 (1.0 年) となる。したがって、現実の問題に対して Navier-Stokes (NS) 方程式の数値解を求めることは、事実上不可能である。このため、NS 方程式から、重要な情報 (スケールの大きな運動が有することが多い) のみをいかに取り出すかが、乱流モデリングにおける主要な関心事である。

乱流は連続の式と NS 方程式の制約の下で生ずる運動である。乱流は様々なスケールの運動から成るが、全体として粘性により絶えず運動エネルギーを散逸している。このため乱流を維持するためにはエネルギーを供給し続けることが必要である。エネルギー源は平均流が有する力学的エネルギーや外部からの仕事であるが、供給されたエネルギーはレイノルズ応力と平均流の速度勾配の作用によって、まず、低波数 (大きなスケール) の乱れのエネルギーへと変換される。変換されたエネルギーは異なる波数間の非線形作用によつ

て、概して、大きなスケールから小さなスケールへと伝えられ（エネルギー・カスケードと呼ばれる）、最も小さなスケール（大きなスケールからのエネルギー供給量に応じて最小のスケールが定まる）においてエネルギー散逸の大半が起こり、熱に変換される。単純な剪断乱流における各波数（波数  $k$  :  $k = 2\pi / \text{波長}$ ）の運動が保有している運動エネルギーの分布（エネルギー・スペクトル）を図-1に示す。レイノルズ数が十分に大きければ、図中の慣性小領域と呼ばれる領域（流体の粘性の影響を受けず、スペクトル形が波数  $k$  の  $-5/3$  乗に比例する）が形成される。重要なことは、乱流がいかに形成されたのか（境界層、管内流、噴流、後流、格子乱流などの種類）に関係なく、その領域が出現することである。すなわち、統計的な法則性が存在することである。

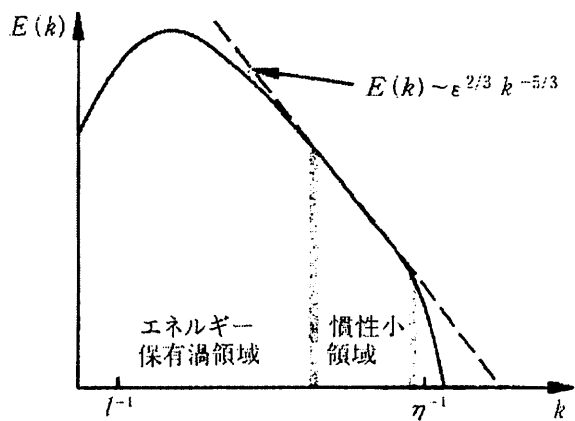


図-1 3次元エネルギー・スペクトル

スケールの大きさの違いとそれらの特徴を表-1に示す。大きいスケールの運動は、流れ場の境界形状や乱れの発生方法に強く依存し、運動量や熱・物質輸送にも大きく関与する。このことは、大きなスケールに関する情報を抽出することの重要性と抽出方法に汎用性がない可能性を示している。一方、小さなスケールには規則性があり普遍的な取り扱いが期待できる。ただし、乱れの運動エネルギーの散逸率を精度良く評価することが重要である。

表-1 大小スケールの特性の差違

特性	大スケール	小スケール
規則性	秩序的	ランダム的
方向性	非等方的	等方的
寿命	長い	短い
エネルギー	エネルギーの大半を保有	エネルギーの大半を散逸
スカラー輸送	関与は大	関与は小

乱流の特性について多くのことが実験や現地観測によって明らかにされてきた。しかし、実験とは異なる流れ場についての予測を行うとなると、容易ではない。さらに、流れだけでなく、熱や物質（土砂や塩分、水質など）輸送を伴う場合には、モデルを用いて予測することが必要になる。図-1に、これまでに開発されてきた運動量輸送についての解析手法を示している。なお、NS方程式の直接数値解析（Direct Numerical Simulation）は除いてある。解析法は大きく2つに分けられる。

1つは、Reynolds平均を施したNS方程式を解く方法である。この方法では、平均操作に伴って現れる未知な Reynolds 応力を他の計算可能な量と関係づける（モデル化することにより方程式系を閉じさせる。すなわち、非圧縮性流体に対して次の連続の式と運動量の式を解く。

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{DU_i}{Dt} = \rho g_i - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \overline{\rho u_i u_j} \right) \quad (2)$$

ここで、 $U_i$  : 平均流速の  $i$  方向成分、 $P$  : 圧力、 $\rho$  : 流体の密度、 $\mu$  : 流体の分子粘性係数、 $g_i$  : 重力加速度の  $i$  方向成分である。式(2)の右辺の末尾の項  $-\overline{\rho u_i u_j}$  がレイノルズ応力であり、新たに加わった未知量である。

- (1) Reynolds 平均モデル

  - 1) 渦動粘性係数モデル
    - ・ 0 方程式モデル
    - ・ 1 方程式モデル
    - ・ 2 方程式モデル
  - 2) 応力方程式モデル
  - 3) その他
    - ・ 非線形  $k-\epsilon$  モデル
    - ・ 多重スケールモデル

(2) 空間平均モデル(LES)

  - 1) Smagorinsky モデル
  - 2) Dynamic SGS モデル

第1のグループの解析法は、レイノルズ応力を渦動粘性係数

図-2 乱流場の数値解析法

(Eddy Viscosity) の概念を用いて表現するかどうかにより、さらに分類される。渦動粘性係数とは、乱流運動の結果として運動量の大きく広がる現象を分子粘性の効果と類似と捉える方法であり、次式の  $\nu_t$  で定義される。

$$-\overline{\rho u_i u_j} = \rho \nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad k = \frac{1}{2} \overline{u_i u_i} \quad (3)$$

ここで、 $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタ ( $i=j$  の時に 1, それ以外では 0) である。

渦動粘性係数は乱流場によって異なる値をとるが、渦動粘性係数を乱流場のどのような情報に基づいて算出するかによって、様々なモデルに細分するのが通例である。すなわち、渦動粘性係数を算出するために新たに追加する偏微分方程式の数により名前が付けられている。開水路乱流においては、渦動粘性係数を  $\nu_t = \kappa u_* z(h-z)$  ( $h$ : 水深,  $z$ : 河床からの高さ,  $u_*$ : 摩擦速度,  $\kappa$ : カルマン定数) のように仮定する場合があるが、このモデルでは  $\nu_t$  を決定するのに追加すべき微分方程式は不要 (ゼロ) であるため、0 方程式モデルと呼ばれる。また、よく使用され、市販の解析プログラムに必ず含まれている  $k-\varepsilon$  モデルでは、 $\nu_t$  を求めるために乱れの運動エネルギー ( $k$ ) とエネルギー散逸率 ( $\varepsilon$ ) の 2 本の微分方程式を追加して解く。このため、 $k-\varepsilon$  モデルは 2 方程式モデルに分類される。

これに対して、応力方程式モデル (Reynolds Stress Equation Model : RSM, Differential Second-moment Closure Model : DSM) ではレイノルズ応力そのものに対する輸送方程式を立てて解く。レイノルズ応力に対する厳密な方程式は NS 方程式と式(2)から次のように導出される。

$$\frac{Du_i u_j}{Dt} = -\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{1}{\rho} \left( \overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \overline{u_j} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) + 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (4)$$

右辺の第 3 項, 第 5 項, 第 6 項は未知の相関量であり、それらを計算可能な量で表現しない限り解くことができない。一般的には、レイノルズ応力 6 成分とエネルギー散逸率に対する偏微分方程式 (合計 7 本) を、平均流に対する 4 本の方程式 (連続の式と 3 本の運動量の式) に追加して解く。偏微分方程式を簡略化して代数方程式にしたものを代数応力モデル (Algebraic Stress Model, ASM) という。

上記の 2 つのカテゴリーからはずれるモデルがある。1 つは、非線形  $k-\varepsilon$  モデルと呼ばれるもので、標準  $k-\varepsilon$  モデルが平均流速勾配の 1 次項を考慮するのに対して、高次項までも取り入れるものである (例えば<sup>10)</sup>)。代数応力モデルと似た性質を有するが、テンソル量としての整合性をとり、プログラミングも容易である。また、多重スケールモデル<sup>11,12)</sup> はエネルギー・スペクトルを分割し、それぞれの波数域に対して 2 方程式モデルを立て、乱れのスケールの評価を正確にすることにより信頼性を上げるものである。

もう一つの解析手法は、NS 方程式に空間平均の操作を施して得られる、計算格子より大きなスケールに対する運動量の式を解く方法であり、ラージ・エディ・シミュレーション (Large Eddy Simulation) と呼ばれる。計算格子より小さなスケールが大きなスケールに及ぼす影響については、渦動粘性モデル (Sub-Grid Scale Model) で表現する。小さなスケールはより等方的であり、その構造に普遍性が期待できる。この方法では、非等方性の強い大きなスケールの運動はモデル化せず直接計算により算出してしまふ。このため、この手法には汎用性を期待することができる。計算負荷はやはり大きいですが、DNS ほどではなく、高レイノルズ数の流れを解析できることに大きな特長がある。このため、研究用のツールとして複雑乱流の解析に適用されている。しかし、最近、渦動粘性係数中に現れる唯一のモデル定数 (Smagorinsky 定数) が流れの種類に依存することが判明し、モデル定数の値を空間的にも時間的にも変動させる動的渦粘性係数モデル (dynamic SGS model) の開発が進められている。

### 3. 乱流解析法の開発の経緯

表-2は、乱流モデルや乱流の解析手法に関連する重要な出来事を年表の形で示したものである。もとより完全なものではないことを断っておく。左から第2列目は図-2で説明したレイノルズ平均モデルに関するもの、第3列は空間平均モデル (LES), DNS, あるいは理論的な発展に関する重要な出来事を示している。また、右端の列は乱流モデルの開発に大きな影響を与えたスタンフォード会議やTSFシンポジウム、乱流の数値解析の発展を支えてきたアルゴリズムやスキーム、スーパーコンピュータに関する情報を書き留めた。

第1回スタンフォード会議では積分法と呼ばれる解析手法が主流であり、その頃、2方程式モデルは産声をあげていた。1960年代までにRottaが乱流モデルの基礎を築いている。その後、乱流モデルの開発の中心はLondon大学Imperial Collegeへ移り、1970年代はじめには今日知られるような標準 $k-\varepsilon$ モデルや低レイノルズ数型 $k-\varepsilon$ モデルが提案された。また同時に、それ以前の多くの研究者の成果を吸収して、応力方程式モデルの開発が進められた。応力方程式モデルの古典的存在であるLauder-Reece-Rodiモデルは、特定のモデルの1つにとどまらず、数多くの異なる乱流場に同一のモデルを適用し、妥当性を検討した点で画期的なものであった。Imperial Collegeのグループでは、1960年代に多くの実験結果の妥当性を再検討し、信頼性の高い実験データを選別していた。いわゆるデータベースの構築である。若い研究者達は、それらの実験データを統一的に説明できる乱流モデルを構築することが可能であると信じ、モデルの構造を追求するとともに、モデルの定数の最適化を進めた。

1970年代前半では、コンピュータの性能の制約を強く受けており、解析対象も比較的簡単なものが多かった。Rodiが応力方程式モデルから代数応力モデルを導いたのも、コンピュータの性能の問題からであった。

第2回のスタンフォード会議では多くの乱流モデルが比較されたが、改良したモデルが必ずしも高精度を示さない例があった。その原因の1つに運動量の式における移流項の精度の問題であった。非圧縮性流体の数値解析に適した高精度の移流スキームが本格的に検討されたのもこの頃であると思われる。

1970年代後半にスーパーコンピュータCRAY-1が登場し、数値計算に革新をもたらした。Moin-Kim (1982)によるLESでは格子点数 $64 \times 128 \times 128$ を用いて平行平板間の乱流を解析し、bursting現象を再現することに成功した。これにより、可視化手法や条件付きサンプリングなどで得られていた実験結果と基礎方程式とが直接繋がることになった。

1980年代に入ると、我が国ではスーパーコンピュータを使用できる環境が整いはじめ、乱流解析は多様な発展を示し始めた。特に、統計理論からの示唆、壁面付近での挙動のモデル化などを通して、2方程式モデルの精緻化は多いに進んだ。

1980年代後半以降、モデルを一切含まないDNSに関心が移っていった。特にスーパーコンピュータを利用してDNSを行い、実験でも測定が困難な統計量を算出することや、乱流構造の時間発展などが可視化されるようになり、データベースも構築されるようになった。

1970年代から1980年代後半までで、乱流モデルがどのように水工学、特に河川乱流の解析に浸透していったかを表-3に示す。なお、我が国の成果については、水理講演会論文集から河川流の解析に関連するもののみを採っている。このため、日野らのLES (1974) や武本らの噴流解析(1983)、田中らのプレナム内流動解析(1984)をはじめ、表層密度噴流などの解析例は含めていない。表中の水深平均した2方程式モデルは実用性を指向したものである。Rodiが水工学の分野に移り、乱流解析を進めたことが伺える。また、我が国ではそれより4、5年遅れて同様な解析を行ったことがわかる。その理由として次のように考えられる。まず、複雑な地形、自由水面の存在、移動床など、乱流モデルではなく数値解析法そのものの難易度が高いため、3次元解析に手を付けにくかった。また、流量、土砂供給量、粗度などに不明な点が多く、3次元解析から得られる成果の信頼性が不明であった。さらに、流速と水深を算出するだけであれば、レイノルズ応力の影響は必ずしも重要ではなく、簡単なモデルでも良好な結果が得られることが多かった。

表-2 乱流モデルと乱流解析法の開発経緯

年数	乱流モデル	LES, DNS, 理論	関連する出来事
1877	渦粘性係数(Boussinesq)		
1895		Reynolds 応力(Reynolds)	
1915	混合距離理論(Taylor)		
1925	混合距離理論(Prandtl)		
1935		一様等方性理論(Taylor)	
1941		局所等方性理論(Kolmogorov)	
1945	1 方程式モデル(Prandtl) 2 方程式( $k - \epsilon$ )モデル(Chou)		
1951	2 方程式( $k - \ell$ )モデル(Rotta)		
1956	壁面減衰関数(van Driest)		
1959		直接相互作用近似理論(Kraichnan)	
1961	2 方程式( $k - \epsilon$ )モデル(Davidov)		
1968	2 方程式( $k - k\ell$ )モデル (Rotta)		
1969	応力方程式モデル(Donaldson)		第1回スタンフォード会議
1970	2 方程式( $k - k\ell$ )モデル(Rodi, Spalding) 2 方程式( $k - \omega$ )モデル(Saffman) 応力方程式モデル(Daly-Harlow)	LES (チャンネル流) (Deardorff)	SMAC 法(Amsden, Harlow)
1971			組織構造(Kline ら)
1972	2 方程式( $k - \epsilon$ )モデル(低 Re 数) (Jones-Launder) 応力方程式モデル(Hanjalic, Launder)	DNS(一様等方性乱流) (Orszag, Patterson)	SIMPLE アルゴリズム (Patankar, Spalding)
1974	Mellor-Yamada モデル		
1975	応力方程式モデル(Launder, Reece, Rodi)		
1976	代数応力モデル(Rodi)		CRAY-1 (米国スパコン)
1977		Realizability(Schumann)	第1回 Turbulent Shear Flows シンポジウム
1978		Invariance(Lumley)	
1979			QUICK スキーム(Leonard)
1980	多重スケールモデル(Hanjalic ら)		
1982		LES(Channel 乱流の bursting) (Moin, Kim)	第2回スタンフォード会議 FACOM VP, HITAC S-810 (和製スパコン)
1983			NEC SX (和製スパコン)
1984		2 スケール統計理論(吉澤)	TVD スキーム(Harten)
1985			CIP スキーム (矢部)
1986		繰り込み群理論(Yakhot, Orszag)	
1987		DNS (Channel 乱流) (Kim ら)	
1990	2 方程式( $k - \epsilon$ )モデル(本格的低 Re 数型) (長野, 田川), (Myong, 笠木)		
1991	応力方程式モデル(Speziale, Sarkar, Gatski)	Dynamic SGS モデル(Germano ら)	

表-3 乱流モデルの河川乱流への応用

年数	開水路乱流への適用	水理講演会論文集
1976	応力方程式モデル+長方形断面開水路流 (Reece)	
1978	水深平均 $k-\varepsilon$ モデル(Rastogi, Rodi)	
1979	$k-\varepsilon$ モデル+湾曲開水路流 (Leschziner, Rodi)	
1982	代数応力モデル+長方形断面開水路流(Naot, Rodi)	
1983		$k-\varepsilon$ モデル+蛇行開水路流 (玉井, 池谷)
1985		$k-\varepsilon$ モデル+蛇行管内流 (田中, 池田) 代数応力モデル+長方形断面管内流 (早川ら)
1986		$k-\varepsilon$ モデル+浮遊砂流 (福嶋)
1987		代数応力モデル+複断面開水路流 (河原, 玉井) $k-\varepsilon$ モデル+河川合流部 (玉井, 上田)

### 3. 乱流のモデリングにおける基本的な原則

具体的な乱流モデルの説明をする前に、モデルの開発方針とモデルが満足すべき条件を整理する。それらは、乱流工学では知られているものであるが、乱流モデルの利用者も理解しておくことが有益である。

#### 3. 1 モデリングに対する基本的な仮定

##### (1) Principle of receding influence

レイノルズ平均を施した NS 方程式には式 (2) のように 2 次の相関項 (レイノルズ応力) が現れる。その 2 次の相関項に対する輸送方程式を導くと (式 (4)), 3 次の相関項が新たに現れる。このように、未知の相関項に対する輸送方程式には必ず新たな未知量が含まれ、方程式系を閉じたものにすることができない (乱流の完結問題)。そこで、いずれかの次数で方程式系を打ち切り、そこに現れる未知量を計算可能な量の組み合わせで表現することを行い、方程式系を閉じるようにする。receding influence の原則とは、高次の相関項ほど平均流に与える影響が薄れていくという考え方であり、高次の相関量に対して精度の低いモデル化を行ったとしても平均流への影響は小さいと考える立場をいう。現在、2 次の相関項で打ち切る RSM (DSM) が精度、経済性、普遍性のバランスがとれたものと考えられている。

##### (2) 高レイノルズ数の仮定

流れのレイノルズ数が十分に高いことを仮定することで、乱流のモデル化は大幅に容易になる。散逸過程に対して高波数領域における局所等方性を適用することが可能となる。また、その領域では流体の分子粘性の影響を無視できるため、2 つの異なる次元を持つ変数 (例えば  $k$  と  $\varepsilon$ ) を用いることにより、時間スケールを  $k/\varepsilon$ 、長さスケールを  $k^{3/2}/\varepsilon$  と評価することができる。

#### 3. 2 乱流モデルが満足すべき条件

乱流モデルの構築は、様々な物理的な考察に基づいて数学的な要件を満足するように構造を決め、理論的に決定できないモデル定数を実験値などを参照して決めることにより行う。その際、レイノルズ応力テンソルを取り扱うため、テンソルとしての要件、座標系の並進や回転に対する統計量の不変性、乱流統計量が Schwarz の不等式を満足する条件などの制約条件を満足することが要求される。さらに、乱れの 1 成分がゼロとなる 2 成分乱流 (例えば、壁面や変動のない水面への漸近する場合) では、乱流統計量の挙動を再現することが必要である。その他に、平均流の急激な変形に対する乱れの応答に対する理論解 (Rapid Distortion

Theory) 等をモデルが再現できることも必要である。近年その有効性が示されているが、ここでは省略する。

### (1) テンソル量としての条件

レイノルズ応力は2階のテンソルであるため、添え字に関する対称性やトレース（対角成分の和）に関する制約がある。通常、2次の相関項に対してはそれらの制約条件が満足されているが、3次の相関項（例えば、式(4)の第3項の乱流拡散項）については満たさないものが多い。

### (2) フレーム不変性

物質のフレーム不変性 (Material Frame Indifference) は、物質の構成方程式が座標系の回転や並進運動に対して満足すべき条件である。いま、座標系 (非慣性系)  $\hat{x}_i$  が慣性系  $x_i$  に対して非定常な動きをしているものとする。ただし、 $a_{ij}, b_i$  はそれぞれ座標系の回転と並進を表すが、時間の関数であるとする。

$$\hat{x}_i = a_{ij}x_j + b_i \quad (5)$$

このとき、フレーム不変性とは、任意のテンソル  $\tau_{ij}$  とベクトル  $u_i$  が次のように表されることである。

$$\hat{\tau}_{ij} = a_{ki}a_{lj}\tau_{kl}, \quad \hat{u}_i = a_{ij}u_j \quad (6)$$

レイノルズ応力はフレーム不変性を満足するので、そのモデルもまたフレーム不変性を満足しないとならない。しかし、実質微分や回転テンソルはフレーム不変ではないので、レイノルズ応力の輸送方程式はそのままではフレーム不変性を満たさない。しかし、例えば、テンソル  $\tau_{ij}$  の実質微分は以下のように下線をつけた2項を付加することでフレーム不変な微分にすることができる。

$$\frac{D\tau_{ij}}{Dt} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k}\tau_{kj} - \frac{\partial U_j}{\partial x_k}\tau_{ki} \quad (7)$$

また、非慣性系の慣性系に対する回転角速度  $\Omega_i$  とすると、非慣性系における平均速度勾配テンソル  $\partial U_i/\partial x_j$  は、

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + e_{kji}\Omega_k \quad (e_{kji} : \text{Eddington のイプシロン}) \quad (8)$$

に置き換えることが必要になる。

### (3) Realizability

レイノルズ応力に対するモデルは様々な仮定に基づき導出されるため、算出される解が非物理的なものとなりうる。乱流モデルの構築では高次の相関項を打ち切るため、絶えずつきまとう問題である。ここでは、レイノルズ応力とその非等方テンソルに関する realizability 条件を整理する。

レイノルズ応力の成分は次の Schwarz の不等式を満足することが必要である。

$$\overline{u_\alpha^2} \geq 0 \quad (9)$$

$$\overline{u_\alpha u_\beta}^2 \leq \overline{u_\alpha^2} \cdot \overline{u_\beta^2} \quad (\alpha \neq \beta) \quad (10)$$

$$\det(\overline{u_\alpha u_\beta}) \geq 0 \quad (11)$$

不等式(9)~(11)を保証する条件はそれぞれ次のようである。



$$\frac{\partial \overline{u_\alpha^2}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{u_\alpha^2}}{\partial x_i} = 0 \quad (\overline{u_\alpha^2} = 0 \text{ にて}) \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \overline{u_\alpha u_\beta}^2 - \overline{u_\alpha^2} \cdot \overline{u_\beta^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{u_\alpha u_\beta}^2 - \overline{u_\alpha^2} \cdot \overline{u_\beta^2} \right) = 0 \quad (\overline{u_\alpha u_\beta}^2 = \overline{u_\alpha^2} \cdot \overline{u_\beta^2} \quad \alpha \neq \beta) \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \det(\overline{u_\alpha u_\beta}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \det(\overline{u_\alpha u_\beta}) = 0 \quad (\det(\overline{u_\alpha u_\beta}) = 0) \quad (14)$$

いま、レイノルズ応力の非等方テンソル ( $b_{ij}$ ) を次式で定義する。

$$b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij}}{2k} = \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (15)$$

線形代数によれば、2階のテンソルは座標軸の回転に関して不変な量を3個有する。応力の非等方性テンソルの第1, 2, 3不変量をI, II, IIIと表すと、次のようになる。ただし式(15)より、テンソルのトレースはゼロであるため、第1不変量は恒等的にゼロである。

$$I = b_{ii} = 0 \quad (16)$$

$$II = (b_{ii} b_{jj} - b_{ij} b_{ji}) / 2 = -b_{ij} b_{ji} / 2 \quad (17)$$

$$III = (b_{ii} b_{jj} b_{kk} - 3b_{ii} b_{jk} b_{kj} + 2b_{ij} b_{jk} b_{ki}) / 3! = b_{ij} b_{jk} b_{ki} / 3 \quad (18)$$

Schwarzの不等式(9), (10)を用いると、次の関係が得られる。

$$-\frac{1}{3} \leq b_{\alpha\alpha} \leq \frac{2}{3} \quad (19)$$

$$-\frac{1}{2} \leq b_{\alpha\beta} \leq \frac{1}{2} \quad (20)$$

非等方テンソルは対称テンソルであるため、座標軸の回転により対角化することができる。そのときの対角要素を  $b_{(1)}, b_{(2)}, b_{(3)}$  とすると、それらは全て実数である。対角要素は次の3次方程式の解である。

$$x^3 + IIx - III = 0 \quad (21)$$

この方程式が式(19)の不等式を満足するための条件が図-3の2本の曲線と1本の直線である。この図は Lumley<sup>13)</sup>が提案したもので、Anisotropy Invariant Map と呼ばれている。応力の非等方テンソル、従って、レイノルズ応力が realizability を満足するためには、この図面の3本の曲線で囲まれた領域に位置しなければならないことを示している。

乱れ成分のうち1成分がゼロとなる場合には直線上に位置することになる。したがって、次の関数  $F$  がゼロに近ければ流速の1成分が消失するという特殊な状態に近いことを表す。

$$F = 1 + 9II + 27III \quad (0 \leq F \leq 1) \quad (22)$$

最近の乱流モデルでは不変量を用いた定式化を行うことが常套となっている。また、図-3を用いて応力状態を示すことも行われる。

$$\overline{u_1^2} = \overline{a_1^2} + 2\overline{a_1c_1}y^2 + \dots \quad (28a)$$

$$\overline{u_2^2} = \overline{b_2^2}y^2 + \dots \quad (28b)$$

$$\overline{u_3^2} = \overline{a_3^2} + 2\overline{a_3c_3}y^2 + \dots \quad (28c)$$

$$\overline{u_1u_2} = \overline{a_1b_2}y + (\overline{a_1d_2} + \overline{b_2c_1})y^3 + \dots \quad (28d)$$

$$\overline{u_1u_3} = \overline{a_1a_3} + (\overline{a_1c_3} + \overline{a_3c_1})y^2 + \dots \quad (28e)$$

$$k = \frac{1}{2}(\overline{a_1^2} + \overline{a_3^2}) + \frac{1}{2}(2\overline{a_1c_1} + \overline{b_2^2} + 2\overline{a_3c_3})y^2 + \dots \quad (28f)$$

$$\varepsilon = \left( \overline{a_{1,1}^2} + \overline{a_{1,3}^2} + \overline{b_2^2} + \overline{a_{3,1}^2} + \overline{a_{3,3}^2} \right) + \dots \quad (\text{,は偏微分を示す}) \quad (28g)$$

これらより、次式で示されるレイノルズ応力の輸送方程式の各項の挙動を検討することができる。

$$\frac{D\overline{u_iu_j}}{Dt} = P_{ij} - \varepsilon_{ij} + \Phi_{ij} + \Pi_{ij} + T_{ij} + D_{ij} \quad (29)$$

$$P_{ij} = -\overline{u_iu_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_ju_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \quad \varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}, \quad \Phi_{ij} = \frac{1}{\rho} p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (30a, b, c)$$

$$\Pi_{ij} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{pu_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{pu_j}}{\partial x_i} \right), \quad T_{ij} = -\frac{\partial \overline{u_iu_ju_k}}{\partial x_k}, \quad D_{ij} = \nu \frac{\partial^2 \overline{u_iu_j}}{\partial x_k \partial x_k} \quad (30d, e, f)$$

表-4 にその結果を整理して示す。水面の存在の影響を強く受ける  $\overline{u_2^2}$  についてみると、水面では散逸項  $\varepsilon$  と分子拡散項  $D$  が、また、圧力-歪み相関項  $\Phi$  と圧力拡散項  $\Pi$  とがそれぞれ釣り合うことがわかる。

表-4 水面近傍でのレイノルズ応力の輸送方程式の各項の挙動<sup>14)</sup>

	$\overline{u_1^2}$	$\overline{u_2^2}$	$\overline{u_3^2}$	$\overline{u_1u_2}$
$P_{ij}$	$-4 \overline{a_1b_2} \nu y^2$	0	0	$-2 \overline{b_2^2} \nu y^3$
$\varepsilon_{ij}$	$2 \left( \overline{a_{1,1}^2} + \overline{a_{1,3}^2} \right)$	$2 \overline{b_2^2}$	$2 \left( \overline{a_{3,1}^2} + \overline{a_{3,3}^2} \right)$	$2 \left( \overline{a_{1,1}b_{2,1}} + 2 \overline{b_2c_1} + \overline{a_{1,3}b_{2,3}} \right) y$
$\Phi_{ij}$	$\frac{2 \overline{a_p a_{1,1}}}{+2 \left( \overline{a_p c_{1,1}} + \overline{a_{1,1} c_p} \right) y^2}$	$\frac{2 \overline{a_p b_2}}{+2 \left( 3 \overline{a_p d_2} + \overline{b_2 c_p} \right) y^2}$	$\frac{2 \overline{a_p a_{3,3}}}{+2 \left( \overline{a_p c_{3,3}} + \overline{a_{3,3} c_p} \right) y^2}$	$\frac{2 \left( \overline{a_p c_1} + \overline{a_p b_{2,1}} \right) y}{+3 \overline{a_p d_1} y^2}$ $+ \left( 2 \overline{c_1 c_p} + \overline{c_p b_{2,1}} \right) y^3$
$\Pi_{ij}$	0	$\frac{-2 \overline{a_p b_2}}{-6 \left( \overline{a_p d_2} + \overline{b_2 c_p} \right) y^2}$	0	$\frac{-2 \left( \overline{a_p c_1} + \overline{a_1 c_p} \right) y}{-3 \left( \overline{a_p d_1} + \overline{a_1 d_p} \right) y^2}$
$T_{ij}$	$-\overline{a_1^2} \overline{b_2}$	$-3 \overline{b_2^3} y^2$	$-\overline{a_3^2} \overline{b_2}$	$-2 \overline{a_1 b_2^2} y$
$D_{ij}$	$4 \overline{a_1 c_1}$	$2 \overline{b_2^2}$	$4 \overline{a_3 c_3}$	$6 \left( \overline{a_1 d_2} + \overline{b_2 c_1} \right) y$

#### 4. 乱流モデルの特徴

ここでは個別の乱流モデルを紹介するのではなく、乱流モデルの特徴を明確にするために、応力方程式モデルから、代数応力モデル、さらに、 $k - \varepsilon$  モデルを導出してみる。

応力方程式モデルとして、Launder-Reece-Rodi モデルを取り上げる。ただし、圧力-歪み相関項に対しては一般的な QI (Quasi-Isotropic) モデルではなく、簡便で最もよく使用されてきた IP (Isotropization of Production) モデルを用いる。k のとき、応力方程式モデルは次のように表される。

(4) スカラー方程式の線形性

水質や浮遊砂の濃度、熱等のスカラー量に関する輸送方程式は、スカラー量 ( $c$ ) が passive と見なせる場合には次のように表される。

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \alpha \frac{\partial C}{\partial x_i} - \overline{u_i c} \right) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \frac{D\overline{u_i c}}{Dt} = & -\overline{u_i u_j} \frac{\partial C}{\partial x_j} - \overline{u_j c} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{u_i u_j c}}{\partial x_j} \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \overline{v c} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \alpha u_i \frac{\partial c}{\partial x_j} \right) \\ & - \frac{1}{\rho} c \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\nu + \alpha) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial c}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (24)$$

これら2本の方程式は濃度  $c$  について線形である。そのため、モデルにおいても線形性が保持されることが必要である。

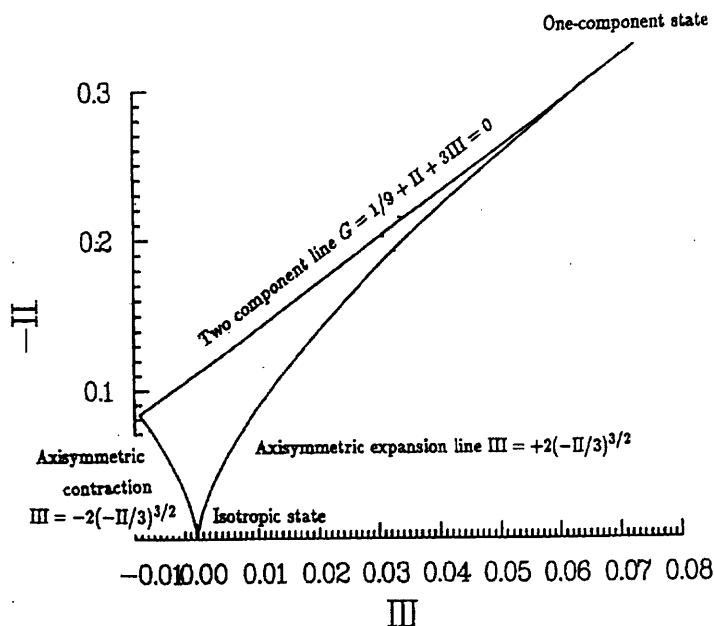


図-3 Anisotropy Invariant Map

(5) 壁面および水面近傍での漸近挙動

壁面や水面を付近に適用できる乱流モデルを取り扱う場合には、未知量の境界近傍での漸近挙動を正しくモデル化することが必要である。

まず、壁面付近の漸近挙動について述べる。壁面上に原点を採り、壁面に垂直に  $y$  軸を設定する。壁面上で滑りなしという条件と  $y$  方向の運動量の式より、速度および圧力が壁面近傍では次のように変化する。

$$u_1 = b_1 y + c_1 y^2 + \dots \quad (25a)$$

$$u_2 = c_2 y^2 + \dots \quad (25b)$$

$$u_3 = b_3 y + c_3 y^2 + \dots \quad (25c)$$

$$p = a_p + c_p y^2 + \dots \quad (25d)$$

したがって、乱流統計量は壁面近傍で次のようになる。

$$\overline{u_1^2} = \overline{b_1^2} y^2 + \dots \quad (26a)$$

$$\overline{u_2^2} = \overline{c_2^2} y^4 + \dots \quad (26b)$$

$$\overline{u_3^2} = \overline{b_3^2} y^2 + \dots \quad (26c)$$

$$\overline{u_1 u_2} = \overline{b_1 c_2} y^3 + \dots \quad (26d)$$

$$\frac{k}{\varepsilon} = \frac{y^2}{2\nu} + \dots \quad (26e)$$

$$\nu_t \propto y^3 \quad (26f)$$

一方、水面が平坦であると仮定すると、壁面と同様に漸近挙動を解析することができる。水面を原点とし、 $y$  軸を水面に垂直に下向きに設定する。

$$u_1 = a_1 + c_1 y^2 + \dots \quad (27a)$$

$$u_2 = b_2 y + d_2 y^3 + \dots \quad (27b)$$

$$u_3 = a_3 + c_3 y^2 + \dots \quad (27c)$$

$$p = a_p + c_p y^2 + \dots \quad (27d)$$

乱流統計量は次のように計算される。

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = D_{ij} - \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - c_1 \varepsilon \left( \frac{\overline{u_i u_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \right) - c_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (31)$$

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ c' \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_m} \right], \quad P_{ij} = \overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}, \quad P = \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (32a, b)$$

なお、上式において  $i = j$  とすると、乱れエネルギー ( $k = \overline{u_i u_i} / 2$ ) の方程式を得る。

$$\frac{Dk}{Dt} = Diff + P - \varepsilon, \quad Diff = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ c' \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial k}{\partial x_m} \right], \quad P = \overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (33)$$

Rodi は、次のような仮定を設けて代数応力方程式を導いた。

$$\frac{\overline{u_i u_j}}{k} \approx \text{constant} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \right) = 0 \quad (34)$$

これを用いて式の変形を行う。以下の下線を施した部分は式(33)よりゼロと近似される。

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \frac{Dk}{Dt} + k \frac{D}{Dt} \left( \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \right) = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \frac{Dk}{Dt} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} D_{ij} &= c' \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( k \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \right) \right] = c' \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{k^2}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \right) \right] + c' \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial k}{\partial x_m} \left( \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \right) \right] \\ &= c' \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial k}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \right) + \left( \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \right) c' \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_m} \frac{\partial k}{\partial x_m} \right] = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} Diff \end{aligned} \quad (36)$$

応力方程式モデルの拡散項は乱れエネルギーの拡散項と直接関係づけられた。式(34)と(35)の辺々を引き、式(31)を用いる。

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} - D_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \frac{Dk}{Dt} - \frac{\overline{u_i u_j}}{k} Diff = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \left( \frac{Dk}{Dt} - Diff \right) = \frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P - \varepsilon) \quad (37)$$

$$\frac{D\overline{u_i u_j}}{Dt} - D_{ij} = P_{ij} - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} - c_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - c_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \quad (38)$$

$$\therefore \frac{\overline{u_i u_j}}{k} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} + \frac{1 - c_2}{\varepsilon - (1 - c_1) k} \cdot \frac{k}{\varepsilon} \cdot \left( P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) \quad (39)$$

式(39)の右辺、左辺はレイノルズ応力を含むが、微分方程式ではないので容易に解くことができる。乱流構造を仮定しているため、応力方程式モデルの機能を限定したモデルになっている。実際、次の述べる  $k - \varepsilon$  モデルと比較して、解が求められる場合には改善された結果を出すことが多い。また、計算量も対して増加せず、実用的なモデルとなっている。代数応力モデルを用いた開水路乱流の解析事例は河原<sup>15)</sup>に示されている。最近、代数応力モデルと同様な性質を有する非線形  $k - \varepsilon$  モデルの方が利用される傾向にあるが、非線形  $k - \varepsilon$  モデルは水面の乱流場に及ぼす影響を表現することにまだ成功しておらず、今後の課題となっている。

式(39)に、乱れエネルギーの局所平衡 ( $P = \varepsilon$ ) と次の近似式を代入する。

$$\left( P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij} \right) = -ck \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (40)$$

この近似は非対角成分については妥当なものである。それらより、代数応力モデルは次のようになる。

$$\frac{\overline{u_i u_j}}{k} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (41)$$

$$c_{\mu} = \frac{\zeta(1-c_2)}{c_1} \quad (4b)$$

この表現は正しく標準の  $k-\varepsilon$  モデルと同形である。また、モデル定数値と実験値  $c_1 = 1.8$ ,  $c_2 = 0.6$ ,  $\zeta = 0.4$  を代入すると、 $c_{\mu} = 0.0889$  となり、標準  $k-\varepsilon$  モデルの  $c_{\mu} = 0.09$  に近い。

導出過程から知られるように、 $k-\varepsilon$  モデルは乱れが局所平衡に近い場合への適用性がよく、垂直応力の精度は高くないことが推測される。

## 5. 河川工学への乱流モデルの適用

適用事例を河道内の流れに限り、いくつかの解析事例を紹介する。

### 5. 1 複断面蛇行水路の3次元解析

Jayaratne<sup>16)</sup> は複断面蛇行水路（波長 2.7m, 河川幅 80cm, 低水路幅 30cm, 高水敷高さ 5cm, 低水路中央線の曲率半径 1.3m, 低水路の法線と堤防の法線との間に  $30^\circ$  の位相差, 滑面, 固定床, 河床勾配 1/1,000）において実験を行うとともに、標準  $k-\varepsilon$  モデルを用いて流れの3次元解析を行った。

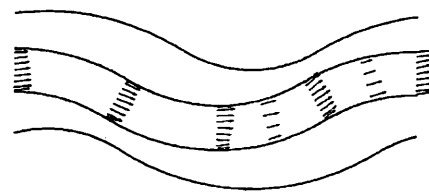
図-4に高水敷上の水深が小さい場合（高水敷上の平均水深 1.2cm）について、低水路河床から 1cm での結果と高水敷上 5cm での流速分布を比較している。実験では高水敷上に逆流域が形成されているが、高レイノルズ数流れを対象とした標準  $k-\varepsilon$  モデルでは、それを再現することはできていない。低水路底面付近の流れについては良好な結果を算出している。

図-5は高水敷上の平均水深が 5.1cm と深い場合である。低水路底面から 3cm の高さの流速は再現できている。しかし、この水路では水深が大きくなっても高水敷上に逆流域が認められるが、逆流域の位置や広がりには水深の増加とともに変化している。計算では再循環領域を予測せず、全幅にわたって洪水を流す結果を算出している。乱流モデルの変更と計算に用いた格子点数の増加を試みる必要がある。

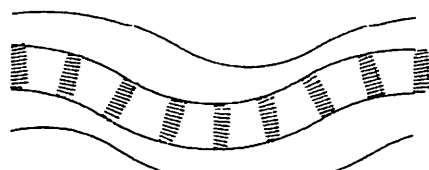
Jayaratne<sup>16)</sup> は、固定床ではあるが、堤防法線と低水路の法線との位相差を系統的に変化させ、流速分布と底面剪断応力分布を比較している。



(a) 水路の概要



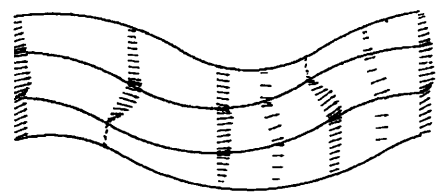
Experimental results



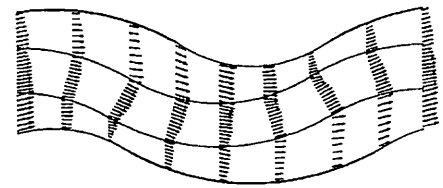
Numerical results

(b) 低水路底面付近

(低水路底面から 1.0cm 高さ)



Experimental results

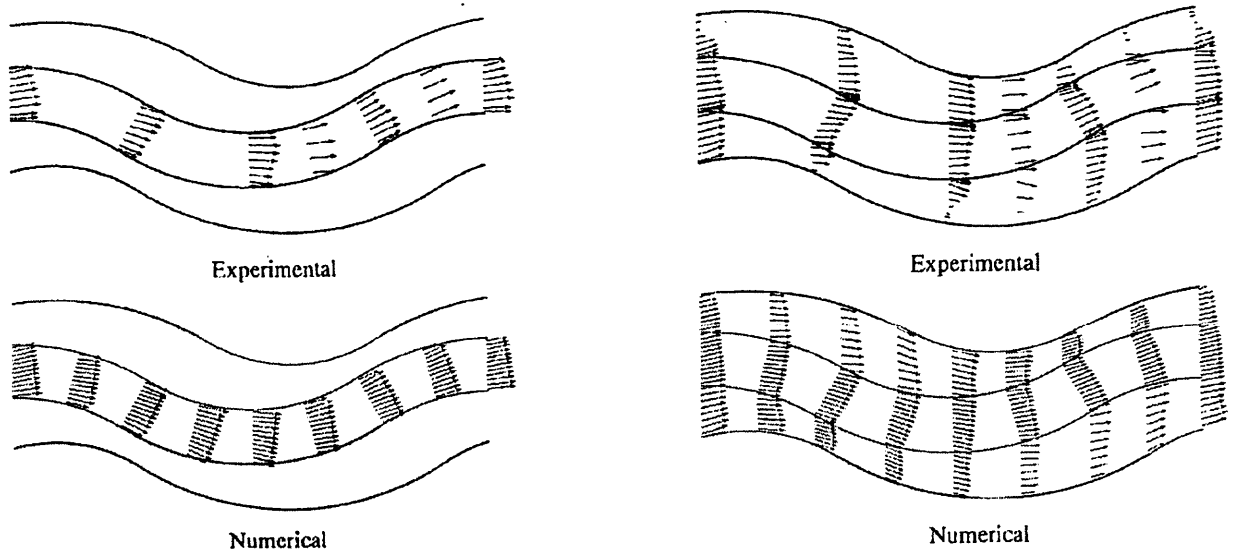


Numerical results

(c) 高水敷底面付近

(低水路底面から 5.5cm 高さ)

図-4 流速の平面分布（高水敷上の水深が 1.2cm の場合）



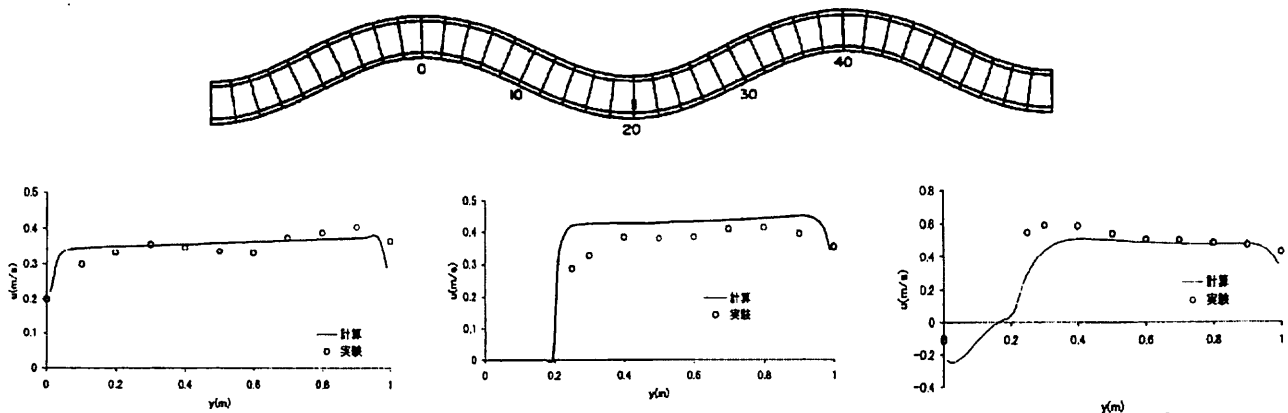
(a) 低水路底面付近 (低水路底面から 3.0cm 高さ) (b) 高水敷底面付近 (低水路底面から 9.0cm 高さ)  
 図-5 流速の平面分布 (高水敷上の水深が 5.1cm の場合)

### 5. 2 水制周辺の流れの3次元解析

水制工は洪水流による河岸の浸食を防いだり、舟運がある場合には水位を確保するためなどに利用されてきた。最近、安定した淵をつくり出し、魚類などの生息環境の改善にも有効であることから見直されている。

藤井<sup>17)</sup>は直線水路や蛇行水路に不透水水制を設置した場合の流れの解析と実験結果との比較を行った。使用された乱流モデルは標準  $k-\epsilon$  モデルである。図-6は中津川・清水<sup>18)</sup>の蛇行水路中に設置された非越流型水制の観測結果と計算結果とを比較したものである。水制は断面番号 20 の位置に設置されている。計算結果は良好に流速分布を再現している。

水深が増加し越流型の水制工となった場合について、水制の底面付近、水制下流の右岸付近、水制工付近の横断面内の流速分布を示したものが図-7である。鉛直方向の流速は見やすくするために 10 倍に拡大してある。水制工背面に回り込む流れが捉えられている。水制工の直下流では右岸沿いに上昇流が形成されている。そのことは水制工の下流側から上流側を見た図(d)で明瞭である。水制工の先端部の水面付近から潜り込み、右岸に沿ってわき上がる流れが生じている。このような流れにより、本川の速い流速が直接右岸にぶつからないようにしている。

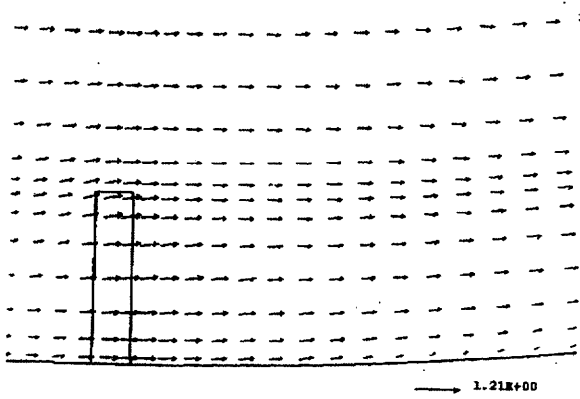


(a) 断面番号 No.10

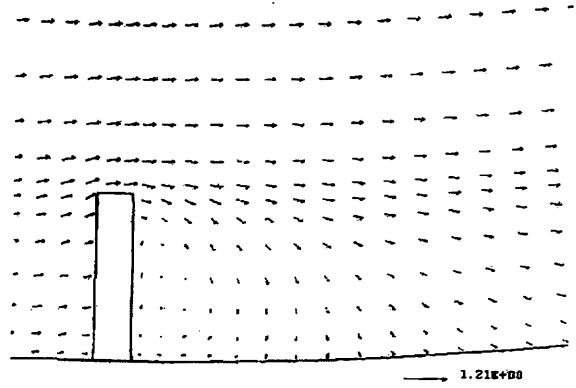
(a) 断面番号 No.20

(a) 断面番号 No.21

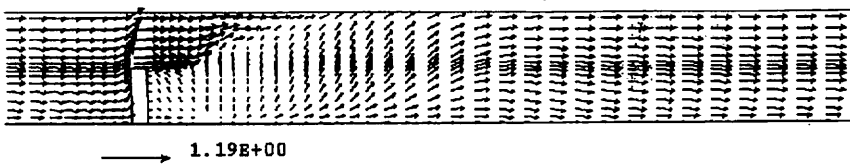
図-6 非越流型水制周りの流速分布の比較



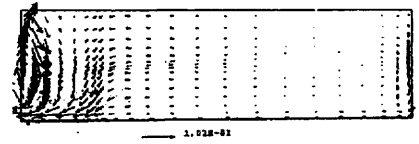
(a) 水面付近の流速ベクトル



(b) 底面付近の流速ベクトル



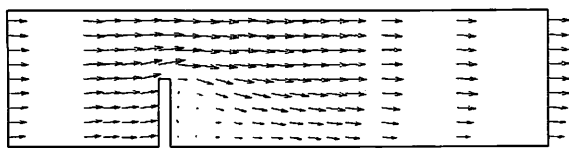
(c) 右岸沿いの流速ベクトル



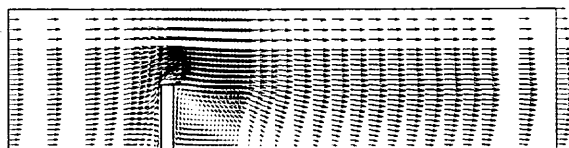
(d) 横断面内の流速ベクトル  
(断面番号 21)

図-7 越流型水制付近の流速分布

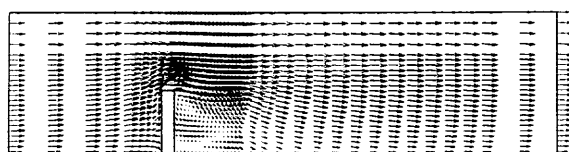
Peng ら<sup>19)</sup>は、越流型の水制工周辺の流れを対象に様々な乱流モデルの性能比較を行った。比較の対象にしたモデルは、標準  $k-\varepsilon$  モデル、改良型線形  $k-\varepsilon$  モデルである Speziale-Thangam の RNG モデル、Launder-Kato モデル、Zhu-Shih モデル、および Shih らによる非線形  $k-\varepsilon$  モデルである。富永-千葉<sup>20)</sup>が行った実験結果と



(a) Experiment.

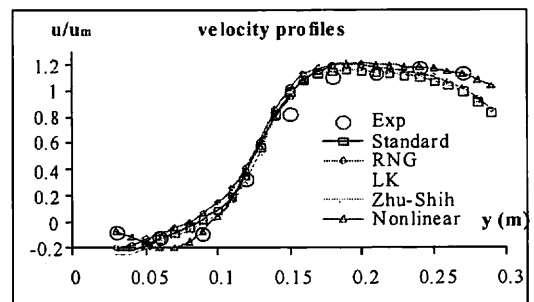


(b) Zhu-Shih model.

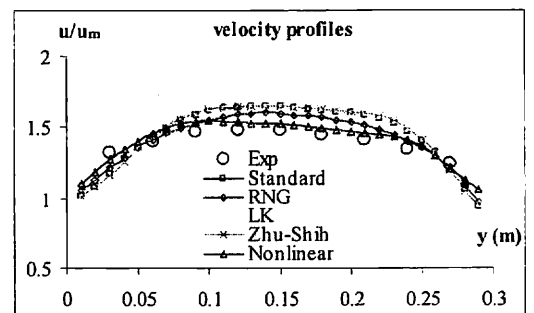


(c) Nonlinear model.

図-8 水平面内での流速分布  
(河床から 2cm 高さ)



(a) At  $x=4.1\text{m}$ ,  $z=1.0\text{cm}$ .



(b) At  $x=4.0\text{m}$ ,  $z=7.0\text{cm}$ .

図-9 乱流モデルの比較  
(平均流速分布)

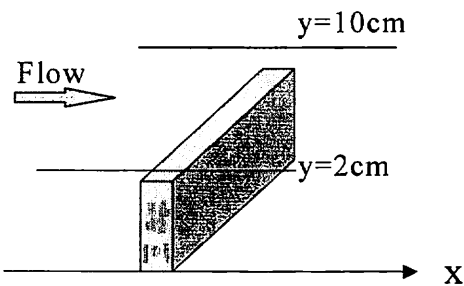
各モデルの計算結果との比較を行った。図-8では、線形 $k-\varepsilon$ モデルの中で最も良好な結果を示したZhu-Shihモデルと非線形 $k-\varepsilon$ モデルについて、底面付近の流速ベクトル図を比較している、実験では循環領域の下流方向の広がり約 $0.7L_g$  ( $L_g$ :水制の川幅方向の長さ)、Zhu-Shihモデルでは約 $1.0L_g$ 、非線形モデルでは $0.8L_g$ と、線形モデルは過大に評価する傾向がある、図-9では水制背後の底面付近と水面付近において主流の流速分布を比較している。これらから、非線形 $k-\varepsilon$ モデルが最も再現性が高いと判断される。水制群を有する河道の流れの解析においても、非線形 $k-\varepsilon$ モデルが最も良い結果を出した。

Pengら<sup>21)</sup>は、Zhu-Shihらの線形 $k-\varepsilon$ モデルを用いた解析コードに水面の変動を追跡する機能と掃流砂を考慮した河床変動計算機能を付加して、水制周辺での局所洗掘を解析した。図-10では水深分布の比較を行っている。水制の付け根部分で水面が盛り上がるがよくわかる。水面の変化もほぼ実験値を捉えている。

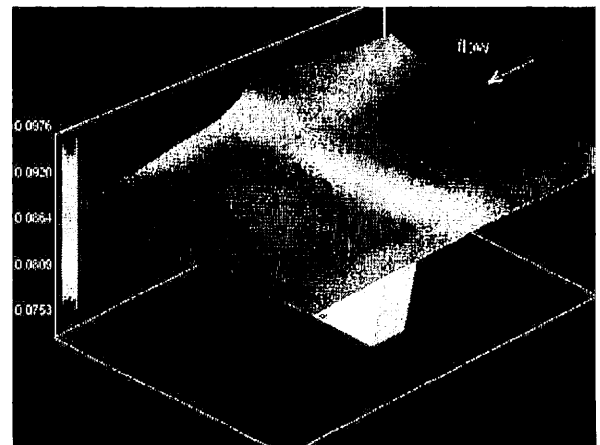
図-11には大本らの局所洗掘に関する実験データ<sup>22)</sup>との比較を行っている。河床変動の特徴も良好に捉えている。

### 5.3 複断面開水路乱流のLES

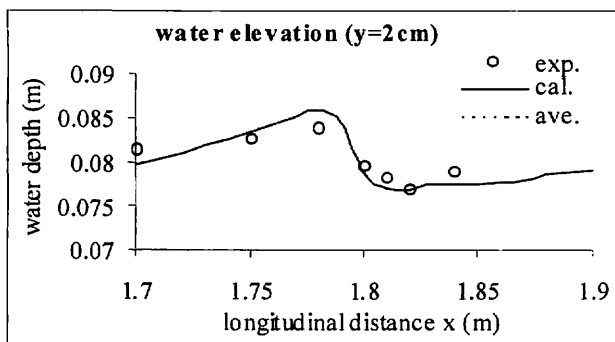
佐藤ら<sup>23)</sup>はSmagorinskyモデルを用いて、片側のみに高水敷を有する複断面開水路乱流の解析を行っている。図-12, 13に実験結果と計算結果との比較を示す。LESにより平均流速やレイノルズ応力の分布を比較したところ、計算結果は実験の特徴をほぼ再現するが、まだ改善すべき点もあることが確認された。



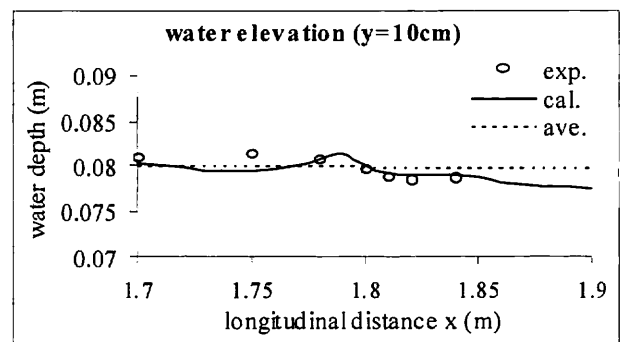
(a) 比較地点



(b) 水面形の鳥瞰図



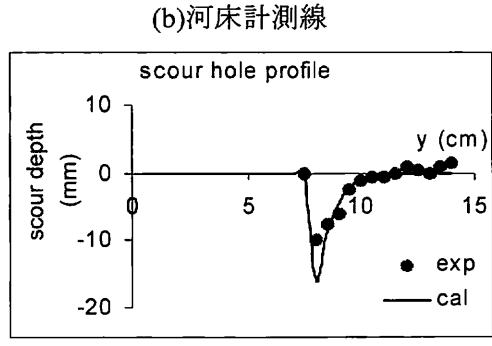
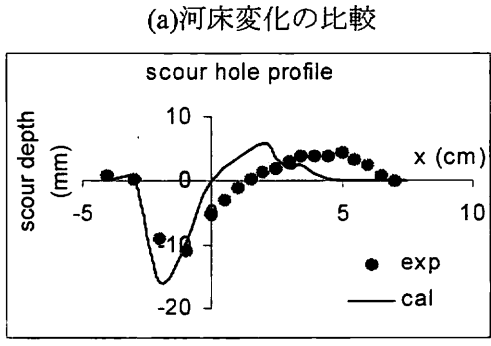
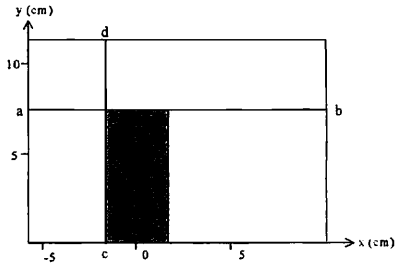
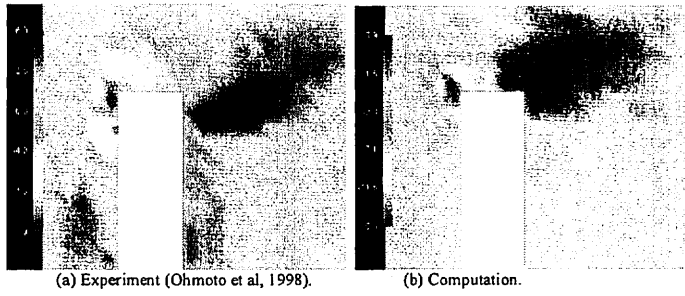
(c) 水面形の縦断変化の比較 (側壁付近)



(d) 水面形の縦断変化の比較 (水制先端)

図-10 越流型水制周辺の水深分布の比較





(a)Along ab

(b)Along cd

図-1 1 水制周辺での局所洗掘の比較

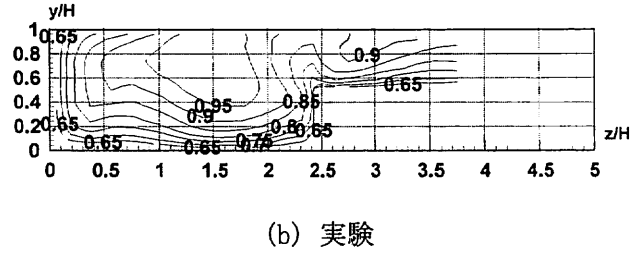
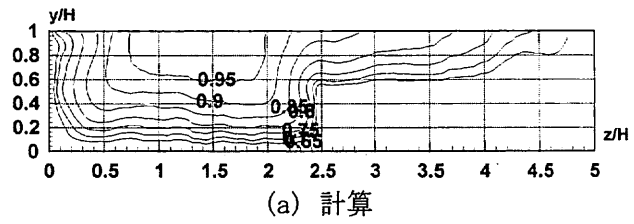


図-1 2 主流速の比較 ( $U/U_{max}$ )

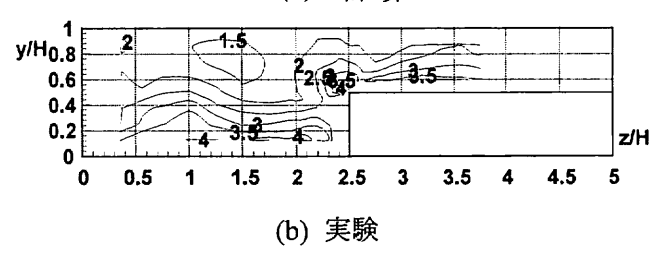
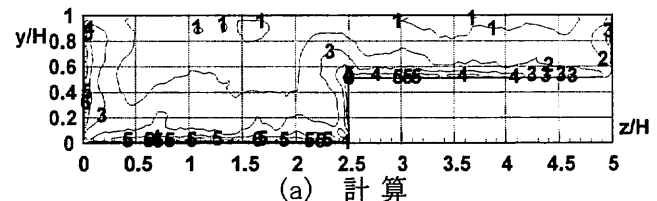


図-1 3 乱流エネルギーの比較  $k/U^2$ .

## 6. まとめと今後の課題

乱流モデルの開発の経緯と今後開発・改良を進める上で留意すべき事項を整理して述べた。乱流モデルは機械工学の分野で実用問題に対応するために精緻化されてきたが、水工学が必要とする情報が十分に整備されているわけではない。乱流モデルの応用例として、著者の周辺の研究成果を紹介したが、水工学論文集や応用力学論文集には新しい試みやさらに進んだ報告もなされている。是非自分で試みていただきたいと思う。

最後に、乱流モデルに関して個人的に抱いている問題点を列挙すると次のようになる。

- ・ 粗度の効果を直接的に表現するモデル
- ・ 植生の効果をより正確に評価できるモデル
- ・ 良質のデータベースの整備 (実験と LES)
- ・ 自由水面の効果を評価できるモデル

- ・ 境界からの距離を陽に用いていない乱流モデル
- ・ 乱流モデルの適用対象の拡大（流れ場のみでなく熱や物質輸送をも対象とする）

## 引用文献

- 1) Rodi, W. : Turbulence Models and Their Application in Hydraulics, A State of The Art Review, IAHR, Delft, 1980.
- 2) Chen, C-J and Jaw, S-Y. : Fundamentals of Turbulence Modeling, Taylor & Francis, 1998.
- 3) 数値流体力学編集委員会編：乱流解析，数値流体力学シリーズ 3，東京大学出版会，1995.
- 4) 木田重雄，柳瀬眞一郎：乱流力学，朝倉書店，1999.
- 5) 大宮司久明，三宅裕，吉澤徹（編）：乱流の数値流体力学—モデルと計算法，東京大学出版会，1998.
- 6) Patanakar, S.V. 原著，水谷幸夫，香月正司訳：コンピュータによる熱移動と流れの数値解析，森北出版，1985.
- 7) 荒川忠一：数値流体力学，東京大学出版会，1994.
- 8) 藤井孝蔵：流体力学の数値計算法，東京大学出版会，1994.
- 9) 河村 洋，土方邦夫編著：熱と流れのシミュレーション，丸善，1995.
- 10) Shih, T-S., Zhu, J. and Lumley, J. L. : A new Reynolds stress algebraic equation model, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, Vol.125, 287-302, 1995.
- 11) Hanjalic, K., Launder, B. E. and Schiestel, R. : Multiple-time-scale concepts in turbulent transport modeling, Turbulent Shear Flows 2, 36-49, Springer, 1979.
- 12) 長野靖尚，近藤真英，田川正人：多重スケール乱流モデルによる壁乱流と自由乱流の解析，日本機械学会論文集 B 編，60 巻，572 号，1184-1195，1994.
- 13) Lumley, J. L. : Computational modeling of turbulent flows, Adv. Appl. Mech., Vol.18, 123-176, 1978.
- 14) 河原能久：開水路乱流に対する応力方程式モデルの比較，第 26 回乱流シンポジウム講演論文集，208-211，1994.
- 15) 河原能久：代数応力モデルによる開水路乱流場の解析，第 28 回水工学に関する夏期研修会，土木学会水理委員会，A-1, 1-16, 1992.
- 16) Jayaratne, B. L. : Three-dimensional flow structure in straight and meandering channels nad planning of desirable river configurations, Ph.D. thesis submitted to University of Tokyo, 1998.
- 17) 藤井和之：越流型水制に対する  $k - \varepsilon$  モデルによる流れの 3 次元特性の分析，東京大学修士論文，1999.
- 18) 中津川誠，清水康行：水制工に関する基礎的研究，第 38 回北海道開発局技術研究発表会，423-428，1994.
- 19) Peng, J., Kawahara, Y. and Huang, G. : Evaluation of modified  $k - \varepsilon$  models in simulating 3d flows over submerged spur dikes, Proc. 1<sup>st</sup> Symp. on Turbulent Shear Flow Phenomena, 1173-1178, 1999.
- 20) 富永晃宏，千葉茂樹：越流型水制周辺の流れの構造，日本流体力学会年会講演会，317-318，1996.
- 21) Peng, J., Tamai, N. and Kawahara, Y. : Numerical modeling of local scour with spur dikes, Proc. 28th IAHR Congress, B110-B115, 1999.
- 22) 大本照憲，平川隆一，井手賢正：越流型水制群に対する二次流と流砂の応答，水工学論文集，1003-1008，1998.
- 23) 佐藤弘行，河原能久，玉井信行：Smagorinsky モデルによる複断面直線開水路乱流の解析，土木学会論文集，No.628/II-48, 115-130, 1999.