

乱流輸送モデルによる長方形管路流れの三次元解析 Turbulence Model Analysis of Three Dimensional Flow in a Rectangular Duct

長岡技術科学大学 建設系 正 員 早 川 典 生
長岡技術科学大学 大学院 学生員 坂 田 昇
長岡技術科学大学 建設系 正 員 河 原 能 久
長岡技術科学大学 建設系 正 員 中 村 由 行

1. 序 論

河川流は言及に及ばず、断面形状の一樣な管路流でさえ、その流れは三次元的である。乱流流れの三次元的特性は、流速分布、二次流分布を決定し、抵抗係数や物質の輸送に大きな影響を及ぼす。しかしながら、三次元乱流解析は非常に困難であるために、最近まで二次元流れの解析しか行われていなかった。近年、乱流流れを支配するレイノルズ応力をモデル化して、平均流を支配する偏微分方程式を直接数値解析する試みが盛に行われている¹⁾。

本研究で対象とする管路流れについては、Launder-Ying²⁾、Gessner-Emery³⁾、中山-Chow⁴⁾により代数的応力方程式モデルを用いた正方形管路流れの三次元乱流解析結果が報告されている。本研究では、長方形断面管路流れについて三次元的に数値解析を行い、主流速度分布および二次流の三次元的挙動を追跡するとともに、抵抗則に検討を加えることを目的とする。

2. 解析対象と計算条件

図-1に示すように、管路入口から一様流速の流体が流入する場合の長方形管路流れについて助走区間から十分発達した領域までの平均流および二次流の三次元的挙動を追跡した。

計算は、(1) $Re = U_0 D_h / \nu$ の影響、(2) 断面形状の影響および(3) 壁面粗さの影響を検討するため、それぞれ次に示す条件で行った。

- (1) 正方形滑面管路流れで、 $Re = 25000, 42000, 56000$ および 250000 についての計算。
- (2) $Re = 25000, 42000$ で、それぞれ形状比 $B/H = 2, 3, 5$ についての計算。
- (3) $Re = 25000, 42000$ で、それぞれ相対粗度 $k_d/D_h = 0.0015, 0.0020, 0.0025$ についての計算。

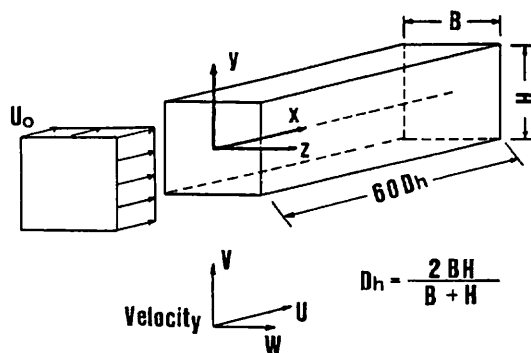


図-1 解析対象

3. 乱流モデル

(1) 基礎方程式

基礎方程式は、連続式およびレイノルズ方程式の4式からなる。本研究では、流れが近似的に流下方向に放物形であると仮定して、 x についての2階以上の微分については無視した。

連続式 ;

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

レイノルズ方程式 :

$$\frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial y} - \overline{uv} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial z} - \overline{uw} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial VW}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial V}{\partial y} - \overline{v^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial V}{\partial z} - \overline{vw} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial UW}{\partial x} + \frac{\partial VW}{\partial y} + \frac{\partial W^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial W}{\partial y} - \overline{vw} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial W}{\partial z} - \overline{w^2} \right) \quad (4)$$

ここで、上式の座標 x, y, z および速度成分 U, V, W は、後述のデカルトテンソル $X_i, U_i (i=1,2,3)$ に対応しているとする。— はアンサンブル平均、 $\hat{}$ は断面平均である。

(1)~(4)の連立方程式は、未知量であるレイノルズ応力 $-\overline{u_i u_j}$ を含むために閉じていない。そこで、 $-\overline{u_i u_j}$ を勾配拡散型でモデル化すると次式となる。

$$-\overline{u_i u_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5)$$

ここで、 ν_t は、渦動粘性係数であり、(5)の第二式において乱れエネルギー k および逸散率 ε によりモデル化 ($k-\varepsilon$ モデル) される。 k -方程式および ε -方程式は、次式のように示される。

k -方程式

$$\frac{\partial k U}{\partial x} + \frac{\partial k V}{\partial y} + \frac{\partial k W}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + P - \varepsilon \quad (6)$$

ε -方程式

$$\frac{\partial \varepsilon U}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon V}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon W}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} P - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (7)$$

$$P = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (8)$$

(2) レイノルズ応力のモデル化

$k-\varepsilon$ モデルは、式(5)に示すように渦動粘性係数を等方的に評価しているため、このモデルでは、十分発達した非円管路流れに生じる二次流を再現できない。そこで、この点を解決するために Launder-Ying (L-Y) により考案され、Gessner-Emery によって三次元空間に適用できるように拡張された代数的応力方程式モデルを用いた。このモデルは、渦動粘性係数を非等方的に与えるものであり、このことにより発達領域で二次流を再現することができる。各応力成分は次式となる。

$$\begin{aligned} -\overline{uv} &= \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right), & -\overline{uw} &= \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\ -\overline{v^2} &= C' C_\mu \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_k' k, & -\overline{vw} &= C' C_\mu \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \\ -\overline{w^2} &= C' C_\mu \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - C_k' k \end{aligned} \quad (9)$$

本研究において用いられた経験定数は L-Y に基づくもので表-1 のとおりである。

表-1 経験定数

C_μ	C_k'	C'	C_1	C_2	σ_k	σ_ε
0.09	0.552	0.0185	1.44	1.92	0.9	1.3

4. 数値計算法

計算法については、Patankar-Spalding (P-S)⁵⁾により層流について開発された放物形流れとして計算する三次元数値解析法を用い、それを乱流計算に適用できるように拡張した。数値計算において留意した点は次のとおりである。

(1) 格子間隔について

計算は、管路の1/4断面(図-1の第2象限)について行い、等間隔格子点配列を有する断面を主流方向に $60D_h$ まで設けた。境界条件については、乱流計算でしばしば利用される“Wall function”法⁶⁾により与えた。そのため、壁最近傍の格子点が粘性の影響を無視できる乱流領域に位置するように格子点数を定めた。例えば、正方形管路での格子点数は、 $Re=25000$ のとき 9×9 、 $Re=42000$ および $Re=56000$ のとき 12×12 、 $Re=250000$ のとき 18×18 とした。断面間距離 D_x については、経験的に $D_x \cdot U_0 / \nu = 50 \sim 100$ の範囲内にあるように D_x を定めた。

(2) 入口近傍での計算の安定性について

初期断面とその次の断面(第2断面)の間で計算を行う際、まず第2断面には前断面即ち初期断面の値を代入して計算を始める。このとき、第2断面の対数則で与えられた境界値と仮の代入値の間に大きな差があるため、しばしば計算が発散してしまう。そこで、本計算では対数則による境界値を直接与えず、まず仮の代入値に近い値を境界に与え、収束計算を行う。収束した値を用いて境界値を対数則による値にさらに近づけて再び収束計算を行う。この操作を繰り返し、真の境界値で収束させる。

(3) P-S法の改良点について

P-S法が微小要素の数値積分に台形公式を用いるのに対し、本計算においてはより正解な積分を期するためにシンプソンの3/8公式を用いた。

5. 数値計算結果

(1) 実験結果との比較

L-Yモデルによる三次元数値計算の信頼性を確かめるためMelling-Whitelaw (M-W)⁷⁾の実験による測定値との比較および検討を行った。M-Wの実験は、正方形滑面管路助走区間流れについて水を用いて $Re=42000$ で行われ、測定はレーザー流速計を用いて助走区間の $x/D_h=5.6$ および 36.8 の2断面について詳細に行われている。

図-2(a)~(c)に $x/D_h=5.6$ における諸量の等値線図が示されている。主流等速度線図2(a)で実験値(Exp.)と計算値(Cal.)との間に非常に良い一致が認められた。二次流の分布については図に示していないが、計算値は境界層発達過程に特有な二次流の速度ベクトルが中心部に向かう傾向が認められる。図-2(b)に示す主流に抗するレイノルズ応力 $-\overline{uv}$ は計算値が実験値の傾向をとらえている。

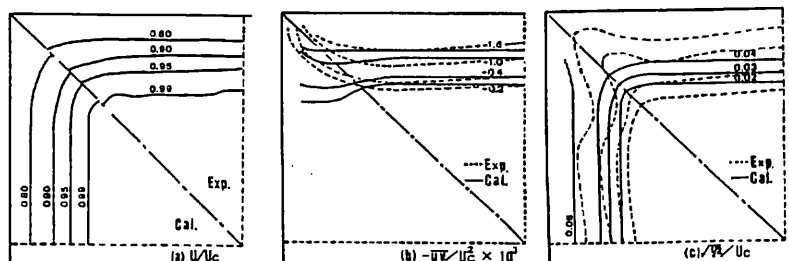


図-2 $x = 5.6 D_h$ における等値線

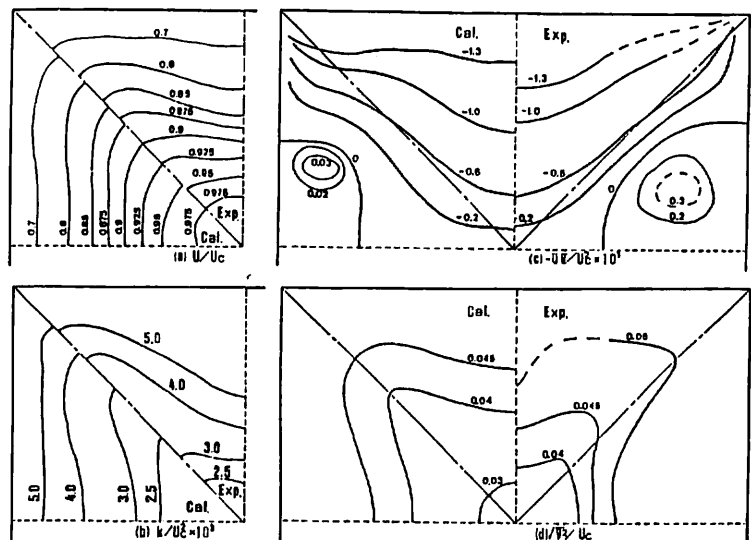


図-2(c)に示すy方向乱れ強さ $\sqrt{v^2}$ ($=\pi/2$ 回転した位置におけるx方向乱れ強さ $\sqrt{w^2}$)は、実験値が非対称であるのに対し、計算値は、ほぼ対称となっている。

図-3(a)~(e)に $x/D_h=36.8$ における諸量の等値線図が示されている。図-3(a)と(b)より、主流速度および乱れエネルギーの計算値の方が実験値よりも分布形

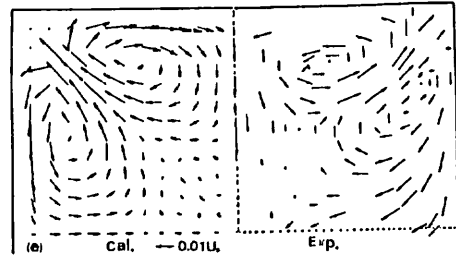


図-3 $x=36.8D_h$ における等値線および二次流分布

においてややわん曲が小さくなっていることが認められるものの、その分布はほぼ一致している。 $-\overline{uv}$ (図-3(c))については、発達した流れに特有な異符号領域の存在を再現することができた。二次流の生成に重要なy方向乱れ強さ $\sqrt{v^2}$ (図-3(d))の計算値は、実験値のような強い非対称性をもつ分布には、ならなかった。しかし、二次流分布 (図-3(e))については計算値と実験値との間に極めて良好な一致が認められた。又、本計算結果は、中山-ChowのL-Yモデルによる楕円形計算結果とほぼ一致していることが認められた。

(2) レイノルズ数の影響

Re数の影響をみるために正方形滑面管路流れで、 $Re=25000, 42000, 56000, 250000$ の4ケースについて計算を行った。図-4および図-5は、それぞれ断面中心点の主流速度および乱れエネルギーのx方向への発達過程を示している。図-4で、○印は、 $Re=42000$ でのM-Wによる実験値であり、良好な一致が認められる。図-4より、 Re 数が大きくなるに従って平均流速 U_0 で無次元化された中心流速 U_c のピーク値が下がり、その位置が下流に移っているのが認められる。図-5で乱れエネルギーが急増する地点がある。これはこの地点で壁からの乱流境界層が中心部で合流するためであると思われ、この地点から中心流速は降下していき、 $x/D_h=60$ 付近で一定となる。断面内の分布は図には示していないが、主流速度分布については隅角部付近の流速が Re 数が大きくなるに従って大きくなる傾向にある。また、二次流の大きさについても Re 数とともに大きくなる。

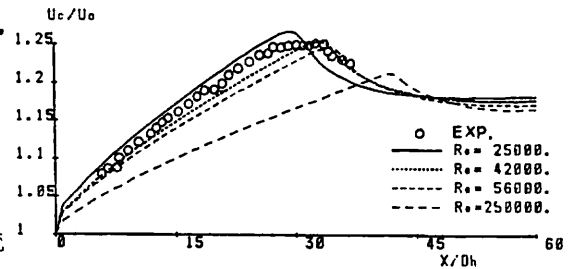


図-4 主流速度の発達過程

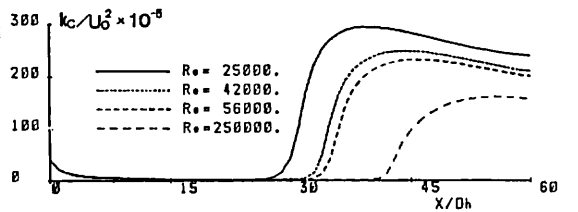


図-5 乱れエネルギーの発達過程

(3) 長方形断面の形状比の影響

形状比の影響をみるために滑面管路、 $Re=42000$ で、形状比 $B/H=1, 2, 3, 5$ の4ケースについて計算を行った。中心流速の発達過程図-6より、形状比が大きくなるに従って入口断面から近いところでピークを迎えていることが認められる。また、図-7より、乱れエネルギーについても同じ傾向がみられる。これは、形状比が大きくなるに従って長辺側の壁から中心までの距離が短くなり、そのため乱流境界層の合流地点が早められるためであると考えられる。図-7において $B/H=2$ および3の場合、 $B/H=1$ とは異なり、第2のピークの存在が伺える。その傾向は $B/H=5$ についてはあまりみられない。また、図-6においても $B/H=3$ の場合にその傾向が顕著に現れている。その理由の一つとして、短辺側および長辺側の両壁からの境界層が中心点に到達するために要する流下距離が相違

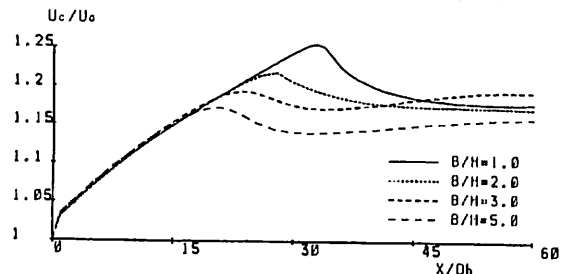


図-6 主流速度の発達過程

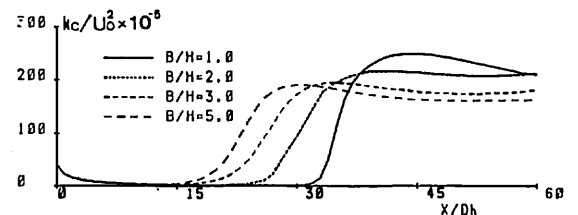


図-7 乱れエネルギーの発達過程

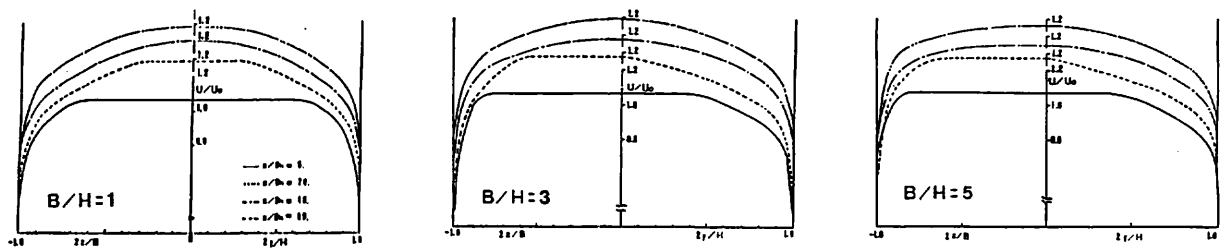


図-8 中心軸上の流速分布の発達

するためと考えられる。図-8は、図-1のy軸上およびz軸上の流速分布を助走区間から発達領域までの4断面について描いたものである。図より、形状比が大きくなるに従って、y軸上（短辺側）の流速分布の十分発達する領域が入口断面から近いところに現れ、また、z軸上（長辺側）では、遠いところに現れる。

図-9は形状比 $B/H=2, 3$ および 5 における発達領域での二次流を示している。 $B/H=1$ での二次流（図-3(e)）と図-8を比較した場合、2つの渦の間の流れは、 $B/H=1$ のとき左上がり、 $B/H=2$ のとき上向き、 $B/H=3$ のとき右上がりとなり、 $B/H=5$ で1つの渦になっていることがわかる。即ち形状比が大きくなるにつれて、短辺側の渦が小さくなり、 $B/H=5$ では完全に消滅してしまふ。そしてそれに伴い、中央部分での二次流が小さくなり、 $B/H=5$ ではほぼ零になる。このことは、図-10の主流速度分布からも明らかなように $B/H=5$ では管中央部分に長辺方向の影響を受けない二次元的な領域ができていると考えられる。

また、図-10の分布は、形状比、Re数が多少違いもののNikuradseによる長方形管路の実験とよく似た分布となっている。

(4) 壁面粗さの影響

壁面粗さの影響をみるために $Re=42000$ の正方形管路流れて、相対粗度 $kd/Dh=0.015, 0.020$ および 0.025 の3ケースについて計算を行い、滑面計算結果と比較した。図-11および図-12より壁面が粗いほど入口から近いところに乱流境界層の合流点があると考えられる。また、これらの図は壁面粗さが乱れ強さと中心軸流速の増加をもたらすことを示している。この中心軸流速の増加は、壁面粗さが壁面近傍の流速値を減少させる効果があるためであると考えられる。

図-13は、 $kd/Dh=0.025$ の場合の $x/Dh=20.0$ および 36.8 の2断面についての主流速度分布および壁面せん断応力分布を示している。図-11において $x/Dh=20.0$ は、主流速度のピーク

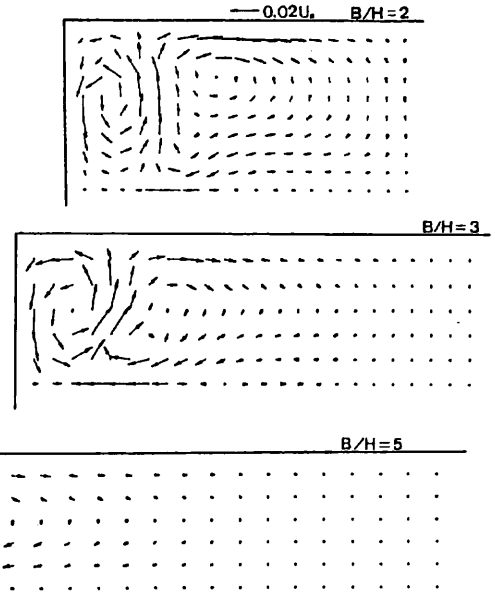


図-9 形状比ごとの二次流分布

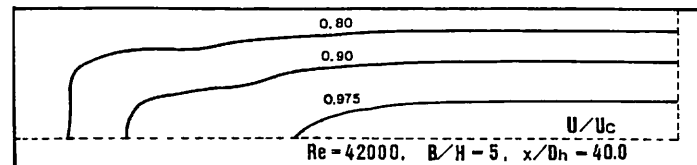


図-10 主流速度分布

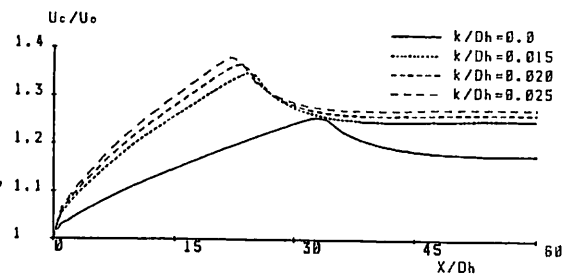


図-11 主流速度の発達過程

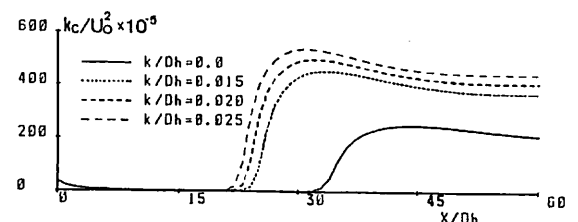


図-12 乱れエネルギーの発達過程

位置であり、 $x/D_h = 36.8$ は主流速度がほぼ一定となる位置である。図-13で $x/D_h = 20.0$ の主流速度分布についてはほとんどわん曲部が認められず、また、壁面せん断応力についても中央部での減少がみられない。それに対して $x/D_h = 36.8$ の主流速度およびせん断応力分布について、それぞれわん曲部および中央部での減少が認められた。この傾向は、滑面管路においてもみられる。

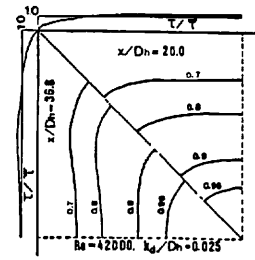


図-13 等流速度線

(5) 抵抗係数

図-14は、断面形状ごとのレイノルズ数と抵抗係数 f の相関を示している。実線はNikuradseおよびSchillerによる測定値によるものである。図より計算結果が測定値と非常によく一致していることが認められる。これにより、本三次元数値計算を拡張すれば、任意断面形の抵抗則を予測することも可能であることを示唆している。

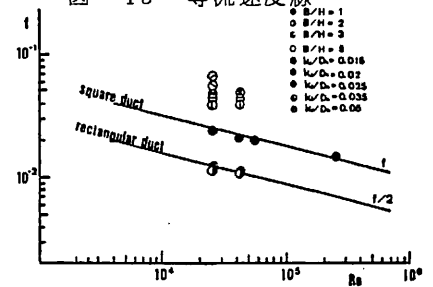


図-14 Re数と抵抗係数の相関

6. 結論

- 1) 正方形滑面管路流れの三次元解析をL-Yモデルを用いて行い、主流速度および二次流分布の計算値とM-Wの実験値との間に良好な一致をみた。またこのことにより、L-Yモデルが少なくとも速度場の発達過程を予測するための十分信頼できる手法であると考えられる。
- 2) 正方形滑面管路流れでは、レイノルズ数が大きくなるに従って主流速度分布のピーク値が下がり、その位置が下流に移ることが計算結果より確認された。
- 3) 断面形状比を変化させ、発達領域での二次流分布を比較すると、形状比が大きくなるにつれ、短辺側の渦が小さくなる。特に、 $B/H=5$ では短辺側の渦が完全に消滅し、長辺側の渦だけとなり、さらに、長辺側の管中央部では、流れが二次元的になった。また、 $B/H=3$ では主流速度の発達過程において第2のピークが現れた。
- 4) 正方形管路流れでは、壁面粗度が大きくなるに従って主流速度分布のピーク値が上がり、その位置が上流に移ることが計算結果より確認された。
- 5) 抵抗則については、正方形管路および長方形管路の計算値がNikuradse-Schillerの実験値と良好な一致をみた。本研究の成果は、任意形状断面形の管路乱流流れの抵抗則、二次流分布を計算で求める手法として発展させることができる。

参考文献

- 1) W. Rodi: Turbulence models and their application in hydraulics, IAHR, 1980
- 2) B. E. Launder, W. M. Ying: Prediction of flow and heat transfer in ducts of square cross-section, Proc. Instn. Mech. Engrs., 1973
- 3) F. B. Gessner, A. F. Emery: 2nd Symp. Turb. Shear Flows, Imperial College, London, 1979
- 4) 中山 顕, W. L. Chow, D. Sharma: 正方形管路助走区間における三次元乱流, 日本機械学会論文集 (B編), 1983
- 5) S. V. Patankar, D. B. Spalding: Int. J. Heat Mass Transfer Vol.15 pp1787-1806, 1972
- 6) B. E. Launder, D. B. Spalding: Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. Vol. 3 pp 269-289, 1974
- 7) A. Melling, J. H. Whitelaw: Turbulent flow in a rectangular duct, J. Fluid Mech., 1976