



数学理解の2軸過程モデルに基づく 授業構成に関する研究

(課題番号：13680306)

平成13年度～平成15年度科学研究費補助金（基盤研究(C)(2)）

研究成果報告書

平成16年3月

研究代表者 コ ヤマ マサ タカ
小 山 正 孝

広島大学大学院教育学研究科助教授)



数学理解の2軸過程モデルに基づく 授業構成に関する研究

(課題番号：13680306)

平成13年度～平成15年度科学研究費補助金（基盤研究(C)(2)）

研究成果報告書



平成16年3月

研究代表者 **小山正孝**
(広島大学大学院教育学研究科助教授)

は し が き

本報告書は、平成13年度～平成15年度の3年間、科学研究費補助金(基盤研究(C)(2) 課題番号13680306 研究代表者 小山正孝)を受けて行った「数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成に関する研究」の研究成果を報告するものである。

(1) 本研究の目的と方法

筆者はこれまでの数学教育における理解過程に関する研究において、5つの階層的水準と3つの学習段階をそれぞれ縦軸と横軸にもつ「2軸過程モデル(Two-Axes Process Model)」を理論的に構築し、このモデルの妥当性と有効性に関する研究を行ってきた。その結果、教師が児童・生徒の数学理解を深化させる授業を構成し実践する際に、2軸過程モデルがその枠組みとして有効に機能し得るということが明らかになった。また、数学教育における構成主義的認識論に立つ2軸過程モデルを他の社会文化主義的認識論や相互作用主義的認識論などによって補完するとともに、算数・数学科の授業で扱う教材に応じて2軸過程モデルをより具体化することの必要性が明らかになった。

そこで、本研究では、これらの課題を解決するために、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法を明らかにすることを目的とする。そのために、まず、構成主義的認識論に立つ数学理解の2軸過程モデルを社会文化主義的認識論や相互作用主義的認識論などによって補完するとともに、算数・数学科のカリキュラム分析や教材研究を行うことによって、2軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法を構築する。そして、この授業構成の原理と方法の妥当性・有効性を、小学校算数科の授業実践及び中・高等学校数学科の授業実践を通して実証的に検討する。それによって、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法を明らかにし、児童・生徒の算数・数学の理解を深化させるためのカリキュラム、教材、指導方法に対する示唆を得る。

(2) 本研究の学術的な特色・独創的な点及び予想される結果と意義

本研究の特色・独創的な点として、次の3点を挙げることができる。

- ①構成主義的認識論に立つ数学理解の2軸過程モデルを、社会文化主義的認識論や相互作用主義的認識論などによって補完すること。
- ②算数・数学科のカリキュラム分析や教材研究を行うことによって、数学理解の2軸過程モデルをより具体化し、授業構成の原理と方法を構築すること。
- ③2軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法の妥当性と有効性を、算数・数学科の授業実践を通して実証的に検討すること。

本研究の予想される結果と意義として、次の2点を挙げることができる。

- ①数学理解の2軸過程モデルに基づいて、児童・生徒の算数・数学の理解を深化させるための授業構成の原理と方法を構築できると期待される。
- ②国内外で行われている数学教育における理解研究の進展に寄与するとともに、算数・数学の教授・学習の質的向上につながると考えられる。

(3) 本研究の位置づけ

本研究は、国際数学教育心理学会 (IGPME) を中心とした数学教育に関する心理学的研究、特に、数学の理解過程に関する研究に位置づくものである。しかしながら、本研究は、心理学的アプローチによるだけでなく、あくまでも数学教育学の視座に立って算数・数学科のカリキュラムや教材の特性を踏まえ、数学教育において有効な数学理解の過程モデルとそれに基づく授業構成の原理と方法を構築することによって、数学教育の研究と実践に寄与しようとするものである。

(4) 本研究の成果と今後の課題

《本研究の主要な成果》

① 数学理解の2軸過程モデルの認識論的補完

文献解釈的・理論的研究として、数学教育学における研究パラダイムを検討することを通して、主として認知心理学的パラダイムを基底とし構成主義的認識論に立つ数学理解の2軸過程モデルを、他の社会文化主義的認識論や相互作用主義的認識論によって補完できることが明らかになった。

② 数学理解の2軸過程モデルの具体化

算数・数学科のカリキュラム分析や教材研究を行うことによって、数学理解の2軸過程モデルの縦軸を成す5つの階層的水準と、横軸を成す3つの学習段階を具体化した。そして、それに基づいて算数科の実験授業を計画・実施することによって、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数科の授業構成の可能性を明らかにした。さらに、発展的な内容の学習指導を行うことが可能であり、それによって児童の数学理解がさらに深化し得ることが示唆された。

③ 数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法の構築

これまで行ってきた理論的研究と実証的研究の成果を踏まえて、児童・生徒の数学理解の深化を促すための、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の3つの原理と3つの方法を提案した。

《本研究の今後の課題》

上述の2軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法の妥当性と有効性は、これまで筆者が行ってきた理論的研究と実証的研究によってある程度例証されている。しかしながら、まだ限られた数の事例研究にとどまっている。今後は、中学校・高等学校における数学学習に関する事例研究の数を増やしてその有効性を実証的に検討することによって、これらの原理や方法が児童・生徒の理解を深化させるための算数・数学科の授業を構成する際に教師にとって有効な視点となるよう、より一層の具体化・精緻化を図りたいと考えている。

本研究を進めるに当たっては、研究協力校の先生方には算数・数学科授業の観察・実施において多大なご協力をいただき、また広島大学大学院教育学研究科院生には授業記録やプロトコル分析で労を惜しまず手助けしていただいた。未筆ながら、お世話になった皆様に心より感謝の意を表したい。

平成 16 年 3 月

研究代表者 小山 正孝
(広島大学大学院教育学研究科助教授)

研究組織

研究代表者： 小 山 正 孝 （広島大学大学院教育学研究科助教授）

研究経費

交付決定額（配分額）

（金額単位：千円）

	直接経費	間接経費	合 計
平成 13 年度	800	0	800
平成 14 年度	800	0	800
平成 15 年度	800	0	800
総 計	2,400	0	2,400

研究発表

(1) 学会誌等

小山正孝，磯部年晃，中原忠男，赤井利行，中村武司，「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅱ）—第2学年における三角形と四角形の内容を中心—」，広島大学学部・附属学校共同研究体制機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第30号，pp.89-98，平成14年（2002年）3月28日。

Masataka Koyama, Research on the Process of Understanding Concepts of Triangle and Quadrilateral in a Classroom, *Proceedings of the 26th PME Conference*, Vol.1, p.284, 2002年7月。

小山正孝，「数と計算・代数の認識に関わる基礎理論の検討」，日本数学教育学会『第35回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録—今後の我が国の数学教育研究—』，第35号，pp.84-88，平成14年（2002年）11月23日～24日。

小山正孝，赤井利行，中原忠男，中村武司，磯部年晃，「算数学習における理解過程に関する研究（Ⅲ）—第5学年における「台形の面積の求め方」を中心—」，広島大学学部・附属学校共同研究体制機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』，第31号，pp.115-122，平成15年（2003年）3月28日。

Masataka Koyama, Research on the Process of Understanding Mathematics: Ways of Measuring Area of Trapezoid, *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA*, Vol.1, p.239, 2003年7月。

小山正孝, 「『計算のきまり』の指導のねらいと内容」, 日本数学教育学会『第 36 回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録—今後の我が国の数学教育研究—』, 第 36 号, pp.106-109, 平成 15 年 (2003 年) 10 月 18 日~19 日.

小山正孝, 磯部年晃, 中原忠男, 赤井利行, 片桐毅, 「算数学習における理解過程に関する研究 (IV) —第 5 学年における「分数と小数, 整数の包摂関係」を中心に—」, 広島大学学部・附属学校共同研究体制機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第 32 号, 平成 16 年 (2004 年) 3 月 28 日. 「発表予定」

(2) 口頭発表

Masataka Koyama, Research on the Process of Understanding Concepts of Triangle and Quadrilateral in a Classroom, The 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, University of East Anglia, Norwich, U.K., 21-26 July, 2002.

小山正孝, 「数と計算・代数の認識に関わる基礎理論の検討」, 日本数学教育学会第 35 回数学教育論文発表会, 鳥取大学, 平成 14 年 (2002 年) 11 月 23 日~24 日.

Masataka Koyama, Research on the Process of Understanding Mathematics: Ways of Measuring Area of Trapezoid, The 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education held jointly with the 25th Conference of PME-NA, Hawaii Convention Center, Honolulu, U.S.A., 13-18 July, 2003.

小山正孝, 「『計算のきまり』の指導のねらいと内容」, 日本数学教育学会第 36 回数学教育論文発表会, 札幌コンベンションセンター, 平成 15 年 (2003 年) 10 月 18 日~19 日.

目 次

はしがき	i
------------	---

研究組織・研究経費・研究発表	iii
----------------------	-----

研究成果

I. 教科教育学研究パラダイムの検討 —数学教育学を事例として—	1
II. 数学理解の2軸過程モデルの理論的再検討	9
III. 数と計算・代数の認識に関わる基礎理論の検討	20
IV. 算数科における「計算のきまり」の指導のねらいと内容	27
V. 算数学習における理解過程に関する研究（II） —第2学年における三角形と四角形の内容を中心に—	33
VI. 算数学習における理解過程に関する研究（III） —第5学年における「台形の面積の求め方」を中心に—	45
VII. 算数学習における理解過程に関する研究（IV） —第5学年における「分数と小数、整数の包摂関係」を中心に—	55
VIII. 数学学習における理解過程に関する研究 —中学校第2学年の授業を事例として—	63
IX. 数学理解の2軸過程モデルに基づく 授業構成の原理と方法の構築	73

研究資料

I. 中学校数学科授業のプロトコル	87
II. 高等学校数学授業のプロトコル	117

研究成果

I. 教科教育学研究パラダイムの検討 —数学教育学を事例として—	1
II. 数学理解の2軸過程モデルの理論的再検討	9
III. 数と計算・代数の認識に関わる基礎理論の検討	20
IV. 算数科における「計算のきまり」の指導のねらいと内容	27
V. 算数学習における理解過程に関する研究 (II) —第2学年における三角形と四角形の内容を中心に—	33
VI. 算数学習における理解過程に関する研究 (III) —第5学年における「台形の面積の求め方」を中心に—	45
VII. 算数学習における理解過程に関する研究 (IV) —第5学年における「分数と小数, 整数の包摂関係」を中心に—	55
VIII. 数学学習における理解過程に関する研究 —中学校第2学年の授業を事例として—	63
IX. 数学理解の2軸過程モデルに基づく 授業構成の原理と方法の構築	73

教科教育学研究パラダイムの検討

—数学教育学を事例として—

小山 正孝

(広島大学大学院教育学研究科)

1. はじめに—目的と方法—

教科教育学という概念のとらえ方には様々なものがある¹⁾が、本稿においては各教科教育学の総称として教科教育学という語を用いる。そして、本稿では、教科教育学の一つの領域である数学教育学を事例とし、教科教育学研究パラダイムの検討に迫ることを目的とする。

数学教育学は次の五つの性格によって特徴づけられる一つの学問である。このような研究対象の特質や二面性・統合性という性格ゆえに、数学教育学の研究には多様な領域と方法がある。²⁾

- 「①数学教育を対象とする学問である。
- ②数学を通しての人間形成を追求する学問である。
- ③規範性と実証性とを有する学問である。
- ④数学教育の理論と実践の統合的研究を行う学問である。
- ⑤数学教育の思想と方法の統合的研究を行う学問である。」³⁾

さらに、数学教育に関する研究は、1969年にフランス・リヨンで開催された第1回数学教育国際会議(ICME1)を契機に、国際的・学際的に展開されてきている。そして近年、国際的な視座から数学教育の研究成果や展望を整理した大部の書物が出版された。^{4), 5)}

そこで、本稿では、主としてこれらの書物を基に、文献解釈的な方法によって、パラダイムと理論及びその選択、数学教育学における研究方法論としての三つの伝統、異なった認識論に基づく四つの研究アプローチについて考察することとする。

2. パラダイムと理論及びその選択

研究一般についてそうであるように、数学教育学研究においても、意味・価値のある探究は、何らかの理論に基づいて行われる。そして、その理論の根底には、意識的にせよ無意識的にせよ、研究者の数学観や数学教育についての価値観や信念のようなものがあると考えられている(図1)。もちろんすべての研究者が全く同じ数学観や数学教育観をもっているわけではないが、研究者集団の中にはいくつかの共通したものがある。このように、ある集団の成員によって共通して持たれる信念、価値、テクニックなどの全体的構成、あるいは、モデルや例題を意味する言葉がパラダイムである。⁶⁾

したがって、数学教育学研究においても異なったパラダイムがあり、それゆえ異なった理論があり得る(図2)。しかも、どの理論がより進歩的であるかを合理的に判断し、選択することが困難であるという問題がある。この「理論の合理的選択」の間

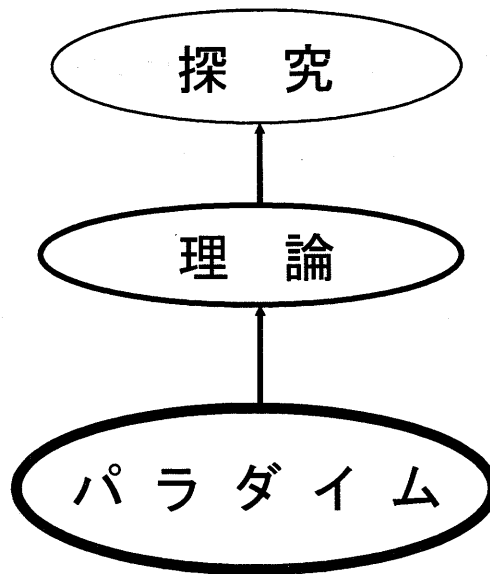


図1

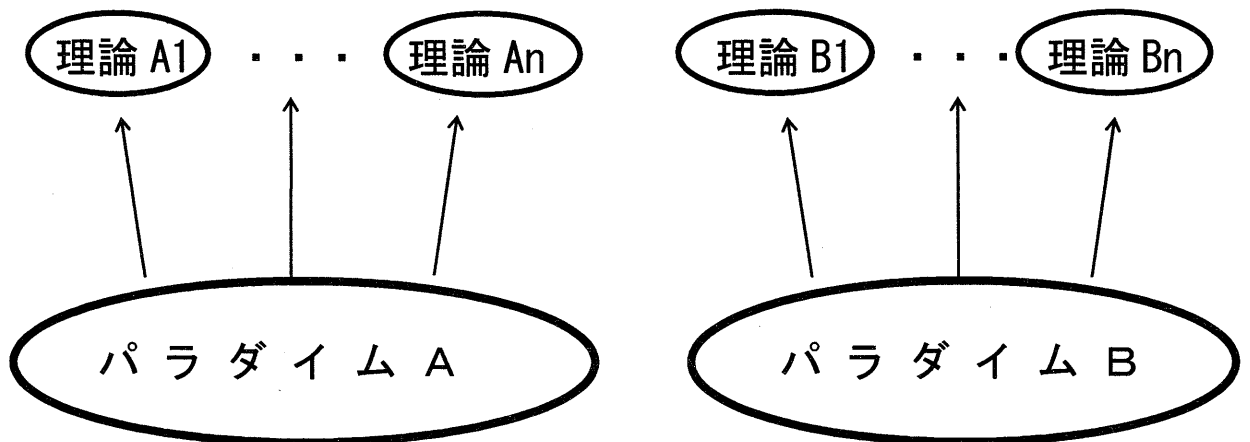


図2

題は科学哲学の主要な問題であり、これについてクーンとラカトシュはそれぞれ以下のような異なった考えを述べている。クーン⁷⁾は、理論を選択する基準そのものがパラダイムの一部であり、異なったパラダイムは通約不可能であるから、異なったパラダイムに基づく理論を合理的に選択することは不可能であると言う。それに対して、ラカトシュ⁸⁾は、異なった理論は異なったパラダイムを表現するものであるかもしれないが、どの理論が進歩的であるかを判断する基準は存在すると言い、次のような基準を示している。

- ①より進歩的な理論は、他の理論が予測できなかったことを予測できること。
- ②それらの予測のいくつかが確証されていること。
- ③より進歩的な理論は、他の理論が説明し得ることをすべて説明で

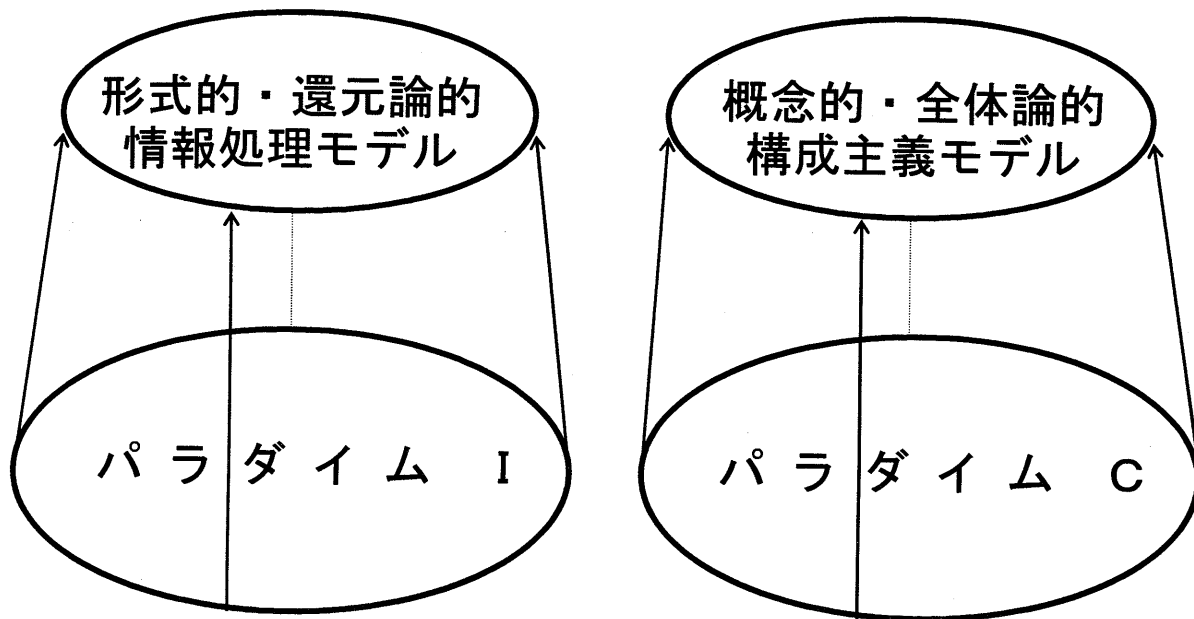


図3

きること。

数学教育学研究におけるパラダイムについての数少ない論考の中で、例えば、オールトン⁹⁾は、このようなクーンとラカトシュの考えに基づいて、数学教育学研究における四つの基本的な論点 — ①数学指導の価値、②数学学習を研究するための方法論、③精神の理論、④数学的実体 — のそれぞれについて、学習の転移についての異なった二つの理論を比較考察している。その結果、オールトンは、①については「人間形成的価値」、③については「精神の活動理論」がそれぞれ適していると述べている。しかしながら、②と④についてはそうした判断をすることは困難で、「形式的・還元論的な情報処理モデル」と「概念的・全体論的な構成主義モデル」は異なった研究方法論と数学的実体についての異なった仮説とを有しているが、どちらが進歩的であるかは現時点では明らかでない」と論じている。

このオールトンの論考は、数学学習に関する理論に限定されてはいるが、近年の数学教育学研究における情報処理モデルと構成主義モデルの基底には異なったパラダイムがあり(図3)、その要因は研究方法論と数学的実体のとらえ方(認識論)の相違にあるということを示唆している。そこで、以下ではこれら二つの要因について考察してみよう。

3. 数学教育学における研究方法論としての三つの伝統

ビショップ¹⁰⁾は、数学教育における学習、指導、内容、目的、カリキュラムなどを対象とする広範な数学教育学研究を国際的視座からみて、数学教育学研究においては、①教育者の伝統(Pedagogue tradition)、②経験的・科学者の伝統(Empirical-scientist tradition)、③学者的・哲学者の伝統(Scholastic-philosopher tradition)、という三つの研究の伝統が認められると言う。そしてビショップは、数学教育における研究に必要とされる要素として、探究、証拠、理論の三つを挙げ、上の三つの伝統の特徴を表1のように整理している。

表1 三つの伝統の特徴¹⁾

理論	探究の目的	証拠の役割	理論の役割
教育者の伝統	指導の直接的な向上	選択された例証的な子どもの行動	熟練した教師の蓄積され共有可能な知恵
経験的・科学者の伝統	教育的現実の説明	説明されるべき事実を提供する客観データ	データによって検証される説明
学者的・哲学者の伝統	厳密に議論された理論的立場の確立	知り得ると仮定される、あるいは開発されるべきもの	教育的現実が目指すべき理想的な状況

これらの伝統は、いずれも数学教育の発展を意図したものであるという点では共通しているが、探究の目的や方法においては、それぞれ以下のような特色を有する異なった研究方法論であるととらえられる。

まず、教育者の伝統においては、新しい指導方法や教育実践の開発によって直接的に指導を向上させることが探究の目的とされる。教授実験や観察などの方法によって、優れた教育実践家（教師）の知恵や指導方法を明らかにし、それらを蓄積し共有されうる形に体系化しようとする点がこの伝統の特色である。次に、経験的・科学者の伝統においては、現実を説明するための標準化された研究方法を開発することによって教育的現実を説明することが探究の目的となる。教育的現実についての客観的なデータを収集して分析するという方法によって、データに基づいてテストされ得るような教育的現実についての説明を行おうとする点がこの伝統の特色である。そして、学者的・哲学者の伝統においては、教育に対する新しい考えや洞察を得るために、厳密に議論された理論的立場を構築することが探究の目的である。論理的分析、批判及び合理的理論化などの方法によって、教育が理想とすべき状況を論理的に示そうとする点がこの伝統の特色である。

これらの伝統はすべての国の数学教育学研究において、程度の差こそあれ、認められるものである。そして、今日の数学教育学における研究には、これら三つの伝統のすべてにある程度影響を受けているものが多い。

ビショップはさらに、国際的視座から数学教育学における研究について考えるとき、数学教育学において何らかの研究を行う際には、異なった社会や国の研究者の課題へのアプローチの仕方を決定づける、次のような重要な五つの関係が浮かび上がってくると述べている。その五つの関係とは、①「現状 (what is)」と「理想 (what might be)」、②「数学」と「教育」、③「問題」と「研究方法」、④「教師」と「研究者」、⑤「研究者」と「教育制度」である。これらの関係はいずれも研究者が行う研究活動に大きな影響を及ぼすものであるが、①②③は個々の研究者内での研究の重点の置き

方に、④は研究者と教師との関わりに、そして⑤は研究者とその研究者が所属する研究機関や国の教育制度に関するものである。

特に、個々の研究者内での研究の重点の置き方に影響を及ぼす三つの関係に限ってみると、第一の「現状」と「理想」を両極とする線上に上述の三つの伝統を位置付けると、経験的・科学者の伝統は「現状」に最も近いところに位置付き、教育者の伝統と学者的・哲学者の伝統は「理想」に近いところに位置付くことになる。また、第二の「数学」と「教育」を両極とする場合には、学者的・哲学者の伝統は「数学」に最も近いところに、経験的・科学者の伝統と教育者の伝統は「教育」の近くにそれぞれ位置付けられる。そして、第三の「問題」と「研究方法」を両極とする場合には、上述のようにこれら三つの伝統はそれぞれ固有の研究方法をもっているため、それらを順序づけ區別して位置付けることは難しいが、教育者の伝統は解決すべき教育的問題を提起するという点を考慮すると、それを他の二つの伝統よりも「問題」に近いところに位置付けることができる。

このような研究方法論としての三つの伝統の特徴を知った上で、これらのバランスをとりながら数学教育学の研究を進めて行くことが望まれる。その際、数学教育学研究において最も重要なことは、第二の「数学」と「教育」の関係であろう。「教育」に近い教育者の伝統と経験的・科学者の伝統は、数学を一つの一般化可能な、しばしば區別されない一つの概念としてとらえる傾向にあり、数学教育学研究の固有性が弱い。他方、「数学」に近い学者的・哲学者の伝統は、数学を一つの領域とはみなさず、数学の種々の考え（幾何、代数、算術など）を異なったものとみなし、それぞれ固有の問題をもつと考えるが、教育的観点からの考察が希薄である。このようなビショップの指摘は少し極端ではあるが、「一つの固有な学問としての数学教育学の大きな発展・成長は、研究における数学的関心と教育的関心の間の相互関係を強めることによってもたらされた」¹²⁾、という指摘は注目に値する。それゆえ、これら三つの伝統はいずれも数学教育学の発展にとって欠くことのできない研究方法論であり、個々の研究者の研究において、また数学教育学全体の研究においてもこれらのバランスをとることが重要であると考えられる。

4. 数学教育学における認識論と四つの研究アプローチ

さて、「数学」と「教育」の相互関係を強めることが一つの固有な学問としての数学教育学の大きな発展・成長に寄与してきたのであるが、現在の数学教育学における研究アプローチは唯一つではない。その最大の要因は、種々の研究アプローチの基にある異なった認識論に求めることができる。

科学的知識に関する認識論では、科学的知識の起源、妥当性の基準、発展過程の特徴が問われる。シールピンスカとレーマン¹³⁾は、この認識論に対する態度が数理哲学者と数学教育者では異なっており、一般的に言えば、数学教育者は、数学的理論の妥当性の基礎を研究することよりも、数学的知識の発生・成長過程を説明することの方に興味をもつ、と述べている。さらに、数学教育者は、数学者や生徒の数学的発見の過程を観察し説明すること、数学教室における数学的意味の変容・発達にも興味をもつ。したがって、数学基礎論のように数学理論の合理的再構成を目的とする「正当化の文脈における認識論」や数学理論の発見・発明の過程を明らかにしようとする「発見の文脈における認識論」は直接的には数学教育につながらない。数学の認識論を数学教育につなげるためには、数学的知識の心的構成過程におけるメカニズムを対象と

する発生的認識論，数学的知識の発展・発達に及ぼす社会的側面に焦点をあてた社会・文化的認識論，さらには数学教育における知識の本性を問う文化人類学的認識論などが必要となってくる。それゆえ，たとえ数学教育学のすべての研究者が同様の認識論的問いに関心をもっているとしても，全く同じ認識論を共有しているとは限らないのである。

実際，シールピンスカとレーマンは，現在の数学教育学研究における主要な異なったアプローチとして，①構成主義的 (constructivist) アプローチ，②社会・文化的 (socio-cultural) アプローチ，③相互作用主義的 (interactionist) アプローチ，④文化人類学的 (anthropological) アプローチの四つを挙げ，これらは知識についての異なった認識論に基づいていると述べている。¹⁴⁾ これら四つのアプローチの特徴をまとめると以下のようなになる。

構成主義的アプローチは，知識は伝達によって受動的に受け取られるものではなく，認識主体によって能動的に構成されるものであるとする認識論に基づいている。そして，構成主義的アプローチでは，個々の生徒の数学的知識の心的構成過程とそれに果たす教師の役割に研究の注意が払われる。

社会・文化的アプローチは，個々人を文化や社会的状況の中に置かれている者とみて，知識は社会的に生産され，常に変化し得る，社会的価値と結びついた，社会的に統制される社会的知識であるとする認識論に基づいている。そして，社会・文化的アプローチによる研究は，数学教室の社会的文脈に注目する。

相互作用主義的アプローチは，知識の源と成長に対する社会・文化的見方を促進する発達的研究や理論へのアプローチの一つであるが，相互作用を発達の単なる補助的で有用な要因としてではなく，発達と相互作用とは不可分のものであるとするところにその特徴がある。そして，相互作用主義的アプローチによる研究では，個々の生徒よりもむしろ生徒間や生徒と教師間の数学についての相互作用に研究の焦点が当てられる。

そして文化人類学的アプローチは，これら三つのアプローチとは異なって，数学教育における知識の本性を問う「知識の文化人類学」とでも呼べる認識論に基づくものである。この認識論は，科学的知識の産出のメカニズムだけでなく，科学的知識の使用や応用と関連した実践などの様々な状況における知識の取扱いをもその考察の対象とするところにその特徴がある。そして，文化人類学的アプローチでは，数学の教授・学習という現象を考察の対象とし，数学教育における「教授学的置き換え」や「教授学的状況」の解明に取り組むことが研究の主眼となる。

以上のことを踏まえて，数学基礎論における「数学理論の正当化の文脈における認識論」や「数学理論の発見の文脈における認識論」と呼ばれる数学の認識論は直接的には数学教育につながらず，数学教育学研究においては発生的認識論，社会・文化的認識論や文化人類学的認識論があり，それらの異なった認識論を基盤とする四つの研究アプローチがあるという現状を図示すると，図4のように表すことができるであろう。この図は数学教育学研究における四つの研究アプローチについてのものであるが，数学教育学に関する研究を国際的視座からみれば，多様な研究アプローチと異なった認識論がその基盤にあることがわかる。現在の国際的な数学教育学界では，シールピンスカとレーマンも指摘しているように，これらの研究アプローチとその基盤にある認識論的問題点——知識の主観性と客観性，認識における社会的かつ文化的文脈の役割，言語と知識の関係——についての論争が起こっている。構成主義と社会・文

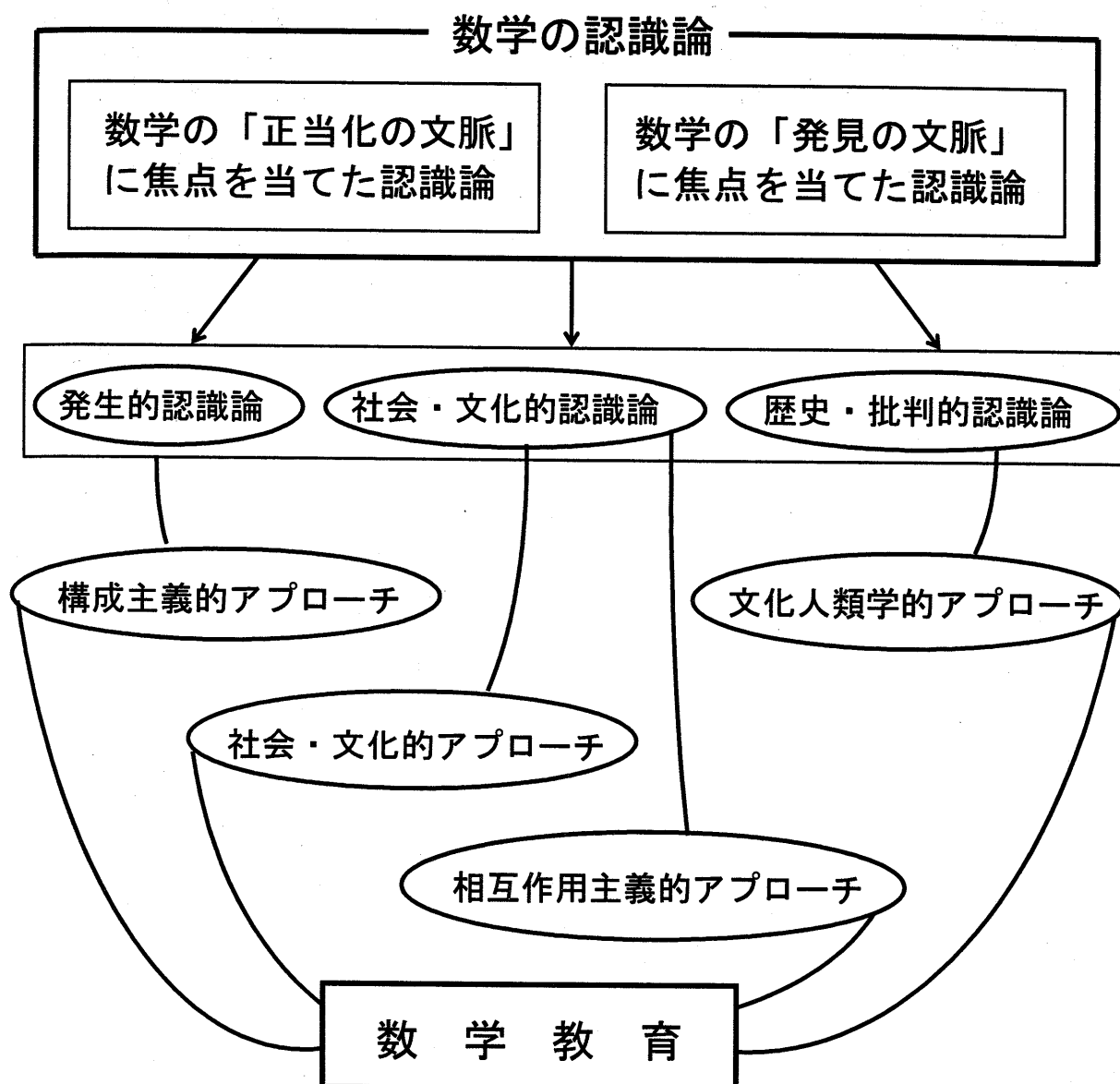


図4

化主義と相互作用主義を比較したり、それらを対置したり、それらを相補的な立場としてまとめようとする研究やそれに対する批判的な研究もある。¹⁵⁾ しかしながら、現時点では、そのような論争の決着はまだ見ていない。

5. おわりに

本稿では、教科教育学の一つの領域である数学教育学を事例とし、文献解釈的な方法によって、パラダイムと理論及びその選択、数学教育学における研究方法論としての三つの伝統、異なった認識論に基づく四つの研究アプローチについて考察した。そして、主として次の三つの点について述べた。

- (1) 数学学習に関する情報処理モデルと構成主義モデルとは異なったパラダイムに基づいており、その要因は研究方法論と数学的実体のとらえ方（認識論）の相違にあるということ。

- (2) 数学教育学研究における三つの伝統 — 教育者の伝統, 経験的・科学者の伝統, 学者的・哲学者の伝統 — はいずれも数学教育学の発展にとって欠くことのできない研究方法論であり, 研究ではこれらのバランスをとることが重要であるということ。
- (3) 数学教育学研究においては, 現在, 主な研究アプローチとして構成主義的アプローチ, 社会・文化的アプローチ, 相互作用主義的アプローチ, 文化人類学的アプローチの四つがあり, それらの基盤には異なった認識論があるということ。
- このような点を踏まえて, 現在の数学教育学研究における状況を概括するならば, いろいろな数学教育学研究のパラダイム(認識論とそれに基づくアプローチ)が共存しており, 異なったパラダイムと相補的な研究方法論による研究が行われ, 数学教育学固有の理論の構築が期待されている, と言えるであろう。数学教育学を事例とした本稿が教科教育学研究パラダイムの検討に少しでも寄与できたなら幸いである。

引用・参考文献

- 1) 広島大学教科教育学研究会編『教科教育学 I — 原理と方法 —』建帛社, 1986.
- 2) 小山正孝「数学教育学研究に関する一考察—課題と方法を中心に—」『教科教育学研究』第8号, 広島大学教科教育学会, 1986, pp.85-95.
- 3) 中原忠男『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』聖文社, 1995, pp.5-6,
- 4) Bishop, A., *International Perspectives on Research in Mathematics Education*. In Grows, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NCTM, 1992, pp.710-723.
- 5) Sierpinska, A. and Lerman, S., *Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education*. In Bishop, A. et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 1996, pp.827-876.
- 6) T.S. クーン著/中山茂訳『科学革命の構造』みすず書房, 1971, pp.197-242.
- 7) 前掲書 6)
- 8) I. ラカトシュ著/佐々木力訳『数学的発見の論理—証明と論駁—』共立出版, 1980.
- 9) Orton, R., *Two Theories of "Theory" in Mathematics Education: Using Kuhn and Lakatos to Examine Four Foundational Issues*, *For the Learning of Mathematics*, Vol.8, No.2, 1988, pp.36-43.
- 10) 前掲書 4)
- 11) 前掲書 4), p.713.
- 12) 前掲書 4), p.716.
- 13) 前掲書 5)
- 14) 前掲書 5), pp.842-862.
- 15) 中原忠男「数学教育における構成主義的授業論の研究(Ⅱ) — 「数学学習の多世界パラダイム」の提唱 —」『数学教育学研究』第5巻, 全国数学教育学会, 1999, pp.1-8.

[付記] 本稿は, 日本教科教育学会編『新しい教育課程の創造—教科学習と総合的学習の構造化—』教育出版, 2001, pp.164-174 に掲載されたものである。

数学理解の2軸過程モデルの理論的再検討

小山 正孝

(広島大学大学院教育学研究科)

1. 目的と方法

算数・数学学習における理解過程に関する研究は、算数・数学学習における児童・生徒の理解過程を、理論的・実証的に解明しようとするものである。数学的概念や原理・法則などを理解するということは、本質的には、個々の児童・生徒の心的活動であり、それは複雑で力動的な過程である。しかし他方では、教室で行われる算数・数学学習においては、児童・生徒の理解過程はその児童・生徒と教師、児童・生徒同士の相互作用の影響を受けることも確かである。そこで、本研究では、算数・数学学習における理解過程を、これら個人的側面と社会的側面を視野に入れて解明することを目的とする。

筆者は、数学教育における直観に関する研究¹⁾において、直観と論理が相補的な関係にあるとき思考は生産的かつ確実に進展し得るということを理論的に解明した。このことを踏まえて、数学教育における理解に関する研究²⁾では、理解のモデルについての考察を行った。その結果、数学理解の過程モデルの1つとして、理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸にもつモデルを理論的に構築し、それを「2軸過程モデル (Two-Axes Process Model)」と命名した³⁾。そして、このモデルの妥当性の実証的検討を、算数・数学科の授業分析を通して行っている^{4), 5)}。

一方、世界に目を転じてみると、近年、国際的な視座から数学教育の研究成果や展望を整理した大部の書物が発行されている^{6), 7)}。そこでは、数学教育における理解に関するこれまでの研究や現在の数学教育研究におけるアプローチ等が包括的に整理されている。

そこで、本稿では、これらの文献をもとに、文献解釈的方法によって、筆者が構築した数学理解の2軸過程モデルを理論的に再検討することを目的とする。そのために、まず、筆者が理解研究において前提としている理解のとらえ方や理解のモデル化の必要性を述べる。次に、数学理解の2軸過程モデルの概要とその特徴を要約する。そして、この2軸過程モデルの理論的再検討として、このモデルの根底にあるパラダイムや認識論と、数学理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸に設定することの妥当性を、文献解釈的方法によって理論的に再検討することとする。

2. 理解とそのモデル化

(1) 理解の基本的なとらえ方

児童・生徒が数学を理解するとはどういうことであろうか。また、どのようなメカニズムで理解が深化するのか。これらの問いは理解研究において解明すべき究極的な問題で、かなり以前から精力的に研究されてきた数学教育研究の主要な問題の1つで

ある。

筆者は、理解に関する認知心理学的研究の成果をもとに、理解 (understanding) を次のようにとらえ、これらを理解研究における前提としている。

- (1) あることを理解するとは、それを既存のシエマあるいは認知構造と認知的に関係づけることである。
- (2) 理解は本質的には個人的な心的活動であり、複雑で力動的な現象である。
- (3) 数学の理解にはいくつかの階層的水準がある。

(2) 理解のモデル化の必要性

理解するということは児童・生徒の内面的な複雑な活動であるから、それをとらえるためには、この内面的で直接見ることのできない理解という現象を何らかの方法によって顕在化させることが必要である。しかし、いかなる方法によろうとも、理解という現象、理解するという活動は個人的で内面的なものであるから、それを直接とらえることはほとんど不可能である。

それゆえ、理解の構造や機能を間接的にとらえるための理論的・解釈的枠組みが必要になる。その枠組みは、原型としての理解の構造や機能をよりとらえやすくするものであるから、それを「理解のモデル」と呼ぶことができる。したがって、理解のモデルを構築すること、つまり理解のモデル化は、児童・生徒の数学理解を解明するために必要不可欠である。

(3) 理解のモデル化の観点

これまで数学教育研究において理解のモデル化が試みられてきた。その結果いろいろなモデルが提案されているが、それらはモデル化の観点の違いから大きく次の2つの類型に分けられる。

第1の類型は、児童・生徒が既に理解している状態、すなわち理解の様相を記述しようとするものであり、「様相モデル」と呼ばれる。それに対して、第2の類型は、児童・生徒が理解しつつある過程を記述しようとするものであり、「過程モデル」と呼ばれる。

さらに、数学理解のモデル化においては、理解の対象は何かということが重要であるから、それが数学的内容 (概念, 演算, 手続き, 性質, 関係等) である場合と、数学的形式 (具体的表現, 操作的表現, 図的表現, 言語的表現, 記号的表現) である場合とに分けることができる。また、児童・生徒の主として頭の中の変化 (認知構造の変容) に焦点を当てる場合と、主として観察可能なものの変化 (行動の変容) に焦点を当てる場合とが考えられる。

3. 数学理解の2軸過程モデル

(1) 理解のモデルの特性 —「記述的特性」と「規範的特性」—

これまでに提案された数学理解のモデルの多くは、児童・生徒が数学をどのように理解しているか、その様相や過程を記述することにその力点が置かれている。それらは、児童・生徒の数学理解にはいかなる種類があるかを記述したり、理解という内面的な現象がどのように起こっているかを記述したりする。その意味で、これらのモデルは「記述的特性」を備えているといえる。

しかしながら、数学教育においては、児童・生徒の理解の様相や過程の実態を把握し記述するだけでは不十分である。なぜなら、数学教育というものは、本来、教師が教えるという活動（教授活動）と児童・生徒が学ぶという活動（学習活動）の2つから成立するものである、と考えられるからである。したがって、数学理解のモデルが、教授活動＝学習活動としての数学教育において真に有効なものであるためには、記述的特性だけでなく規範的特性をも備えていなければならない。この「規範的特性」とは、児童・生徒に数学を理解させるにはどのような状況を設定すればよいか、また、理解をどのような方向に深化させればよいかなどについての教授学的原理を示唆し得るという特性である。

(2) 理解の深化における反省的思考の役割

筆者は、これら両方の特性を備えた、数学理解の過程モデルを構築しようと試みた。そこでまず注目したのが、児童・生徒の数学理解の深化における「反省的思考」の役割である。反省的思考を、《学習者が自らの無意識的な活動や操作に注意を向け、それらやその結果を意識化して、図や言葉によって表現することを目的とする思考》ととらえ、次の3点が重要であると考えている。

- (1) 反省的思考は、学習者自身による活動や操作をその前提とする。
- (2) 反省的思考の対象は、その活動や操作およびその結果である。
- (3) 反省的思考の目的は、無意識的な活動や操作を意識化し、それを表現することである。

そして、このような反省的思考が数学理解において果たす役割を、ファン・ヒーレの幾何学の「学習水準モデル」⁸⁾とピリーとキーレンが提案した理解の「超越的再帰モデル」⁹⁾とに着目して考察した。その結果、これらは水準の飛躍あるいは移行に関する考えにおいて本質的に同じであり、この飛躍や移行に反省的思考が関与しているといえる。

(3) 数学理解の2軸過程モデル

児童・生徒の数学理解が深化する過程を解明するためには、①数学理解はどのような水準に沿って深化するか、②ある水準において、どのように思考が展開するか、という2つの点を明らかにすることが重要であると考えられる。こうした認識に基づいて、筆者は、児童・生徒の数学理解の深化の過程を解明し、その深化を促進するための1つの理論的枠組みとして、理解のいくつかの階層的水準と各水準における学習段階をそれぞれ縦軸と横軸にもつ、数学理解の「2軸過程モデル」を構築した。³⁾このモデルは概ね次のようなものである。

このモデルの縦軸は理解水準に関するもので、数学的対象の理解、対象間の関係の理解、関係の一般性の理解などのいくつかの階層的水準から成る。他方、このモデルの横軸は学習段階に関するもので、各々の理解水準に以下のような直観的段階、反省的段階、分析的段階の3つの学習段階を設定している。このような一連の段階を経て、必ずしも直線的にはないが、理解の水準がある水準から次の水準へと上昇し得る（深化し得る）と考えられる。

- (1) 直観的段階とは、学習者が具体物あるいは概念や性質などの数学的対象を操作する直観的思考を働かせる段階である。
- (2) 反省的段階とは、学習者が自らの無意識的な活動や操作に注意を向け、それらやその結果を意識化して、図や言葉などによって表現することを目的とす

る反省的思考を働かせる段階である。

- (3) 分析的段階とは、学習者が表現したものをより洗練して数学的に表現したり、他の例で確かめたり、それらのつながりを分析したりすることによって、統合を図ることを目的とする分析的思考を働かせる段階である。

このような数学理解の2軸過程モデルには、次の2つの特徴がある。第1は、数学理解の深化の過程における直観と論理の相補性を反映させ、反省的思考を明確に位置づけている点である。第2の特徴は、児童・生徒の数学理解の様相や過程を記述する「記述的特性」と理解を深化させるための状況設定や方向づけなどに関する教授学的原理を示唆し得る「規範的特性」の両方をこのモデルにもたせようとしている点である。

上述のことを踏まえて、以下では、この数学理解の2軸過程モデルを理論的に再検討することとする。

4. 2軸過程モデルの根底にあるパラダイムや認識論の再検討

まず、この2軸過程モデルの根底にあるパラダイムや認識論について再検討してみたい。

(1) パラダイムについて

ヒーバートとカーペンター¹⁰⁾は、認知科学の立場に立って、次の2つの前提をもとに、理解するという事柄について考察するための1つの枠組みとして「表象し関連づけること」を提案している。

前提1：外的表現と内的（心的）表象との間には、何らかの関係がある。

前提2：内的（心的）表象は、有用な方法で、相互に関連づけられ得る。

第1の前提は、内的（心的）表象は外的表現によって影響され制限され、逆に、外的表現をどのように取り扱ったりつくったりするかということがいかに内的に表象しているかを明らかにする、ということの意味する。そして、第2の前提は、外的表現の異なった表現様式間の関連づけや同じ表現様式内での関連づけに加えて、内的表象間の関連づけができるということの意味し、内的表象間の関係が構成されたとき、それらは知識のネットワークをつくる、ということの意味する。

このように理解するという事柄を「表象し関連づけること」としてとらえる枠組みが、数学理解について考えるための1つの有用な方法であるという理由として、彼らは次のような3つの理由をあげている。

- (1) その枠組みは、理論的な認知的問題点と実践的な教育的問題点の両方に接触できる程度の水準の分析を提供する。
- (2) その枠組みは、過去と現在の数学の教授・学習についてのいろいろな問題点を関連づけるような首尾一貫した枠組みをつくり出す。
- (3) その枠組みは、学校内外の児童・生徒の成功や失敗を説明するのに役立つ、児童・生徒の学習についての解釈を示唆する。

そして、理解するという事柄を「表象し関連づける」ことによる内的ネットワークづくりととらえ、理解が成長することを、内的ネットワークがより大きくなったり、より組織化されたりすることとしてとらえている。それゆえ、理解するという事柄は全か無かという現象ではなく、理解が成長するという事柄はネットワークへの新しい心的表象の追加とネットワーク内での変化の両方として特徴づけられる。このような

彼ら理解のとらえ方は、上述の筆者のとらえ方と基本的には同じである。

ところで、ヒーバートとカーペンターの理解のとらえ方は、内的（心的）表象をできる限り正確にモデル化することを重視する認知科学に基礎を置くものである。しかしながら、他方で、理解を伴った学習に関する最近の研究には、状況に埋め込まれた知識や社会的認知を強調する人類学や社会学に基礎を置くものもある。このことについて、彼らは、理解するというを完全に記述するためにはこれら両方の研究が必要であることを、次のように述べている。¹⁰⁾

《理解するというを内的な（心的な）知識構造によって十分に記述することができるかどうかについては、近年いろいろと論議されている。理解するというを完全に記述するためには、おそらく、状況に埋め込まれた活動や社会的相互作用の分析をも含める必要があるであろう。》

このように、数学教育における理解の研究に限らず、数学教育研究において意味のある探究は、何らかの理論に基づいて行われる。そして、その理論の根底には、意識的にせよ無意識的にせよ、研究者の数学観や数学教育についての価値観や信念のようなものがあると考えられている（図1）。もちろんすべての研究者が全く同じ数学観や数学教育観をもっているわけではないが、研究者集団の中にはいくつかの共通したものがある。このように、ある集団の成員が共通して持っている信念、価値、テクニックなどの全体的構成を意味する言葉がパラダイムである。¹¹⁾

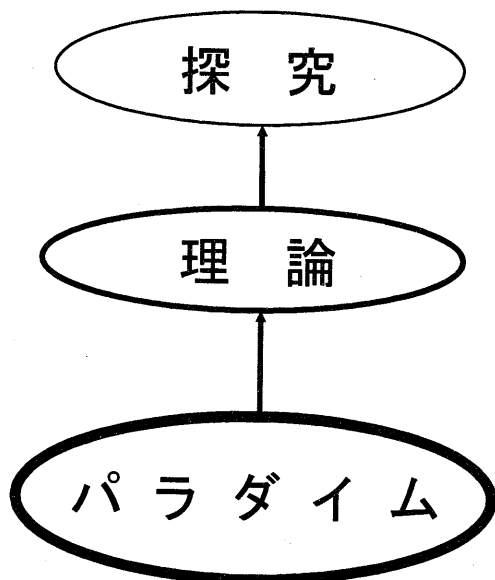


図1 パラダイムと理論及び探究

したがって、数学教育研究の領域においても異なったパラダイムがあり、それゆえ異なった理論があり得る。しかも、どの理論がより進歩的であるかを合理的に判断し、選択することが困難であるという問題もある。この「理論の合理的選択」の問題は科学哲学の主要な問題であり、クーンとラカトシュはこれについて異なった考えを述べている。クーン¹¹⁾は、異なったパラダイムの非通約性を理由に、異なったパラダイムに基づく理論を合理的に選択することは不可能であると言う。一方、ラカトシュ¹²⁾は、異なった理論は異なったパラダイムを表現するものであるかもしれないが、どの理論が進歩的であるかを判断する基準は存在すると言う。

オールトン¹³⁾は、このようなクーンとラカトシュの考えに基づいて、数学教育における4つの基本的な論点—①数学指導の価値、②数学学習を研究するための方法、③精神の理論、④数学的実体—のそれぞれについて、学習の転移についての異なった2つの理論を比較考察している。その結果、オールトンは、①については「人間形成的価値」が、③については「精神の活動理論」がそれぞれ適していると述べている。しかしながら、②と④についてはそうした判断をすることは困難で、「形式的・還元論的な情報処理モデル」と「概念的・全体論的な構成主義モデル」は方法論と数学的実体については異なった仮説を有しており、いずれが進歩的であるかは現時点では明らかでないとして論じている。

この論考は、数学学習に関する理論に限定されてはいるが、近年の数学教育研究における情報処理モデルと構成主義モデルの基底として異なったパラダイムがあることを示唆していると考えられる(図2)。

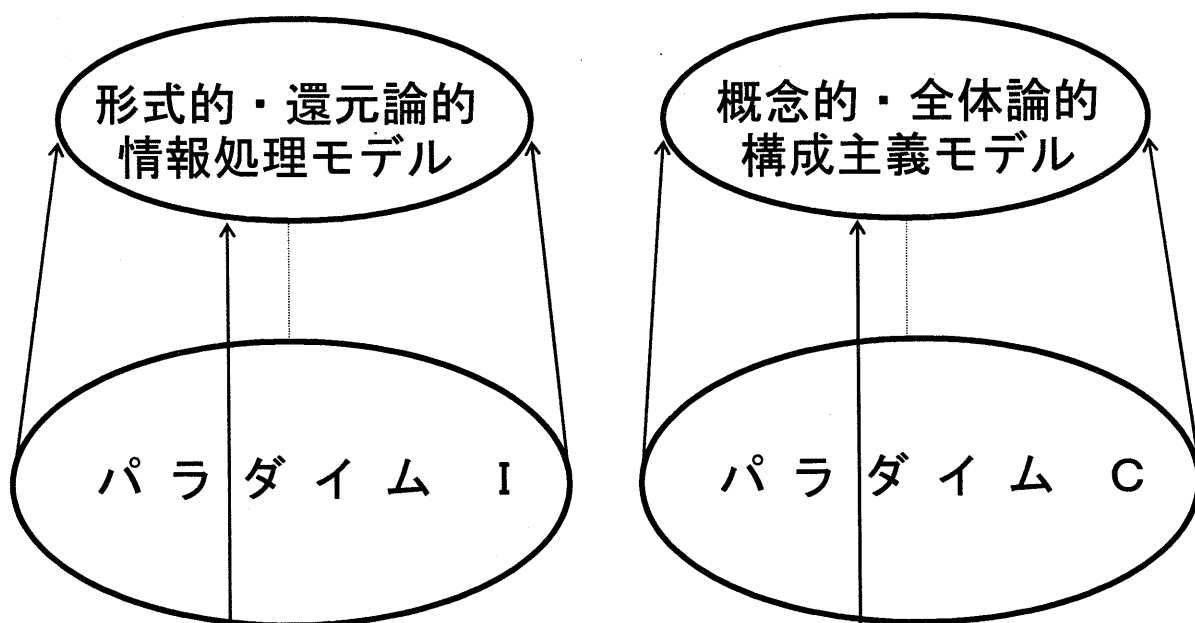


図2 数学学習に関する「情報処理モデル」と「構成主義モデル」

(2) 認識論について

また、シールピンスカとレーマン¹⁴⁾は、現在の数学教育研究における異なったアプローチとして、①構成主義的アプローチ、②社会・文化的アプローチ、③相互作用主義的アプローチ、④文化人類学的アプローチを挙げ、これらは知識についての異なった認識論に基づいていると述べている。

①構成主義的アプローチでは、知識は認識主体によって能動的に構成されるものであるとみなし、個々の児童・生徒が数学的知識を構成する過程と教師の役割に研究の注意が払われる。②社会・文化的アプローチでは、個々の児童・生徒はある文化や社会的状況の中に置かれているとみなし、数学教室の社会的文脈に注目する。③相互作用主義的アプローチでは、相互作用を発達のみならず補助的で有用な要因としてではなく、発達と相互作用とは不可分のものとみなし、個々の児童・生徒よりもむしろ児童・生徒間や児童・生徒と教師間の数学についての相互作用に研究の焦点が当てられる。そして、④文化人類学的アプローチでは、認識主体にとって知識が存在し意味をなす

のは、その知識がある制約のもとでの最良の解を表しているからであるにとらえ、数学教育における教授学的状況の解明に取り組むことが主眼となる。

これらの数学教育への多様なアプローチとその基盤となる認識論との関連を図に表すと、図3のように示すことができるであろう。

以上のように、数学教育に関する研究を国際的視座からみれば、異なったパラダイムや認識論に基づく多様なアプローチがあることがわかる。そして、2軸過程モデルの構築は、主として認知心理学的パラダイムを基底とし、構成主義的認識論に立って数学理解の解明にアプローチしようとする研究に位置づく、といえる。しかしながら、そのモデルを用いて授業での算数・数学の学習における児童・生徒の理解過程を解明するためには、その他の社会学的パラダイムや人類学的パラダイムに基づくアプローチによる研究によってそれを補完する必要がある、ということが示唆される。

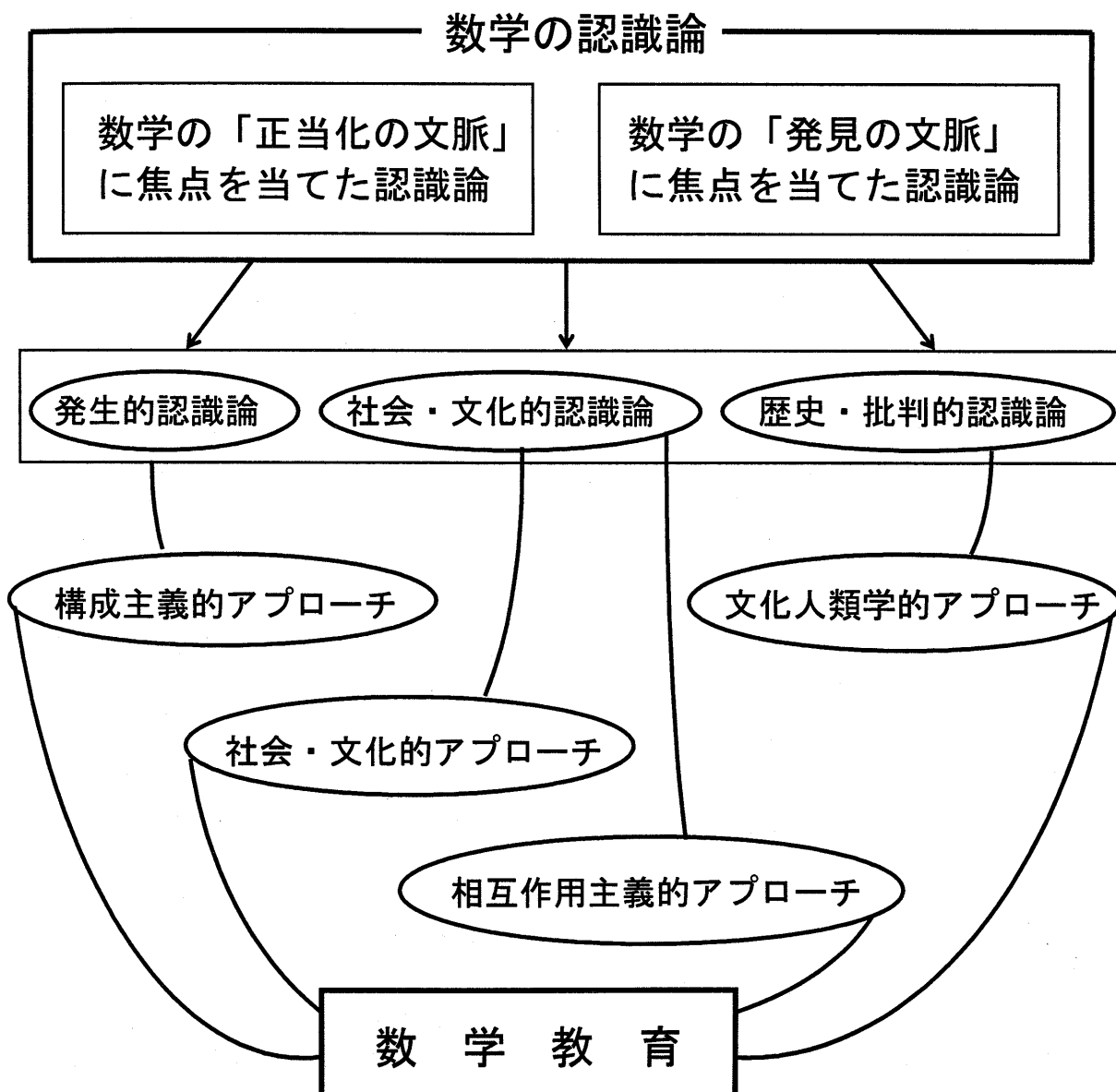


図3 数学教育への多様なアプローチ
(シールピンスカとレーマンの論文¹⁴⁾をもとに作成)

5. 2軸過程モデルに縦軸と横軸の2軸を設定することの 妥当性の再検討

さて次に、2軸過程モデルにおいて、数学理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸に設定することの妥当性について再検討してみたい。

ヒーバートとカーペンター¹⁰⁾は、上述のように、「表象し関連づける」ということを理解するということについて考察するための1つの枠組みとして提案しているが、知識のネットワークを次の2つの異なったメタファーでとらえられると述べている。1つはクモの巣のように構造化されたものであり、もう1つは垂直的階層のように構造化されたものである。そして、学習者が知識の心的ネットワークをつくるために行う関連づけには、類似性と相違性に基づいて行うものと、包含と包摂に基づいて行うものがあり、それらはそれぞれクモの巣状ネットワークと垂直的階層的ネットワークとにみられる、と述べている。なぜならば、類似性と相違性に基づく関連づけは、ほぼ同じ水準で表象される情報の断片を結びつけること(クモの巣構造)であるのに対して、包含と包摂に基づく関連づけは、ある数学的事実や手続きが他のものの特別

表1 数学教育研究における3つの伝統の特徴
(ビショップの論文¹⁵⁾をもとに作成)

	目 的	方 法	特 色
教育学的伝統	新しい指導方法や教育実践の開発によって、直接的に指導を向上させること	教授実験観察など	優れた教育実践家(教師)の知恵や指導方法を明らかにし、それらを蓄積し共有されうる形に体系化しようとする点
哲学的伝統	教育に対する新しい考えや洞察を得るために、厳密に議論された理論的立場を構築すること	論理的分析 批判 合理的理論化 など	論理的分析、批判及び合理的理論化などの方法によって、教育が理想とすべき状況を論理的に示そうとする点
経験科学的伝統	現実を説明するための標準化された研究方法を開発することによって、教育的現実を説明すること	教育的現実についての客観的なデータの収集と分析	データに基づいてテストされ得るような教育的現実についての説明を行おうとする点

な場合としてみられる（垂直的階層構造）ということを示唆するからである。

このような指摘は、筆者が2軸過程モデルを構築した際に設定した2軸と密接に関連する。なぜならば、垂直的階層的ネットワークは2軸過程モデルの縦軸である数学理解の階層的水準に対応し、クモの巣状ネットワークは横軸である学習段階に対応するからである。横軸は理解の広がり、縦軸は理解の深まりを意味する。このことよって、2軸過程モデルに数学理解の階層的水準と学習段階を2軸として設定することの妥当性がある程度裏づけられる。

しかしながら、筆者の2軸過程モデルの縦軸と横軸は、ヒーバートとカーペンターの枠組みよりも規範的特性をより強く意図したものになっている。この相違点は、ビショップ¹⁵⁾の指摘する数学教育研究における3つの伝統—①教育学的伝統、②哲学的伝統、③経験科学的伝統—の区別を用いて説明することができる。これら3つの研究の立場はいずれも数学教育の発展を意図したものであるという点では共通しているが、表1のように、探究の目的や方法において異なった特色を有している。

このような数学教育研究における3つの伝統の区別を用いれば、ヒーバートとカーペンターの枠組みは、主として、現実を説明するための標準化された研究方法を開発することによって、教育的現実を説明することを探究の目的とする経験科学的伝統に属する、といえる。それに対して、筆者の2軸過程モデルは、主として、新しい指導方法や教育実践を開発することによって、直接的に指導を向上させることを探究の目的とする教育学的伝統に属するものを志向している。しかし、これらはいずれも数学教育の発展にとって欠くことのできない研究の立場としての伝統であり、数学の理解に関する研究においてもこれらのバランスをとることが重要であると考えられる。

6. 結語

本稿では、文献解釈的方法によって、筆者が構築した数学理解の2軸過程モデルについて、その根底にあるパラダイムや認識論と、数学理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸に設定することの妥当性の理論的再検討を行った。その結果、次のことが明らかになった。

(1) 数学教育研究には、異なったパラダイムや認識論に基づく多様なアプローチがあり、2軸過程モデルの構築は、主として認知心理学的パラダイムを基底とし、構成主義的認識論に立って数学理解の解明にアプローチしようとする研究に位置づく。しかしながら、そのモデルを用いて授業での算数・数学の学習における児童・生徒の理解過程を解明したり、そのモデルを授業構成に適用したりするためには、その他の社会的パラダイムや人類学的パラダイムに基づくアプローチによる研究によってそれを補完する必要がある。

(2) ヒーバートとカーペンターは、理解するということを「表象し関連づける」ことによる知識の内的ネットワークづくりととらえ、クモの巣状ネットワークと垂直的階層的ネットワークの2つがあるという。これは、筆者が2軸過程モデルを構築した際に設定した2軸と密接に関連する。なぜならば、クモの巣状ネットワークは2軸過程モデルの横軸である学習段階に対応し、垂直的階層的ネットワークは縦軸である数学理解の階層的水準に対応するからである。つまり、横軸は理解の広がり、縦軸は理解の深まりを意味する。このことよって、2軸過程モデルに数学理解の階層的水準と学習段階を2軸として設定することの妥当性がある程度裏づけられる。

しかしながら、ヒーバートとカーペンターが理解するというをとらえる枠組みは経験科学的伝統に属するのに対して、筆者の2軸過程モデルは教育学的伝統に属するものを志向している、という相違点がある。これらはいずれも数学教育の発展にとって欠くことのできない研究の立場としての伝統であり、数学の理解に関する研究においてもこれらのバランスをとることが重要である。

今後は、本稿における数学理解の2軸過程モデルについての理論的再検討の結果を踏まえて、社会学的パラダイムや人類学的パラダイムに基づくアプローチによる研究を行い、算数・数学学習における児童・生徒の理解過程を実証的に解明したい。

引用・参考文献

- 1) 小山正孝 (1990) 「数学教育における直観に関する研究」, 平林一榮先生頌寿記念出版会編『数学教育学のパースペクティブ』, 聖文社, pp.175-193.
- 2) 小山正孝 (1992) 「数学教育における理解のモデルについて」, 岩合一男先生退官記念出版会編『数学教育学の新展開』, 聖文社, pp.172-184.
- 3) Koyama, M. (1993) Building a Two-Axes Process Model of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol. 1, pp.63-73.
- 4) 小山正孝 (1997) 「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.
- 5) Koyama, M. (1997) Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol. 5, pp.21-33.
- 6) Grouws, D. (ed.) (1992) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing Company.
- 7) Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (eds.) (1996) *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers.
- 8) van Hiele, P. M. & van Hiele-Geldof, D. (1958) A Method of Initiation into Geometry at Secondary Schools. In Freudenthal, H. (ed.) *Reports on Methods of Initiation into Geometry*, Groningen Wolters, pp.67-80.
- 9) Pirie, S. & Kieren, T. (1989) A Recursive Theory of Mathematical Understanding, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, No. 3, pp.7-11.
- 10) Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992) Learning and Teaching with Understanding. In Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing Company, pp.65-97.
- 11) クーン, T. S. 著/中山茂訳 (1971) 『科学革命の構造』, みすず書房.
- 12) ラカトシュ, I. 著/佐々木力訳 (1980) 『数学的発見の論理—証明と論駁—』, 共立出版.
- 13) Orton, R. (1988) Two Theories of "Theory" in Mathematics Education: Using Kuhn and Lakatos to Examine Four Foundational Issues, *For the Learning of Mathematics*, Vol.8, No.2, pp.36-43.
- 14) Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996) Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. In Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J.

& Laborde, C. (eds.) *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, pp.827-876.

- 15) Bishop, A. (1992) International Perspectives on Research in Mathematics Education. In Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing Company, pp.710-723.

算数科における「計算のきまり」の指導のねらいと内容

小山 正孝

(広島大学大学院教育学研究科)

0. はじめに

平成元年の学習指導要領の改訂以後、算数教育において「計算のきまり」の指導が重視されるようになった。その背景には、電卓やコンピュータの急速な発展と普及に伴って、それまでの計算指導を見直そうとする意図とこれからの算数教育への期待とがある。その期待とは、『小学校指導書算数編』によると、「記憶中心の学習から、考え、活用し、新たなものを生み出す学習への転換を図ること」である。「算数を生み出していく過程では、基本的な原理や法則に裏打ちされた基礎的な知識と技能が必要であり、それらを活用して、児童が創造的、発展的に学習していく算数教育」が期待されているのである。¹⁾

算数科の授業時数が削減された今日、「計算のきまり」の指導はこのような算数教育への期待を実現するものでなければならないと考える。そこで本稿では、「計算のきまり」とは何かを明らかにし、その指導のねらい及び内容の要点を述べ、算数教育の研究及び実践に資することを目的とする。

1. 「計算のきまり」とは何か

算数の授業や算数教育関係の雑誌等では、「きまり」あるいは「計算のきまり」という言葉をたびたび見聞する。しかし、学習指導要領ではこれらの言葉は見当たらず、その代わりに、「原理」「法則」という言葉を用いたり、「四則に関して成り立つ性質」「交換、結合、分配の法則など」と表現したりしている。²⁾

一般的には、「原理」とは、「ものによって立つ根本法則」であり、「法則」とは、「いつでもまたどこでも、一定の条件の下に成立するところの普遍的・必然的關係」である。³⁾

一方、算数教育では原理は、「十進位取りの原理」「測定の原理」「形式不易の原理」などのように、数を数字を用いて表現したり、量を測定して数値化したり、あるいは拡張された数での演算を考えたりする際の基本的な考え(アイディア)を意味する。また、法則は、交換・結合・分配法則などのように、ある数の範囲での演算について成り立つ関係を意味する。

以上のことから、「計算のきまり」とはある数の範囲での計算に関して成り立つ関係や性質であると広くとらえることにする。このような立場に立って小学校の算数科で取り扱われる「計算のきまり」を整理し、それらを文字を使って一般的に表現すると、表1のようになる。^{4), 5), 6)}

これらの「計算のきまり」は、「計算の意味」や「計算の仕方」と相互に密接に関

連している。計算のきまりは、計算の意味の理解に支えられて、十進位取りの原理などの基本的な考えと数の合成・分解や数の相対的な大きさなどの数の多様な見方によって、具体的な事柄から見出される。そして、見出された計算のきまりは、形式不易の原理によって、拡張された数の範囲での計算の仕方を考えるときに活用される。図1は、このような相互の関連と指導過程の概略を表したものである。

表1. 算数科で取り扱う「計算のきまり」

演算	計算のきまり
加法	$a+b=b+a$ (交換法則) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (結合法則) $(a+m)+(b-m)=a+b$ (性質A①) $(a-m)+(b+m)=a+b$ (性質A②) $a+(b+m)=(a+b)+m$ (性質A③) $a+(b-m)=(a+b)-m$ (性質A④) $(a+m)+b=(a+b)+m$ (性質A⑤) $(a-m)+b=(a+b)-m$ (性質A⑥)
減法	$(a+m)-(b+m)=a-b$ (性質S①) $(a-m)-(b-m)=a-b$ (性質S②) $a-(b+m)=(a-b)-m$ (性質S③) $a-(b-m)=(a-b)+m$ (性質S④) $(a+m)-b=(a-b)+m$ (性質S⑤) $(a-m)-b=(a-b)-m$ (性質S⑥)
乗法	$a \times b = b \times a$ (交換法則) $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ (結合法則) $(a \times m) \times (b \div m) = a \times b$ (性質M①) $(a \div m) \times (b \times m) = a \times b$ (性質M②) $(a \times m) \times b = (a \times b) \times m$ (性質M③) $(a \div m) \times b = (a \times b) \div m$ (性質M④) $a \times (b \times m) = (a \times b) \times m$ (性質D⑤) $a \times (b \div m) = (a \times b) \div m$ (性質D⑥) $a \times (b+1) = a \times b + a$ (性質M⑦) $a \times (b-1) = a \times b - a$ (性質M⑧)
除法	$(a \times m) \div (b \times m) = a \div b$ (性質D①) $(a \div m) \div (b \div m) = a \div b$ (性質D②) $(a \times m) \div b = (a \div b) \times m$ (性質D③) $(a \div m) \div b = (a \div b) \div m$ (性質D④) $a \div (b \times m) = (a \div b) \div m$ (性質D⑤) $a \div (b \div m) = (a \div b) \times m$ (性質D⑥)
加減 乗除	$(a \pm b) \times c = a \times c \pm b \times c$ (分配法則) $(a \pm b) \div c = a \div c \pm b \div c$ (分配法則)

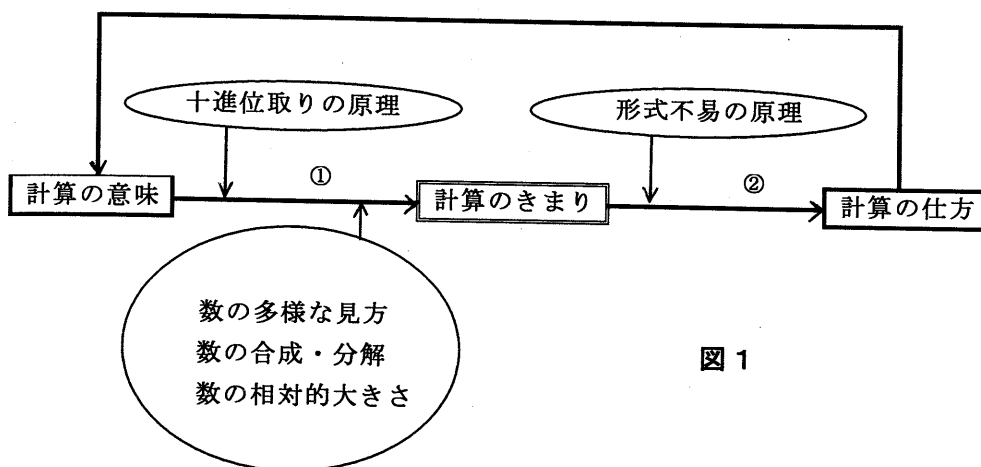


図 1

2. 指導のねらい

このような「計算のきまり」を指導する大きなねらいは、すでに述べたように、児童が考え、活用し、新たなものを生み出す学習、つまり創造的、発展的に学習していく算数教育を実現することである。

そのねらいをもう少し具体的に言えば、次のようになるであろう。

- (1) 児童が具体的な事柄や操作活動などを通して、「計算のきまり」を見出したり、理解したりすること。
- (2) そのきまりを活用して、新しい数の範囲での計算や能率的な計算の仕方を考えたり、計算の結果や手順を確かめたりすること。

これらを図 1 と照らし合わせると、前者のねらいは図 1 の①に、後者は②に対応する。そして、数学的な考え方の視点からみると、①では帰納的推論、②では類推的推論や演繹的推論がはたらくので、上述のねらいはこれらの数学的な考え方の育成にもつながる。さらに、「計算のきまり」を見出したり理解したりするにとどまらず、これを新しい計算や能率的な計算の仕方を考え出すために活用することによって、そのよさの感得にもつながる。

一方、実際の指導においては、たとえば、2 位数の加法・減法の計算の仕方やその原理を基に 3 位数の加法・減法の計算の仕方を考えさせるなど、過度の計算指導を見直し、その指導を焦点化することにつながる。また、たとえば、「除数、被除数に同じ数をかけても商は変わらない $(a \times m) \div (b \times m) = a \div b$ 」という整数の範囲での計算のきまりを、小数や分数における計算の仕方を考えるのに活用することによって、数や計算の意味の拡張と相俟って、統合的・発展的な計算指導が可能となる。

3. 指導の内容

これらのねらいを達成するために「計算のきまり」を指導するのであるが、その全体的な内容は概ね、一般的な形でまとめて表 1 に示した通りである。もちろん、学年段階や児童の実態などに応じて、その表現や取り扱い方は異なるが、指導内容の要点を前節の二つのねらいに即して述べると以下ようになる。

3.1 見出したり理解したりすること

加法の計算のきまりは、具体的な事柄や操作活動を通して見出され、具体的なイメージによって理解される。たとえば、「公園の砂場で男の子が5人、ブランコで女の子が4人遊んでいる」「赤い皿の上りんごが5個、青い皿の上りんごが4個ある」などの具体的な場面や、5個と4個のおはじきを操作して和を求める活動など多くの学習を通して、一般的な「交換法則」が帰納的に見出されたり、理解されたりする。
(図2)



図2

また、数の合成・分解において、たとえば図3のように数9の合成を順序よく並べて、それを上から下へ関係づけてみることによって「被加数にある数をたして加数からその数をひいても、和は変わらない(性質A①)」が見出され、逆に下から上へ関係づけてみることによって「被加数からある数をひいて加数にその数をたしても、和は変わらない(性質A②)」が見出される。

1 + 8 = 9
2 + 7 = 9
3 + 6 = 9
4 + 5 = 9
5 + 4 = 9
6 + 3 = 9
7 + 2 = 9
8 + 1 = 9
↑ ↑ ↑
被 加 和
加 数
数

図3

2 × 1 = 2
2 × 2 = 4
2 × 3 = 6
2 × 4 = 8
2 × 5 = 10
2 × 6 = 12
2 × 7 = 14
2 × 8 = 16
2 × 9 = 18
.
.
.

図4

乗法の九九を構成する際に、たとえば図4の2の段などから、「乗数が1増えれば、積は被乗数だけ増える(性質M⑦)」が帰納的に見出され、このことは同数累加という乗法の意味に基づいて理解される。

また、完成した九九表を観察することによって、たとえば、 $2 \times 6 = 6 \times 2$, $3 \times 4 = 4 \times 3$, $3 \times 8 = 8 \times 3$, $4 \times 6 = 6 \times 4$ などから、「交換法則」に一般化される関係や、3の段と4の段の和が7の段になることなどから、分配法則に一般化される関係が見出される。

このように、具体的な事柄と結びつけたり、操作活動を振り返ったりすることによって、児童自らが「計算のきまり」を見出し、図的なイメージを伴ってそれを理解できるように指導する必要がある。

3.2 活用して計算の仕方を考えること

このようにして見出された「計算のきまり」は、それが活用されてはじめて、その

よさが感得されるものである。その活用とは、一つは新しい計算の仕方を考えるためであり、もう一つは能率的な計算の仕方を考えるためである。

このような活用の例として、次のような場合が挙げられる。

(a) 加法の性質A②を活用して、繰り上がりのある2位数のたし算の仕方を考える。

$$\begin{aligned}13+18 &= (13-2)+(18+2) \\ &= 11+20 \\ &= 31\end{aligned}$$

(b) 除法の性質D①を活用して、小数や分数のわり算の仕方を考える。

$$\begin{aligned}4.8 \div 0.8 &= (4.8 \times 10) \div (0.8 \times 10) \\ &= 48 \div 8 \\ &= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3/5 \div 2/3 &= (3/5 \times 15) \div (2/3 \times 15) \\ &= 9 \div 10 \\ &= 9/10\end{aligned}$$

(c) 分配法則を活用して、能率的な計算の仕方を考える。

$$\begin{aligned}97 \times 5 &= (100-3) \times 5 \\ &= 100 \times 5 - 3 \times 5 \\ &= 485\end{aligned}$$

これらの例のように、児童が「計算のきまり」を活用して、新しい計算の仕方を既知の計算に帰着させて考えたり、複雑な計算が暗算でもできるように能率的な計算の仕方を考え、計算の結果を確かめたりすることができるように指導する必要がある。

4. おわりにー今後の課題ー

表1に整理したような「計算のきまり」の指導においては、それらを児童に知らせて憶えさせるのではなく、図1に示したような関連を十分に考慮して、児童自らが見出し、理解し、それを新たな計算や能率的な計算の仕方を考えるのに活用でき、そのよさがわかるような指導が望まれる。そのためには、算数科カリキュラムにおける「計算のきまり」の位置づけや算数科授業におけるその指導のあり方及び具体的な方法など、今後の研究や実践において取り組むべき課題が残されている。

黒澤俊二先生の授業実践「親分子分のきまり」(第4学年「わり算のきまり」)は、算数科授業における「わり算のきまり」の指導のあり方や具体的な方法に対する一つの提案である。それゆえ、その提案を分析・検討することは上述の課題の解明につながると期待される。

注) 本稿は、次の文献に加筆・削除等の変更を加えたものである。

石田忠男・小山正孝, 「『計算のきまり』の計算のねらいと内容」, 新算数教育研究会『新しい算数研究』, 東洋館出版社, 1992, No.255, pp.2-5.

《引用・参考文献》

- 1) 文部省, 『小学校指導書算数編』, 東洋館出版社, 1989.
- 2) 文部省, 『小学校学習指導要領解説算数編』, 東洋館出版社, 1999.
- 3) 新村出編, 『広辞苑』, 岩波書店, 1966.
- 4) 古藤怜, 「計算に関して成り立つ性質と活用の指導はどうあればよいか」, 新算数教育研究会『新しい算数研究』, 東洋館出版社, 1991, pp.2-5.
- 5) 中島健三, 「原理・法則の理解とその活用を図るためには, 授業をどう変えたらよいか」, 『平成3年度小学校算数教育研究全国大会要項』, 1992, pp.7-9.
- 6) 中島健三, 平林一栄他編, 『新・算数指導実例講座 第1, 2, 3巻』, 金子書房, 1991.

[付記] 本稿は, 日本数学教育学会『第36回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録—今後の我が国の数学教育研究—』, 第36号, 2003, pp.106-109 に掲載されたものである。

算数学習における理解過程に関する研究 (II)

— 第2学年における三角形と四角形を中心に —

小山 正孝 磯部 年晃 中原 忠男
赤井 利行 中村 武司
(協力者) 影山 和也 吉田 香織 橋本 三嗣
和田 信哉 中西 正治 岩田 耕司

1. 目的と方法

本研究は、算数学習における子どもの理解過程を、理論的・実証的に解明しようとするものである。これまでの数学の理解過程に関する研究¹⁾²⁾によって、数学的概念や原理・法則などを理解するということは、本質的には、個々の子どもの心的活動であり、複雑で力動的な過程であるが、他方では、教室で行われる算数学習においては、子どもの理解過程はその子どもと教師、子ども同士の社会的相互作用の影響を受けることが明らかになってきている。そこで、本研究では、算数学習における理解過程を、これら個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて解明することを目的とする。

そのために、まず本研究の第1報³⁾では、理論的研究として、小山が構築した数学理解の2軸過程モデルについて、このモデルの根底にあるパラダイムや認識論と、数学理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸に設定することの妥当性を、文献解釈的方法によって再検討した。そこで、本研究の第2報である本稿では、本研究における実証的研究として、小学校第2学年の子どもが三角形や四角形の内容を学習する際の理解過程に焦点を当て、事前調査、授業実践、事後調査を通して、これらの図形についての子どもの理解過程を実証的に解明することとする。

2. 本研究の特色

幾何学習における数学的思考の特質を明確にとらえた数学学習の理論の1つに、ファン・ヒーレ (van Hiele) の「学習水準理論」がある⁴⁾⁵⁾。この理論では5つの思考水準が同定されているが、本稿で対象としている小学校第2学年における図形の学習は、次のよ

うな第1水準から第2水準への移行期に相当する⁶⁾。

第1水準 この水準では、幾何図形が全体として考察され、その形のみによって識別される。しかしながら、この水準では、図形の構成要素に着目することはできない。

第2水準 この水準では、知覚される形の分析が行われ、その結果、それらの諸性質が明らかにされる。しかしながら、この水準では、図形の諸性質が理論的にはまだ整理されないで、実験的な方法のみによって確立されている。

このようなファン・ヒーレの思考水準についてのこれまでの研究⁷⁾⁸⁾においては、質問紙調査によって子どもの思考水準を同定する研究は多くなされ、その結果が報告されているが、図形学習を通して子どもの思考水準がどのように変容するかについてはほとんど報告されていない。本研究は、対象とする子どもの数が少ないので一般性には欠けるが、授業実践を通して、教室における個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて、その変容の過程を具体的に解明しようとしている点に大きな特色がある。

3. 2年生の三角形概念の理解に関する事前調査

まず、授業実践を行う前の第2学年子どもたちの平面図形 (特に三角形と四角形) についての理解の程度を調べるために、平成13年11月26日に、1クラス38名 (男子20名、女子18名) の子どもたちを対象にして、40分間で質問紙法により事前調査を行った。

以下では、三角形についての子どもの理解の程度を調べるために行った事前調査についてのみ述べる。

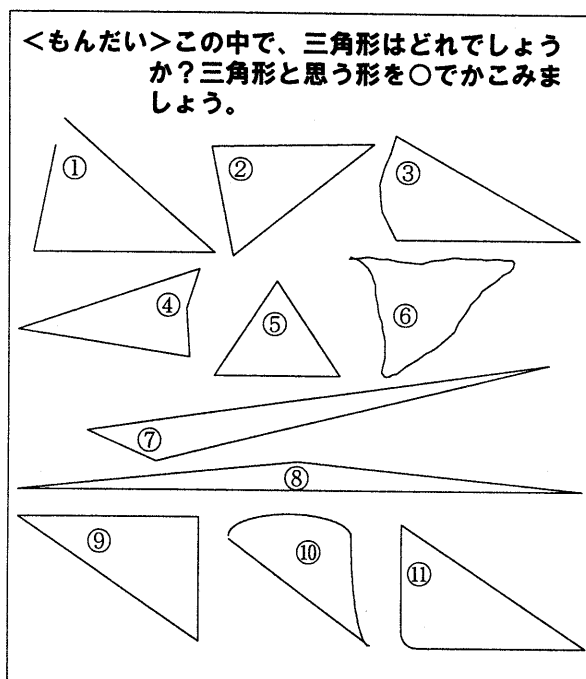
(1)事前調査のねらい

この事前調査では、次のことをねらいとした。

閉じている図形や閉じていない図形，直線や曲線で構成された図形の中から，「三角形はどれか」という観点で同定させることを通して，学習前の子どもたちの三角形概念についての理解の程度を把握する。すなわち，図形を頂点の数に着目して見ているか，直線で構成されているかどうかに着目して見ているか，閉じているかどうかに着目して見ているか，また概形や大きさ，向きに惑わされていないか，などを明らかにすることである。

(2) 事前調査の問題

そのために，次のような 11 個の図形を子どもたちに提示し，三角形の同定を行わせた。



(3) 事前調査の結果

子どもの反応

- ・①を選択した子ども…… 3名/38名 (8%)
- ・②を選択した子ども…… 33名/38名 (87%)
- ・③を選択した子ども…… 0名/38名 (0%)
- ・④を選択した子ども…… 11名/38名 (29%)
- ・⑤を選択した子ども…… 38名/38名 (100%)
- ・⑥を選択した子ども…… 0名/38名 (0%)
- ・⑦を選択した子ども…… 23名/38名 (61%)
- ・⑧を選択した子ども…… 25名/38名 (66%)
- ・⑨を選択した子ども…… 31名/38名 (82%)
- ・⑩を選択した子ども…… 0名/38名 (0%)
- ・⑪を選択した子ども…… 2名/38名 (5%)

このような事前調査の結果から，学習前の子どもたちの実態として，以下のことが明らかになった。

ア．図形③，⑥，⑩を選択した子どもが一人もいないことから，すべての子どもが三角形を直線で構成されているものと理解している。

イ．図形①，⑪を選択した子どもが2，3名いることから，3本の直線で構成されている場合には完全に閉じていない図形でも，あるいは1つの角が多少丸みをおびている図形でも，それを三角形であると判断する子どもが少しいる。

ウ．図形②，⑨を選択した子どもが30余名で，数名の子どもが選択しなかったということから，図形の向きによっては（特に，典型的な上向きに置かれていない場合には），それを三角形と判断できない子どもが数名いる。

エ．図形⑦，⑧を選択した子どもが60%余で，約40%の子どもが選択しなかったことから，図形の大きさによっては（特に，最も長い辺に対する高さが極端に小さく細長い場合には），それを三角形と判断できない子どもが4割近くいる。

オ．図形④の凹四角形を選択した子どもが約30%いることや，図形⑦，⑧の細長い三角形を選択しなかった子どもが約40%いることから，子どもが図形を同定する際の視点としては，頂点や辺などの構成要素の数よりも「概形としてのかたち」という全体的な見えの方が優位である。

4. 第2学年「三角形と四角形」における授業の検討

(1) 理解過程を明らかにするための授業の全体計画

平面図形をその全体的なかたち（概形）として見ている第2学年の子どもたちが，その構成要素をもとにどのように理解していくのか，これが研究の出発点である。子どもたちは第1学年の学習において，平面図形や立体図形をその機能的な側面に着目して分類することができるようになってきている。その際の図形を分類する視点は，主に「概形としてのかたち」である。その上に立って第2学年では，平面図形を構成要素をもとに分析的に理解することがねらいとされている。その際の子どもの平面図形に対する認識の変化は何によって促されるのであろうか。そのことを明らかにするために，第2学年単元「三角形と四角形」を設定し，実践研究を行った。

【授業担当者】広島大学附属小学校 磯部 年晃

【授業学年】広島大学附属小学校 2部2年

(男子20名，女子18名 計38名)

①単元名 「ジオボードで形をつくろう」

(教科書単元名 「三角形と四角形」)

②指導目標

- ジオボードで構成された図形を観察・分類するなど、算数的に処理することのよさに気づくことができる。また、図形の調和のとれた形の美しさや、組み合わせでできる美しさを、具体的な操作活動を通して感じることができる。
- ものの形についての観察や構成などの活動を通して、その相違や共通点、図形の性質を考察することができる。
- ものの形についての観察や構成などの活動を通して、三角形や四角形を弁別したり、作図したりすることができる。
- 直線概念を理解し、三角形と四角形の定義や性質が分かる。

③指導計画（全11時間）

第1次 ジオボードで形をつくろう……2時間

第2次 三角形・四角形を調べよう……5時間

第3次 直角のある図形をつくろう……4時間

本稿では、以下に、この授業の全体計画における第1次の2/2時と第2次の3/5時の2時間の授業について詳しく述べる。

(2)第1次の2/2時の授業の計画

実態調査から明らかになった「図形を概形で見る見方」から、本単元の目標である「図形を構成要素の数で見る見方」へと、図形理解の変容を明らかにするために、次の2つの点に着目して授業づくりを行った。

- ① 第1学年で獲得した、図形をその機能で見る見方や概形で見る見方といった現在の自分自身の図形に対する認識をもとに、図形を分類・操作することができる課題追究の場の工夫
- ② 図形の多様な認識のよさを共有し、吟味することができる社会的相互作用にもとづく反省化の場の工夫

①課題の提示と課題追究の場の工夫

本時（第1次の2/2時）においては、前時までのジオボード、ジオペーパーによる図形の構成活動で作りだされた多様な三角形、四角形の分類の仕方を課題として取り上げる。この段階において子どもの図形のとらえ方は子どもによって個々ばらばらであり、そのズレは子どもの今までの図形の見方の違いである、ととらえられる。

図形の多種多様な分類の仕方を課題として取り上げることで、図形の見方を子ども自身にはっきりと意識させ、授業後に、新たに加わった見方は何か、それによって図形のとらえ方はどう変わったかを明確にさせ

ることができるように工夫した。

②図形の多様な認識を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場の工夫

子どもたちが分類する図形のとらえ方の中に数学的知識を発見させ、より価値ある数学的知識へと高めさせていくためには、子どもから出てくる多様な分類の視点を意味づけたり、関連づけたりすることが大切である。そのための手だてとして、子どもたちに多様な図形分類の視点を表出させ、共通点や相違点を吟味させながら、全員が納得いく考えを創り出させることが考えられる。

本時においては、反省化の段階において、子どもたちの図形のとらえ方のズレを吟味する段階がこれにあたる。より数学的な図形の見方を子ども自身にはっきりと意識させ、社会的相互作用によって新しい図形の見方の形成を図ることにした。

(3)第2次の3/5時の授業の計画

子どもの凹四角形の理解の変容を明らかにするために、自分自身の図形に対する認識を明らかにすることができる課題追究の場と、図形の多様な認識を共有し、吟味することができる社会的相互作用にもとづく反省化の場の2つに着目して、以下のようにして授業づくりを行っていく。

①課題の提示と課題追究の場の工夫

ア. 子どもたちに共有させる課題提示の場の工夫

本時（第2次の3/5時）においては、前時までのジオボードによる三角形や四角形の構成活動で作りだされた凹四角形のとらえ方を課題として取り上げる。この図形のとらえ方は子どもによって個々ばらばらであり、そのズレは子どもの図形の見方の違いであるととらえられる。

凹四角形のとらえ方を課題として取り上げることで、図形の見方を子ども自身にはっきりと意識させ、授業後に、新たに加わった見方は何か、それによって図形のとらえ方はどう変わったかを明確にさせることができるように工夫した。

イ. 多様な学習具による課題追究活動の場の工夫

子どもたちに「凹四角形は三角形か四角形か」という課題について、自分自身の図形の見方をはっきりさせるためには、学習具を限定せずに追究させることが大切であると考え。例えば、辺の数に着目した子どもにとっては、辺の数がよく分かる数え棒で図形をつくりかえることで自分の見方をはっきりするであろう。また、課題の条件にあう他の図形を構成しようとする子どもにとっては、頂点の位置を自由に変えて図形をつくることのできる「ジオボード」や「ジオペーパー」という教具をつかった方が分かりやすいである

う。このように、多様な学習具を子どもが自己選択できるように場を工夫することで、子どもに自分自身の図形のとらえ方を明確にさせることができると考えた。

②多様な凹四角形の認識を共有し、新たな図形認識の観点から凹四角形を吟味することができる社会的相互作用の場の工夫

子どもたちが意味づける凹四角形のとらえ方の中に数学的知識を発見させ、より価値ある数学的知識へと高めさせていくためには、子どもから出てくる多様な発想を意味づけたり、関連づけたりすることが大切である。そのための手だてとして、子どもたちに図形の多様なとらえ方を表出させ、共通点や相違点を吟味させながら、全員が納得いく考えを創り出させることが考えられる。

本時においては、反省化の段階において、子どもたちの凹四角形のとらえ方のズレを吟味する段階がこれにあたる。より数学的に凹四角形をみる見方を子ども自身にはっきりと意識させ、社会的相互作用によって新しい図形の見方の形成を図ることにした。

5. 第2学年「三角形と四角形」における授業の実際

(1)第1次の2/2時の授業の実際

《本時の目標》

ジオボードでつくりだした多種多様な三角形や四角形、五角形を、辺の数、頂点の数、全体的な形、角の形といった視点から分類することができる。

《授業の流れ》

[意識化]

まず、前時までに構成した図形を提示し、「自分なりの視点で仲間わけしよう」という本時の学習活動の方向性を確認する段階である。

T1 みなさん、今日は、この図形（図1～10）をつかって研究をしたいと思います。どんな研究ができますか。気づいたことを発表してください。

C1 この前の時間、みんなで作った図形だ。さんかくやしかくがたくさんあります。

C2 さんかくの帽子をつけたお家みたいな図形（図4）もあります。

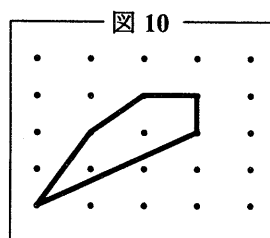
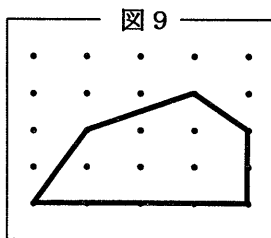
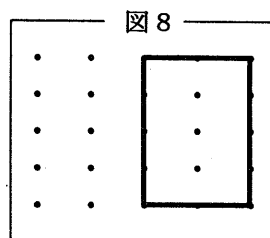
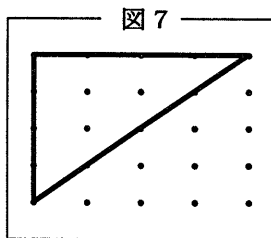
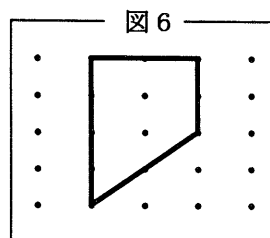
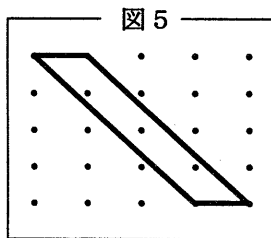
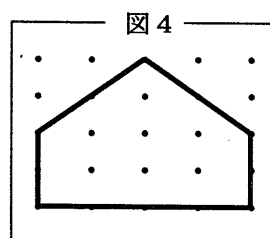
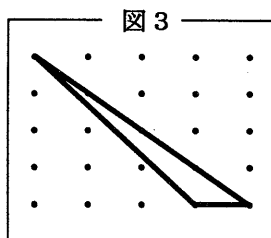
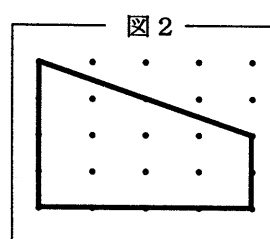
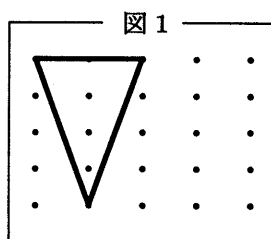
C3 カッターナイフの刃みたいな図形（図6）もあるよ。

C4 すっごく細い図形もあります。

C5 これ（図3）とこれ（図5）は、とっても形が似ているね。

C6 えー。これ（図3）は、こっち（図1）とよく似ているよ。

T2 みなさんの気づきを聞いてみると、みなさんが



つくった図形は、よく似たものがたくさんあるみたいですね。今日の研究では、前の時間にみなさんがつくった図形を仲間わけしてみましょう。仲間わけをするときには、どんなところを見ていきますか。

C7 形で見えていきます。

T3 形を見るって、もっと詳しく言ったらどんなところを見るのですか。

C8 さんかくとかしかくとかいった形です。

C9 他にもあるよ。太った形とかやせっぽっちの形とかでも見られます。

T4 たくさん出てきたね。他の見方で見る人はいないかな。

C10 かどっこがいくつあるかで仲間わけをします。
 C11 線が何本あるかで仲間わけができそうです。

子どもの反応

- ① さんかくやしかくといった概形から図形を分類しようとしている —— 8名/38名(21%)
- ② 細長い形, 太った形といった特徴から図形を分類しようとしている —— 3名/38名(8%)
- ③ 辺の数を調べて図形を分類しようとしている —— 11名/38名(29%)
- ④ 頂点の数を調べて図形を分類しようとしている —— 15名/38名(39%)
- ⑤ 角の形をもとに図形を分類しようとしている —— 1名/38名(3%)

[操作化]

次に, 子どもが自分なりの視点で図形を分類する段階である。子どもたちは, 上述の観点から, 次のように図形を分類した。

子どもの反応

- ① <さんかくやしかくといった概形から図形を分類しようとしている子ども>
 ア) 図6, 図9, 図10を集めて, 「カッターナイフの刃の形」の仲間として, 1つの集合をつかった。
 3名/38名(8%)
 イ) 図2, 図4, 図9を集めて, 「お家の形」の仲間として, 1つの集合をつかった。
 5名/38名(13%)
- ② <細長い形, 太った形といった特徴から図形を分類しようとしている子ども>
 ウ) 図3, 図5, 図9, 図10を集めて, 「細長い形」の仲間として1つの集合をつかった。
 2名/38名(5%)
 エ) 図4, 図6, 図7, 図9を集めて, 「太った形」の仲間として, 1つの集合をつかった。
 1名/38名(3%)
- ③ <辺の数を調べて図形を分類しようとしている子ども> と
- ④ <頂点の数を調べて図形を分類しようとしている子ども>
- オ) 辺の数, 頂点の数がそれぞれ5つずつあることから, 「5つの辺」の仲間や「5つの角」の仲間として, 図4, 図9, 図10を集めて, 1つの集合をつかった。
 26名/38名(68%)
- ⑤ <角の形をもとに図形を分類しようとしている子ども>

カ) 直角に着目し, 図2, 図4, 図6, 図7, 図8, 図9, 図10を集めて1角集合をつくり, 「まっすぐな角がある」仲間とした。

1名/38名(3%)

[反省化]

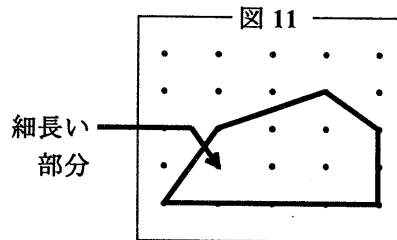
この段階では, 子どもたちの図形の分類の視点について吟味を行い, 図形の見方の共通点や相違点の気づきを出しながら, より数学的に価値ある, 子どもたちにとって納得のいくとらえ方へと高めていく段階である。

(まず初めに, 形での分類を取り上げて…)

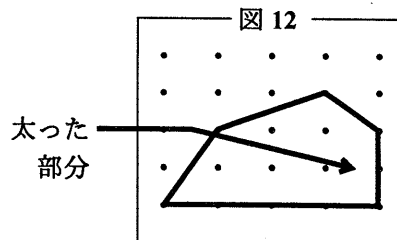
C12 ぼくは, これとこれとこれとこれ(図3, 図5, 図9, 図10)を集めて, 「細長い形」の仲間になりました。

C13 えー, おかしいよ。これ(図9)は細長くないよ。太ってるよ。

C14 そんなことないよ。ここ(図11の矢印部分)はだんだん細くなっているよ。だから, 「細長い形」の仲間だよ。



C15 絶対ちがうよ。後ろの方(図12の矢印部分)は太ってるよ。これは, 「太った形」の仲間だよ。



T5 意見が分かれていますね。みんなは, どちらのとらえ方に賛成ですか。

C16 ぼくは, 細長い仲間だと思います。太った仲間だとすると, 太った仲間はこれ(図2)もはいるから, おかしくなると思います。

C17 私は, 賛成でも反対でもないです。これ(図9)は, 「カッターナイフの刃」の仲間だと思います。だから, これ(図9)はこっち(図6, 図10)の仲間です。

T6 どんどん考えが分かれてきますね。形で分けていない人は, どんな意見を持っていますか。

の図形を選択したことから、図形の向きという三角形概念にとって本質的でない属性が捨象されている。

エ. 事前調査では約4割の子どもが図形⑦, ⑧を選択しなかったが、事後調査では90%余りの子どもがこれらを三角形であると判断できるようになった。しかし依然として、2, 3名の子どもはこれらを三角形と判断できていない。

オ. 事前調査では図形④の凹四角形を選択した子どもが約30%いたが、事後調査でも依然として約20%の子どもがこの図形を三角形だと判断している。

これらのことから、子どもたちにとって、図形を同定する際の視点としては、「概形としてのかたち」という全体的な見えよりも頂点や辺などの構成要素の数の方が優位になってきていることが分かる。しかしながら、図形④の凹四角形については、図形を構成要素の数に着目して見る見方を活用できていないことが分かった。その理由として、凹四角形の形の特殊性が考えられる。そこで、次の第2次の授業実践では、子どもの図形認識を広く活用できるようにすることを目的として、凹四角形の認識を課題として取り上げ、実践を行った。

(2)第2次の3/5時の授業の実際

《本時の目標》

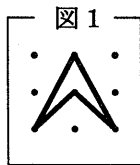
凹四角形は三角形か四角形かについて、辺の数、頂点の数という視点から明らかにすることができる。

《授業の流れ》

[意識化]

まず、前時まで構成した図形の中から、子どもたちが十分に分類できなかった凹四角形を提示し、「三角形か、四角形かにしよう」という本時の学習活動の方向性を確認する段階である。

T1 みなさん、今日はこの図形(図1)をつかって研究をしたいと思います。どんな研究ができますか。気づいたことを発表してください。



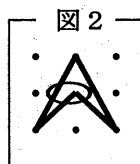
C1 この前の時間、みんなで悩んだ図形だ。これ三角形だよ。

C2 四角形だよ。へっこんでいる三角形なんておかしいよ。

C3 絶対、三角形だよ。こんな形の四角形なんてないよ。

C4 角が4つあるから四角形だよ。

C5 ここ(図2の○の部分)は角って言わないよ。外にとんがってないよ。だからこれは三角形だよ。



T2 みんなの意見を聞いていると、この図形は、三角形か四角形かはっきり

しないみたいですね。今日の研究では、この図形が三角形か四角形かはっきりさせましょう。どうしたらはっきりさせることができるかな。

C6 辺の数を調べたらいいです。

C7 これと似た形をジオボードでたくさん作って調べたら、三角形という証拠がたくさん出てくると思っています。

C8 数え棒をつかって同じ形を作ってみたら、辺や頂点がいくつあるか分かると思います。

子どもの反応

- ① 凹四角形を概形から三角形だととらえている _____ 12名/38名 (32%)
- ② 凹四角形を構成要素の数から四角形だととらえている _____ 22名/38名 (58%)
- ③ 凹四角形は三角形か四角形かはっきり分らない _____ 4名/38名 (11%)

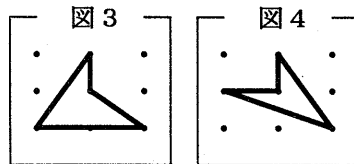
[操作化]

次に、凹四角形が三角形か四角形かの根拠を探す段階である。

子どもの反応

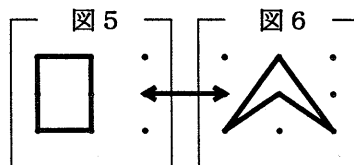
①<凹四角形は三角形と考えている子ども>

ア) ジオボードで凹四角形を数個つくり、概形が三角形になることを確かめている。(図3, 4)



7名/38名
(18%)

イ) 正方形や長方形との違いを調べて、三角形になることを確かめている。(図5, 6)

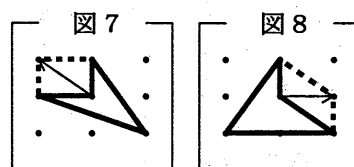


5名/38名
(13%)

②<凹四角形は四角形と考えている子ども>

ウ) 辺の数、頂点の数をはっきりさせるために、粘土と数え棒で図1と同じ形を構成し、四角形になることを確かめている。15名/38名 (39%)

エ) ジオボードでへこんだ角の部分进行操作して、辺の数と頂点の数を確かめている。(図7, 8)



7名/38名
(18%)

③<凹四角形は三角形か四角形か、はっきり分らない子ども>

イ) 正方形や長方形との違いを調べて、三角形になることを確かめている。

1名/38名(3%)

ウ) 辺の数、頂点の数をはっきりさせるために、粘土と数え棒で図1と同じ形を構成している。

3名/38名(8%)

[反省化]

この段階では、子どもたちの凹四角形のとらえ方について吟味を行い、図形の見方の共通点や相違点の気づきを出しながら、より数学的に価値ある、子どもたちにとって納得のいくとらえ方へと高めていく。

(上記のア、イ、ウの図形のとらえ方を発表させて…)

C9 (ウの) 辺の数と頂点の数は確かに4つになると思います。でもそれだったら、いままで三角って思っていたものも、四角形になったりするから分かりにくくなります。

C10 でも、三角形は辺も頂点も3つだから、やっぱり三角形じゃないと思います。

C11 やっぱり四角形には見えないよ。ぱっと見て三角っぽいから三角形でいいんじゃないかな。

C12 見た目で決めたら絶対おかしいよ。辺の数が4つだから絶対、四角形だよ。

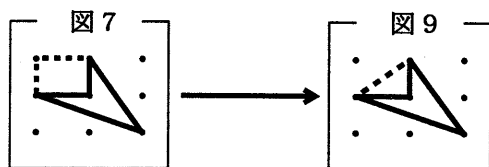
T3 なかなかみんなが納得できませんね。他の調べ方で三角形になるか四角形になるかを調べたお友達に発表してもらいましょう。

(エの操作による図形のとらえ方を発表させて…)

T4 このやり方(エの操作)だと、今日の課題の形は四角形になるけど、みなさんの考えはどうですか。

C13 これ(エの操作)だと点の場所が1つ外側に行っただけで、四角に見えてくるから、やっぱり四角形になると思います。

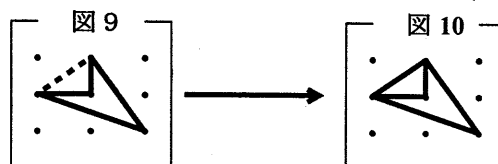
C14 えっ、点の場所をずらしていいのなら、こんなずらし方(図9)でも、いいんじゃないですか。これだったら三角形だよ。



C15 それは、おかしいと思います。それ(図9のやり方)だったら、頂点が1つなくなっています。それだったら、四角形は全部三角形になってしまいます。C16 点の数を変えるのはルール違反だよ。

C17 今の(図9の操作)を見て思ったんだけど、(ジ

オボードにもう1本輪ゴムをかけて)、こうやったら(図10)2つの三角形ができるよ。2つの三角形に分けられるから、やっぱり四角形じゃないかな。



C18 えー。四角形は全部三角形に分けられるの。

C19 三角形も点と点を結んだら2つの三角形ができると思います。

T5 みんなの中から、三角形か四角形かをはっきりさせる面白い考えが出てきたね。それでは、別の三角形や四角形で試してみましょう。

C20 今まで研究してきた三角形は、分けられないよ。

C21 四角形は、1つとばしの点で2つの三角形に全部分けられるよ。

C22 やっぱり四角形みたいだね。

T6 三角形は2つに分けられないみたいですね。

C23 三角形には1つとばしの点がないからです。

[協定化]

最後は、子どもたちが新しく獲得した凹四角形のとらえ方について整理し、次時への課題を構成する段階である。

T7 今日の課題の図形は、三角形ととらえられるかな、それとも四角形ととらえられるかな。

C24 四角形だと思います。はじめは三角形だと思っていたけど、分けられるから四角形になると思います。

T8 今日の研究で、みんなが納得できる図形の見方は図形のどんなところを見ていくことかな。

C25 辺の数や頂点の数です。

C26 それだけじゃないよ。分けることができると、一番ははっきり分かるよ。

C27 先生、四角形っていろいろあるんだね。

T9 そうですね。では、次の時間はどのような研究ができますか。

C28 もっといろいろな形の四角形をたくさん見つけたい。

C29 もっと点々がたくさんあるジオボードで四角形をつくってみたい。

T10 次の時間は、もっと点がたくさんあるジオボードで、もっとたくさんの四角形を見つけてみましょう。

《授業の考察》

①課題の提示と課題追究の場の工夫について

本時(第2次の3/5時)においては、それまでの学習の流れと子どもの疑問を重視して、教科書では普通

扱わない凹四角形のとらえ方を、敢えて学習課題として取り上げた。実際、子どもたちのC1, C2, C3, C4の発言からも明らかなように、この授業の意識化の段階では子どものこの図形に対する見方の違いを明らかにすることができた。

また、子どもたちに「凹四角形は三角形か、四角形か」についての自分自身の図形の見方をはっきりさせるために、学習具を限定せずに追究させたことは、操作化の段階に見られるように、子ども自身のもっている数学的な知識を用いて、平面図形を意味づける活動につながったと言える。

②図形の多様な認識を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場の工夫について

本時の最初の課題追究の場においては、平面図形を分割するという方法は、子どもたちの発想にはなかった。しかし、その後の反省化の段階で、ジオボードを用いて図形を操作する中から「四角形は、1つとばしの頂点を結ぶことで、2つの三角形に分割できる」という新たな発想が創発した。このことが結果として、「凹四角形は、三角形ではなく、四角形だ」という全員の納得を生み、子どもたちの平面図形の理解を深めることにつながった。このようにして、それまで凹四角形についてはその概形に着目してしまっただけで構成要素に着目することができなかった12名の子どもたちも、この授業の反省化の段階で、図形をみる新たな見方が加わったことにより、図形の認識を変化させることができたのである。それゆえ、子どもの図形の理解を深めるためには、図形の多様な認識を共有し、吟味し合う場が有効であると言えよう。

6. 結論

本稿では、小学校第2学年の子どもが三角形や四角形概念を学習する際の理解過程に焦点を当てて、事前調査、授業実践、事後調査を通して、これらの図形についての子どもの理解過程を実証的に解明しようとした。本稿で対象としている小学校第2学年における図形の学習は、ファン・ヒーレの思考水準における第1水準から第2水準への移行期に相当する。そして、対象とする子どもの数（1クラス38名）が少ないので一般性には欠けるが、授業実践を通して、教室における個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて、その変容の過程を具体的に解明しようとしている点に本研究の大きな特色があると言える。

小学校第2学年の子どもが三角形や四角形概念を学習する前に実施した事前調査によって、①すべての子どもが三角形を直線で構成されているものとして理解している、②完全に閉じていない図形でも、あるい

は1つの角が多少丸みをおびている図形でも、それを三角形であると判断する子どもが少しいる、③図形の向きによっては、それを三角形と判断できない子どもが数名いる、④図形の大きさによっては、それを三角形と判断できない子どもが4割近くいる、⑤子どもが図形を同定する際の視点としては、頂点や辺などの構成要素の数よりも「概形としてのかたち」という全体的な見えの方が優位である、という理解の程度が明らかになった。

そこで、こうした実態を踏まえて、子どもたちが三角形や四角形を、構成要素に着目して分析的に理解できるようにするために、全11時間の授業計画を立てて、実践した。さらに、事後調査を実施して、学習による子どもの理解の変容を把握しようとした。

第1次の2/2時の授業後に実施した事後調査の結果から、①すべての子どもが三角形を直線で構成されているものとして理解している、②完全に閉じていない図形や1つの角が多少丸みをおびている図形を、三角形であると判断する子どもはいない、③図形の向きという三角形概念にとって本質的でない属性が捨象されている、④図形の大きさ（形）に惑わされる子どもはほとんどいない、⑤約2割の子どもが依然として凹四角形を三角形だと判断している、とうことが明らかになった。

このように、上記⑤を除いて、学習の成果として、子どもたちが図形を同定する際の視点として、「概形としてのかたち」という全体的な見えよりも「頂点や辺の数」という構成要素の数の方が優位になった。それは、授業の考察のところで述べたように、課題の提示と課題追究の場を工夫し、子どもたちの図形の多様な認識を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場を工夫した成果であると言える。

しかしながら、上記⑤のように、凹四角形については、約2割の子どもたちが図形を構成要素の数に着目して見る見方を活用できていないことも明らかになった。しかも、第2次の1/5時の授業において、「三角形は、辺の数と頂点の数が3つの図形」、「四角形は、辺の数と頂点の数が4つの図形」という子ども同士の間での合意事項（定義に相当）にもかかわらず、「凹四角形は、三角形か、四角形か」で子どもたちは悩んでいた。そこで、第2次の3/5時の授業においては、それまでの学習の流れと子どもの疑問を重視して、教科書では普通扱わない凹四角形のとらえ方を、敢えて学習課題として取り上げた。この授業では、子どもたちみんなが納得できる「凹四角形が三角形か四角形かの根拠」をはっきりとさせることが学習のねらいとなっており、それについての学習によって、ファン・ヒ

一レの思考水準における第1水準から第2水準への移行を確認することができた。それは、換言すれば、小山が構築した数学理解の2軸過程モデルの水準が上昇したことを意味している。その結果、「四角形は、1つとばしの頂点を結ぶことで、2つの三角形に分割できる」という、この教室の子どもたちはもちろん教師にとっても新しい考えが創発し、「凹四角形は、三角形ではなく、四角形である」という全員の納得を生み、子どもたちの平面図形の理解を深化させることにつながったのである。

このように子どもたちの理解が深化したのは、なぜだろうか。その結論を端的に言えば、教師が子どもたちの理解の程度や課題意識を把握して授業を計画し、子どもたち自身が個人的構成と社会的構成を行ったからだと言えよう。ここでの個人的構成とは、授業の実際のところで詳しく述べられているように、主として、意識化や操作化の段階における活動であり、社会的構成とは反省化や協定化の段階における活動である。

具体的には、第1次の2/2時の授業では、まず意識化の段階で、子どもたちが自身が前時にジオボードで作りだした図形を見て、個々の子どもが独自の視点から形に着目したり、図形の類似点や相違点に気づいたりしている。そして、操作化の段階では、一人ひとりの子どもが実際に図形を仲間分け(分類)している。それをもとに、反省化の段階では、仲間分けの結果とその観点について子どもたちが話し合い、教室のみんなが納得できる考えは何かという議論から、協定化の段階では、「仲間分けがバラバラにならないで、便利な考え方」として「角(頂点)の数」、「線(辺)の数」で調べればよいことが合意されている。

また、第2次の3/5時の授業では、まず意識化の段階で、凹四角形が三角形か四角形かについて、個々の子どもが判断やそのことをはっきりさせるための見通しをもってきている。そして、操作化の段階では、一人ひとりの子どもが、粘土と数え棒、ジオボードを用いて、各自の見通しのもとに三角形か四角形かの判断の根拠を探究している。その後、反省化の段階では、判断の根拠について子どもたちが話し合っている。その中で、「ジオボードで内側に凹んだ角の部分(頂点)を操作して、凸四角形に変形して辺の数と頂点の数を確かめる」という子どもの考えと、それに対して「点(頂点)の場所をずらしてもよいなら、三角形になる」という子どもの反論が契機となって、それまでにはなかった「凹四角形は2つの三角形に分けられる」という新しい考えが創発しているのである。そして、この新しい興味深い考えを別の三角形や四角形で試すことによって、協定化の段階では、みんなが納得できる図

形の見方として、「辺の数や頂点の数」、「分けることができるかどうか」ということが合意されている。

このように、算数学習において個人的構成と社会的構成の両方の活動が行われてはじめて、教室における個々の子どもや子どもたちの理解が深化し得ると考えられる。とりわけ、操作化の段階において一人ひとりの子どもの個人的構成を重視し、その結果としての多様な認識や考えを生かして、反省化の段階において教師が子どもたちの社会的構成を組織化することによって、それら多様な認識や考えを子どもたちが共有し、吟味しあうことが重要であり、そのようなことができる教室の雰囲気が必要不可欠である。

【付記】

本稿は、平成13年度科学研究費補助金基盤研究(C)(2)(代表者小山正孝、課題番号13680306)の研究成果の一部である。

参考文献

- 1) 小山正孝(1997)「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.
- 2) Koyama, M. (1997) Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol.5, pp.21-33.
- 3) 小山正孝, 中原忠男, 武内恒夫, 赤井利行, 宮本泰司, 脇坂郁文(2000)「算数学習における理解過程に関する研究(I)」, 『広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要』, 第28号, pp.117-123.
- 4) van Hiele, P. M. (1986) *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press, Inc.
- 5) 小山正孝(1987)「van Hieleの『学習水準理論』について」, 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 第47・48巻, pp.48-52.
- 6) 小山正孝(2001)「数学教育における指導方法の基礎理論」, 数学教育学研究会編『新版数学教育の理論と実際(中学校・高校)』, 聖文社, pp.38-47.
- 7) Burger, W. F. & Shaughnessy, J. M. (1986) Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol.17, pp.31-48.
- 8) Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992) Geometry and Spatial Reasoning. In Grouws, D. A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, MacMillan, pp.426-434.

RESEARCH ON THE PROCESS OF UNDERSTANDING CONCEPTS OF TRIANGLE AND QUADRILATERAL IN A CLASSROOM

Masataka Koyama

Graduate School of Education, Hiroshima University
1-1-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, Hiroshima, 739-8524 Japan

In order to understand the process of understanding mathematics, Koyama (1992) presented the so-called “two-axes process model” of understanding mathematics as a useful and effective framework for mathematics teachers. The model consists of two axes, i.e. the vertical axis implying levels of understanding such as mathematical entities, relations of them, and general relations, and the horizontal axis implying three learning stages of intuitive, reflective, and analytic at each level. By analyzing an elementary school mathematics class in Japan, Koyama (2000) demonstrated the validity and effectiveness of this model and suggested that a teacher should make a plan of teaching and learning mathematics in the light of “two-axes process model” and embody it with teaching materials of a topic in due consideration both of the objectives and the actual state of students, and that she/he should play a role as a facilitator for the dialectic process of individual and social constructions through a discussion with students.

The purpose of this research is to examine closely the 38 second-graders' process of understanding concepts of triangle and quadrilateral in a classroom at the national elementary school attached to Hiroshima University. These students are characterized to be at transitive stage from the first to the second level of geometrical thinking in terms of van Hiele Model (1986). In order to promote and improve their understanding concepts of triangle and quadrilateral, with a classroom teacher, we planned the teaching unit of “Let's make figures with geo-board” and in total of 11 forty-five minutes' classes were allocated for the unit in the light of “two-axes process model”. The data was collected in the way of observation, videotape-record, and pre- and post-tests during these classes, and analyzed quantitatively and qualitatively to see the change of students' thinking level and the dialectic process of individual and social constructions through discussion among them with their teacher in the classroom. First, as a result of first two classes of them, the quantitative analysis of pre- and post-tests showed the remarkable improvement of students' understanding concepts of

triangle and quadrilateral from the first to the second level. Second, as a result of the qualitative analysis of students' discussion on whether a "concave quadrilateral" is triangle or quadrilateral in the fifth class, we found that students could investigate and communicate the reason of their own judgment with geo-board, geo-paper or matchsticks, and that such a new idea/definition was emerged that a "concave quadrilateral" is not triangle but quadrilateral because it is divided into two triangles by the line segment connecting two opposite vertices.

References

- Koyama, M. (1992), Exploring Basic Components of the Process Model of Understanding Mathematics for Building a Two-Axes Process Model, *Proceedings of the 16th PME Conference*, New Hampshire, USA, 2, 17-24.
- Koyama, M. (2000), A Research on the Validity and Effectiveness of "Two-Axes Process Model" of Understanding Mathematics at Elementary School Level, *Proceedings of the 24th PME Conference*, Hiroshima, Japan, 3, 159-166.
- van Hiele, P. M. (1986), *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press, Inc.

算数学習における理解過程に関する研究 (Ⅲ)

— 第5学年における「台形の面積の求め方」を中心に —

小山 正孝 赤井 利行 中原 忠男
中村 武司 磯部 年晃
影山 和也 和田 信哉 中西 正治
岩田 耕司

(協力者)

1. 目的と方法

本研究は、算数学習における子どもの理解過程を、理論的・実証的に解明しようとするものである。これまでの数学の理解過程に関する研究¹⁾²⁾によって、数学的概念や原理・法則などを理解するということは、本質的には、個々の子どもの心的活動であり、複雑で力動的な過程であるが、他方では、教室で行われる算数学習においては、子どもの理解過程はその子どもと教師、子ども同士の社会的相互作用の影響を受けることが明らかになってきている。そこで、本研究では、算数学習における理解過程を、これら個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて解明することを目的とする。

そのために、まず本研究の第1報³⁾では、理論的研究として、小山が構築した数学理解の2軸過程モデルについて、このモデルの根底にあるパラダイムや認識論と、数学理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸に設定することの妥当性を、文献解釈的方法によって再検討した。そして、第2報⁴⁾では、その実証的研究として、「図形」領域の学習において、小学校第2学年の子どもが三角形や四角形概念を学習する際の理解過程に焦点を当て、事前調査、授業実践、事後調査を通して、これらの図形についての子どもの理解過程を実証的に解明した。

第3報である本稿では、「量と測定」領域の学習において、小学校第5学年の子どもが台形の面積の求め方を学習する際の理解過程を実証的に解明することを目的とする。台形の求積公式そのものはこのたびの学習指導要領(平成10年告示,平成14年度実施)では削除された内容であるが、台形の面積の求め方を子ど

も自ら工夫して考えることは価値ある学習である⁵⁾。そこで、本稿では「台形の面積の求め方」についての授業を計画・実施し、その授業実践を通して、教室における個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて、子どもの理解過程を具体的に解明することとする。

2. 授業の計画

(1) 計画の概要

【授業学年】 広島大学附属小学校 2部5年
(男子19名 女子20名 計39名)

①単元名 面積

②単元目標

- 図形の求積に必要な部分の長さに着目して、計算で面積を求めようとする。(関心・意欲・態度)
- 既習の求積方法を基にして、倍積変形・等積変形などの操作を通して公式にまとめることができる。(数学的な考え方)
- 求積公式を適切に活用し、図形の面積を求めることができる。(表現・処理)
- 三角形・平行四辺形・ひし形・台形の面積の求め方や求積公式の意味がわかる。(知識・理解)

③指導計画(全15時間)

第1次	面積の求め方の工夫	1時間
第2次	三角形の面積	4時間
第3次	平行四辺形・ひし形の面積	4時間
	(習熟度別編成)	
第4次	台形などの面積	3時間
第1時	台形の面積の求め方(本時)	
第2時	台形の求積公式	
第3時	五角形の面積	

- 第5次 辺の長さとの面積の関係 …… 2時間
- 第6次 まとめの練習 …… 1時間

(2) 事前研究

①教材分析

本単元は、既習の図形の求積方法を基に、三角形及び平行四辺形などの四角形の面積を求めることが主ねらいである。子どもたちは、本学年までに正方形や長方形などの図形の面積の求め方を学習してきた。

本単元では、三角形や平行四辺形、台形などを長方形に変形したり、学習した図形を活用したりして新たな図形の面積を求める算数的活動を行う。この算数的活動では、既習の求積可能な図形の面積の求め方を基に考えたり、求積公式を作り出したりする。そして、この活動の過程で一般化の考えや論理的な考えなど数学的な考え方を育成することが重要である。したがって、新たに面積を求める図形に対して既習の図形の求め方を活用するなど、面積を求める過程を重視して学習することが必要である。また、このような数学的な考え方を獲得することで、一般の四角形、五角形などの様々な図形に対して、子どもたちは自らの考えに基づいて工夫し、面積を求めることができる。

本時は、台形の面積の求め方を考えるという算数的活動を行う。この算数的活動は、平行四辺形や三角形の面積の求め方を活用したものである。そして、この学習は平行四辺形や三角形の面積の求め方の発展的内容の学習である。したがって、本時は子どもの既習の学習を生かし、子ども自身が学習を構成していくという展開で進めていく。

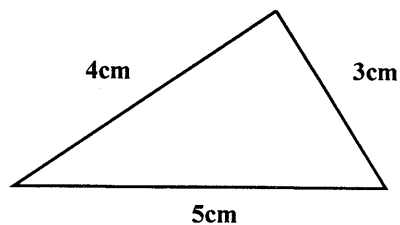
そうすることによって、子どもたちは、既習の求積可能な図形の求め方を基に、新たな図形の求め方をイメージすることができる。そして、このイメージを基に数学的なコミュニケーションをもつことで、子ども個々の求積に対する数学的な考え方が高まり、理解もより深まると考えられる。

したがって、本単元では、子ども個々の既習事項を活用した考えと、数学的なコミュニケーションに基づく社会的相互作用による理解過程を重視し、図形の面積の求め方についての知識・技能、数学的な考え方を高めていく授業を展開していく。

②子どもの実態

本時の授業に入る前の子どもたちの実態を把握するために、既習の三角形・平行四辺形の求積問題について簡単な調査を行った。その結果は次のとおりである。

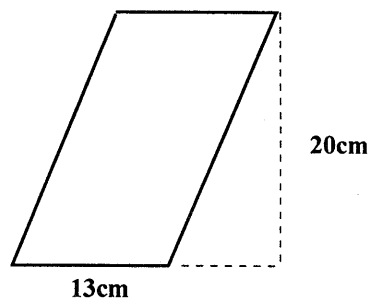
三角形の求積 (39名中 33名正答・6名誤答)
次の三角形の面積を求めなさい。



(誤答)

$5 \times 4 \div 2 = 10$	3名
$5 \times 3 \div 2 = 7.5$	1名
$3 \times 5 = 15$	1名
35	1名

平行四辺形の求積 (39名中 33名正答・6名誤答)
次の平行四辺形の面積を求めなさい。



(誤答)

$13 \times 20 \div 2 = 130$	4名
$13 \times 20 = 200$	1名
無答	1名

この結果から、子どもたちは、三角形および平行四辺形の求積については8割以上の子どもが理解している。また、両問とも間違っている子どもが3名おり、この3名はともに、本単元第3次の平行四辺形・ひし形の習熟度別指導では「じっくりコース」の子どもたちである。この点では、理解の遅い子どもに対してさらに重点的な指導が必要であるといえる。

(3) 理解過程を重視した授業づくりの工夫

①既習事項の確認

算数科授業では、新しい数学的概念や原理・原則を学習するとき、子どもたちの中で学習の方法がわからず、どのように取り組めばいいのか迷い、手がつけられずに終わることがある。これは、子どもたちの中に、新しい数学的概念や原理・原則を学習するとき、既習の学習内容を再構築して取り組むことができないことが上げられる。さらに、これから取り組む課題に対して、自分自身の今理解している内容が意識化されてい

ないことである。

したがって、理解過程を重視した算数科授業では、子どもが数学的概念や原理・原則を理解する個々の子どもの心的活動を保証するために、学習目標に対して、自分自身が何を理解しているのか、どのような考え方が使用できるのかなど、現在の自分自身の理解を意識化しておく必要がある。

本授業では、平行四辺形が三角形に分割して求められたことを想起させることから導入する。この既習の図形に分割するという考え方を基に、台形の面積の求め方を考える。(図1)

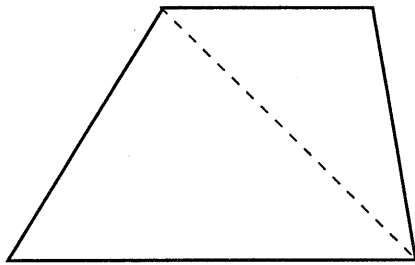


図1

②数学的な考え方を生かした発展的内容の学習

第5学年の「面積」の学習では、三角形、四角形の求積方法を理解することがねらいである。そこでは、四角形として平行四辺形やひし形を取り扱うが、台形の面積を求めることは学習指導要領では求められていない。

しかし、本時では、台形の面積の求め方、特に、台形を既習の図形に分割する学習を取り扱うことにする。このような発展的な内容を取り扱うことは、既習の学習内容を活用して、子ども自らが新たな問題を解決するという理解過程で重要な子どもの心的活動を促すと考えるからである。子どもの心的活動を促す際には、単に問題を難しくしたり、次の学年の問題を提示したりするのではなく、子どもが学習し理解している数学的な考え方が活用できるようにし、数学的な考え方の活用を通して、子どもの理解を深めることにつながるようにすることが大切である。

したがって、発展的内容の学習指導のねらいは次の2つである。1つ目は、算数教育の目標である「数学的な考え方」の1つである「発展的な考え方」の育成にある。2つ目は、発展的内容の学習を通して、基礎・基本を含め既習の学習の理解を深めることとその定着にある。つまり、発展的内容の指導を次のようにとらえることが重要である。「発展的な内容を子ども自身が既習の発展的な考え方を活用して考え、解決して

いく。その結果、子どもは発展的に考える態度を育成し、発展的内容を理解する。さらに、発展的な考え方を深化・拡張していく。」

それゆえ、本授業実践では、三角形・平行四辺形の求積の発展的内容として、台形の求積方法を取り扱う。ここでは、三角形・平行四辺形の求積方法とりわけ、倍積変形・等積変形の求め方という数学的な考え方を活用して、台形を変形するという発展的な考え方を深化・拡張させ、子どもの理解を深めることをねらうのである。

③子どもの理解度に応じた指導

子どもたちは、学習内容に対する理解度に大きな差異が見られる。この差異の克服に向けて、今日の小学校では、算数科授業を中心に少人数授業やチームティーチングに向けた加配教員など新しい授業スタイルが模索されている。本単元では、第3次の平行四辺形とひし形の学習指導において、「じっくりコース」と「かけ足コース」の習熟度別コースを設定し、習熟度別授業を試みる。

この習熟度別に分けた少人数指導で、平行四辺形では、既習の三角形や長方形にいかに変形するかを重視して指導する。「じっくりコース」では、平行四辺形をどのように分割するか目標を決める。そしてその分割の方法を1つ1つ丁寧に確認し、既習の学習とのつながりをつかめるものとする。一方、「かけ足コース」では、平行四辺形の分割の方法を1つ1つ取り上げるのではなく、子どもたち自身がそれらの分割方法を見つけ出し、その方法を全体で分析し、比較検討する。

さらに、ひし形では、対角線の位置をずらして、たこ形などの図形を発展的に取り扱う。(図2)

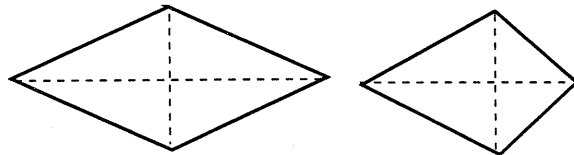


図2

3. 授業の実際

(1) 本時の目標

- 台形を既習の図形に変形したり、倍積変形の仕方を工夫したりして、台形の面積の求め方を考えることができる。
- 図形の面積の求め方を、三角形に分割して求めることができることに気づく。

(2) 授業の実際

C この前の時間の、台形と円とアメーバのようにぐしゃぐしゃな形について、どの順で授業をするかということについて、今まで、三角形・四角形をしてきたので、台形を抜かして円やアメーバをするよりも、台形を終わらせてから、円やアメーバの形をすればよい。(図3)

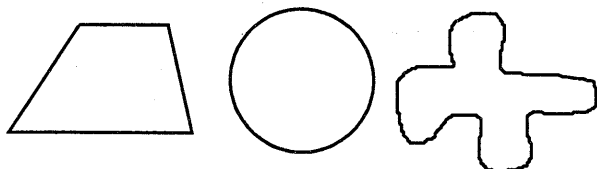
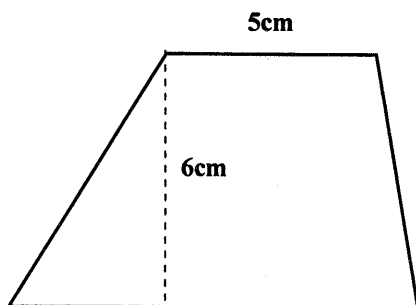


図3

C 私は、台形、円、アメーバの形がいいと思うのだけど、前の時間にたこ形をしているので、台形をした方がいいと思う。

T じゃ、今日は、台形の面積を求めます。(図4)



10cm
図4

T 台形の面積を求めるのに、使える考え方は何でしょう。

C 平行四辺形の求め方。

C 三角形の求め方。

C 長方形の求め方。正方形とひし形の求め方。

T 面積を求めるのに、求め方は、自分の中で、どういう求め方、どんな形にするのか、自分たちが知っているどれを使いますか。

T どういうふうに変形しますか。

C 台形を2つに分ける。

C その面積を倍にする方法。

T 倍にするのは、どういう形になるのかわかりますか。

C はい。(うなずいている)

T 等積は、いくつの方法がありますか。

C 1つある。

T 1通りしかない。

C 1つが2つある。

T わかるかな。

C (台形を斜めに、左から右、右から左へと切るジェスチャーを行ってみせる。)

T これで、倍積変形と合わせて、3つの考え方があるのですね。

T 倍にするのは、どのような形になりますか。

C 平行四辺形です。(図5)

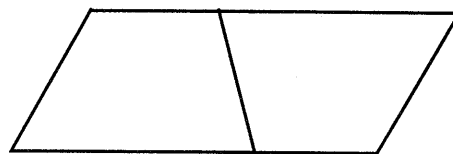


図5

T 2つに分けるのは、三角形ですね。それ以外の形を考えることはできませんか。(図6)

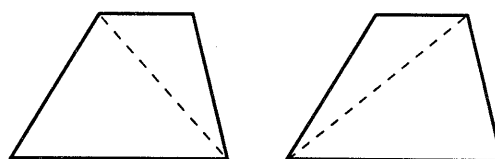


図6

T 自分が形を変形して、面積を求められる形に変えることができないかな。

T 3通りみつけた人は、その3通りをかきなさい。もっとみつけた人は、その4番目の求め方からかきなさい。

C (求め方をノートにかく)

T (机間巡視)

T (黒板に掲示する考え方を子どもたちに指示する)

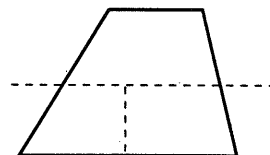


図7

T 左から、右下に切った考え方ですね。(図7)

T 次のこれは、先生がするとは思っていなかった考え方です。

T 説明してもらう前に、見てください。

C 四角形と三角形に分けています。(図8)

C 下の所は、真ん中なのですか。

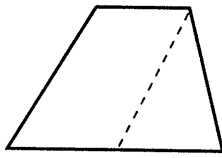


図 8

- T フリーハンドでかいているけれど、これはどんな形になっているかな。
- C 平行四辺形です。
- C 上底の 5 cm を使って、下におろしているところがいい。
- C 三角形と平行四辺形という習っていることを生かしているのがいい。
- T この形で、面積を求めてみよう。
- T 次のを説明してください。
- C 台形を上下に半分に切って、台形の上の部分(ア)を切ると下の部分(イ)とちょうど面積が等しくなっていて、それを動かすと 2 つの長方形になって面積を出すことができる。(図 9)

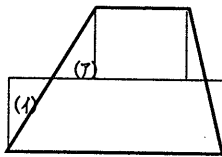


図 9

- T この方法で、面積を出してみよう。
- T 次の方法の人、発表してください。
- H 縦に切って、長方形と 2 つの三角形に分ける。すると、この長方形の面積が出て。

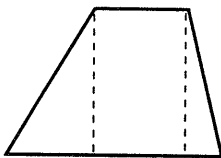


図 10

- T そこで、待ってください。この長方形の部分の面積がでるのですね。
- (図 10 をもとに確認をする)
- C 30 cm^2 です。
- T この三角形の面積を求めることができるのかな。
- C できる。
- T 面積は出るけれど、求められない人?
- C (数名挙手をする)

- T どうしたら、求められるのかな。
- N この三角形とこの三角形の底辺を合わせたら、5 cm で、高さが 6 cm だから求まります。
- S 長方形をぬいて、2 つの三角形をひっつけたらできます。(図 11)

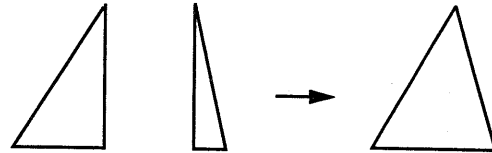


図 11

- C うわあー。
- C すごい!
- T N 君の考え方を説明しますね。
- T 何をしようとしているのか、わかるのかな。
- C やっぱりや。
- T すごいね。習った考え方をうまく使っているね。
- C 上の辺が 5 cm で、結果的に三角形の底辺の長さが 5 cm だけど、左側の底辺を□で、右側を○にたとえたら、

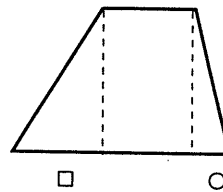


図 12

- T (図 12 に記号を入れる)
- H 計算したら、
 左側は $\square \times 6 \div 2$ 、右側は $\circ \times 6 \div 2$
 結果的に、 $(\square + \circ) \times 6 \div 2 = 5 \times 6 \div 2 = 15$
- T 他の計算もかいてください。
- C (黒板にかく)
- T まだ、ないかな。
- C 上の辺を右側に伸ばして、たこ形にする。そして、右側の辺に高さを求めて面積を求めるといい。
- C たこ形の求め方を使っているいい。
- C 台形は、たこ形に似ているとっていたのでこの考え方はいい。
- C でも、この斜めの辺の長さがわからないので求められない。(発表者自身が気づく)
- C 等積でも倍積でもないのだけど、上の辺を伸ばして、横が 10 cm の長方形にして、三角形の部分を引き

けばいい。(図 13)

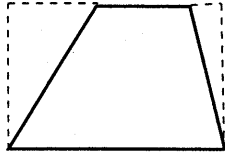


図 13

- C H君の考え方に似ている。
 T H君はどうしているの。
 C たしているけれど、これは引いている。
 T 次の人。
 C 僕は、この台形を同じ三角形3つに分けて、
 $5 \times 6 \div 2 \times 3$ をして、求めました。(図 14)

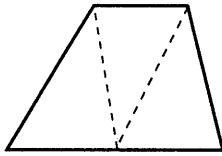


図 14

- T この考え方にあるものを加えました。
 T 思い出さない？ 4枚の色板で勉強したこと。
 C (ノートを見て、確認する)
 T 特別なときだけです。(図 15)

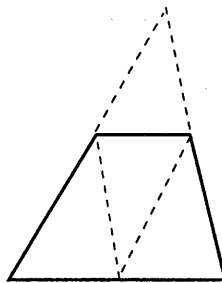


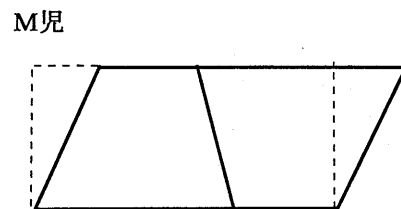
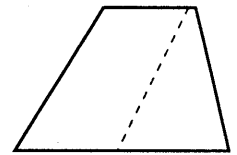
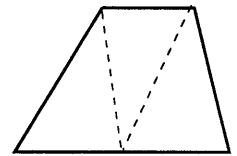
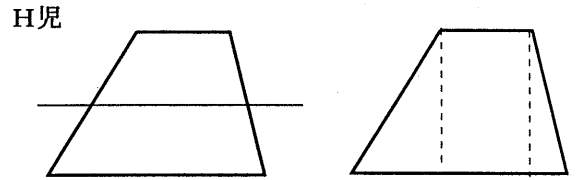
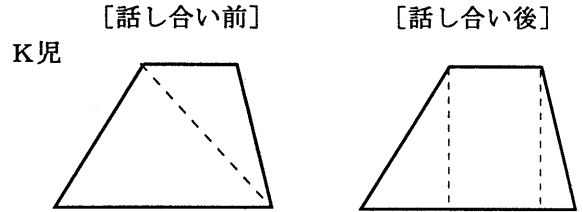
図 15

- C 敷き詰めや。
 T (図示する)
 T この面積は、どうして求めるのかな。
 C 大きな三角形から、小さい三角形を引けばいい。
 T こんな風に考えたら、わかりやすいね。ここで、
 終わります。

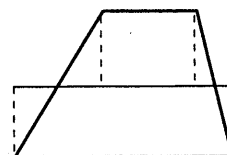
(3) 子どもの変容

三角形・平行四辺形の求積の問題を2問とも誤答した3名(K児, H児, M児)について、本授業で話し合う前に気づいていた分割と話し合い後に理解した分

割を示すと次のようになる。



なし



子どもたちにとって、長方形に変形することと三角形に分割することは理解しやすいが、長方形と三角形2つに分割することはなかなか気づかないかようである。しかしながら、三角形を動かすなど、授業中に視覚的な活動があったため、この分割は子どもたちにとって印象的な分割であったようである。(図 16)

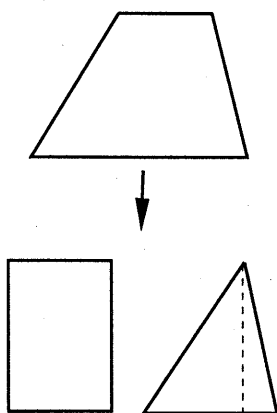


図 16

また、この2名（K児，H児）以外にも15名（合計17名）の子どもたちがこの長方形と三角形2つに分割する方法を上げている。このことから、子どもたちは、単に台形の面積を求める計算の簡単な分割よりも、印象に残る動的な活動を伴う考え方の方に着目する傾向にあると言える。

4. 授業の考察

(1) 既習事項の確認について

本時の学習のねらいは、台形を既習の図形に分割して、その面積を求める方法を考えることであった。この時点での既習事項は、長方形、三角形、平行四辺形の求積方法であった。

ここでの既習事項の確認については、次の2つの方法が考えられる。1つは、長方形の求積方法ならその図形を見せ、その求積公式を確認することである。もう1つは、それを学習したときの様子を思い浮かべて、その分解の方法を確認することである。本時は後者の方法を採用し、分割の方法をイメージする形態をとった。このことは、単に既習事項を想起させるだけでなく、その時学習した内容を思い起こさせ、既習事項を子ども自ら作り出す心的活動を促すことにつながっていた。その結果、子どもたちは、様々な分割の方法を自ら発見し、分割することができた。

また、なぜ台形の面積を求めるのかという課題を子どもなりに理解するために、台形、円、アメーバー形のどの図形の求積を考えるかという問いについて、子どもなりの説明を求めた。この説明の段階で、子どもたちは既習の学習を思い浮かべ、その既習事項とどの図形が関連性が強いと判断していた。その結果、子どもたちは、学習の目標を明確に持つとともに、その学

習に必要な既習事項を確認することができた。

(2) 発展的内容の指導について

本時までには、子どもたちは三角形・平行四辺形の求積公式は学習している。したがって本授業実践では、台形をそれらの既習の図形に変形して台形の面積が計算で求められるかが課題であった。この課題は、第5学年の内容を発展させるものであるが、既習の図形を基に発展的に複雑な図形を考察するという数学的な考え方を活用できるものである。

本時では、このような既習の学習を発展させるという立場に立って、子どもたちは台形の面積の求め方を考えることができた。また、本時の取り組みは、単に発展的に考えるという方向だけでなく、既習の三角形や平行四辺形の求積方法を基に、それらの求め方の理解を深めるという、既習の学習内容の理解を深めるものでもあった。

このように、子どもたちの理解過程は、学習する内容に沿って、その内容を理解していただくだけではない。既習事項を新たな場面で活用することで、既習事項の理解を深めることができる。この意味でも、発展的内容の指導は、基礎・基本と反対のベクトルではなく、既習事項の定着をはかる、つまり基礎・基本を充実させる指導にもなっているのである。

5. 結論

本稿では、「量と測定」領域の学習において、小学校第5学年の子どもが台形の面積の求め方を学習する際の理解過程を実証的に解明しようとした。

まず、本時の授業に入る前の子どもたちの実態を把握するために、既習の三角形・平行四辺形の求積問題について簡単な調査を行った。その結果、これらの図形の求積については39名中33名が理解しているが、他方で3名の子どもが両問ともに間違っていることがわかった。こうした子どもの実態を踏まえて、本時では、台形の面積の求め方を考えるという算数的活動を行うこととした。

この台形の面積の求め方を考える学習は平行四辺形や三角形の面積の求め方の発展的内容の学習であるが、既習事項を生かし、子ども自身が学習を構成していくという授業展開によって、次のことが可能になると考えたからである。

(1) 子どもたちは、既習の求積可能な図形の求め方を基に、新たな図形の求め方を考え出すことができる。

(2) それを基にして数学的なコミュニケーションをもつことで、子ども個々の求積に対する数学的な考え方が高まり、理解もより深まる。

そこで、理解過程を重視した算数科授業では、まず数学的概念や原理・原則を理解する個々の子どもの心的活動を保証するために、学習目標に対して、自分自身が何を理解しているのか、どのような考え方が使用できるのかなど、現在の自分自身の理解を意識化しておくことが必要であるとの認識に立って、本授業では、平行四辺形が三角形に分割して求められたことを想起させることから導入し、この既習の図形に分割するという考え方を基に台形の面積の求め方を考えさせることにした。そして、本授業では、三角形・平行四辺形の求積方法とりわけ、倍積変形・等積変形の求め方という数学的な考え方を活用して、台形を変形するという発展的な考え方を深化・拡張させ、子どもの理解を深めることをねらうことにした。

その結果、本時の授業において、子どもたちは三角形や平行四辺形の求積方法について学習したときに身に付けた倍積変形・等積変形の求め方という数学的な考え方を活用して、台形を変形することができた。実際、子どもたちは個々の活動で、台形を対角線で2つの三角形に分けたり、台形を2つつなげて平行四辺形をつくったりする方法を比較的容易に考え出すことができた。しかしながら、台形を長方形と三角形に分割する方法には気づきにくかったようである。多くの子どもたちにとってこれは当然のことといえよう。なぜなら、台形の面積を計算で求めることだけが学習のねらいであったら、台形を長方形と三角形に分割する方法よりも、台形を対角線で2つの三角形に分けたり、台形を2つつなげて平行四辺形をつくったりする方法の方がはるかに簡単だからである。

ところがこの学級の子どもたちにとっては、台形の面積を1つの方法で求めることよりも、台形のいろいろな面積の求め方を考え出すことの方が興味あることのようにであった。実際、発表の場面で、台形の上底の両端から下底に垂線を引いて、台形を長方形と三角形に分割する方法(図10)がある児童から発表されると、それが契機となって、なぜそのような方法で面積が求められるかについて活発な議論が行われている(図11, 図12)。この方法は、「うわぁー」「すごい!」という子どもたちの感嘆の声に顕著に現れているように、多くの子どもたちにとって印象的なものであった。このことは、事前調査で三角形や平行四辺形の面積を正しく求められなかった2名の子どもを含む17名の子どもたちが話し合いの後に台形を長方形と三角形に分割する方法を上げていることからわかる。

以上のように、子どもたちは本授業の学習において、既習の求積可能な図形の求め方を基に新たな図形の面

積の求め方を考え出すことができ、それらについての数学的なコミュニケーション(話し合い活動)を行うことで子ども個々の求積に対する数学的な考え方が高まり、理解もより深まったと言えよう。そして、このような事例研究から、算数学習において個人的構成と社会的構成の両方の活動が行われてはじめて、教室における個々の子どもや子どもたちの理解が深化し得るということが示唆される。今後は、「数と計算」領域や「数量関係」領域の学習における子どもの理解過程を実証的に解明することが課題である。

【付記】

本稿は、平成14年度科学研究費補助金基盤研究(C)(2)(代表者小山正孝、課題番号13680306)の研究成果の一部である。

参考文献

- 1) 小山正孝(1997)「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.
- 2) Koyama, M. (1997) Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol.5, pp.21-33.
- 3) 小山正孝, 中原忠男, 武内恒夫, 赤井利行, 宮本泰司, 脇坂郁文(2000)「算数学習における理解過程に関する研究(Ⅰ)」, 『広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要』, 第28号, pp.117-123.
- 4) 磯部年晃, 小山正孝, 中原忠男, 赤井利行, 中村武司(2001)「算数学習における理解過程に関する研究(Ⅱ)」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第30号, pp.89-98.
- 5) 文部省(1999)『小学校学習指導要領解説 算数編』, 東洋館出版社, p.138.

RESEARCH ON THE PROCESS OF UNDERSTANDING MATHEMATICS: WAYS OF MEASURING AREA OF TRAPEZOID

Masataka Koyama

Graduate School of Education, Hiroshima University
1-1-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, Hiroshima, 739-8524 Japan

In the research on the process of understanding mathematics, Koyama (1992) presented the so-called “two-axes process model” of understanding mathematics as a useful and effective framework for mathematics teachers. The model consists of two axes, i.e. the vertical axis implying levels of understanding such as mathematical entities, relations of them, and general relations, and the horizontal axis implying three learning stages of intuitive, reflective, and analytic at each level. By analyzing elementary school mathematics classes in Japan, Koyama (2000, 2002) suggested that a teacher should make a plan of teaching and learning mathematics in the light of “two-axes process model” and embody it with teaching materials of a topic in due consideration both of the objectives and the actual state of students, and that she/he should play a role as a facilitator for the dialectic process of individual and social constructions through a discussion with students.

The purpose of this research is to examine closely the 39 fifth-graders’ process of understanding how to find the area of trapezoid in a classroom at the national elementary school attached to Hiroshima University. In the fourth grade, these students had learned how to measure areas of square and rectangle. In order to improve their understanding of measurement and promote their mathematical thinking, with a classroom teacher, we planned the teaching unit of “Measurement of areas of fundamental geometrical figures” and in total of 15 forty-five minutes’ classes were allocated for the unit in the light of “two-axes process model”. Throughout the classes we attached importance not to memorizing the formula but to thinking mathematically ways of measuring area of trapezoid. The data were collected in the way of observation and videotape-record during these classes, and analyzed it qualitatively to see the change of students’ thinking and the dialectic process of individual and social constructions through discussion among them with their teacher in the classroom. First, as a result of individual construction activities, the students could create different ways of measuring area of trapezoid by using mathematical thinking of

transformation a trapezoid into geometrical figures acquired already, i.e. triangle, rectangle and parallelogram. Second, as a result of the qualitative analysis of students' discussion, we found that students were interested in creating more than one way and investigating the reason of their ways of measuring area of trapezoid, and that for the students it was the most impressive way that transformed a trapezoid into one rectangle and two triangles.

References

- Koyama, M. (1992), Exploring Basic Components of the Process Model of Understanding Mathematics for Building a Two-Axes Process Model, *Proceedings of the 16th PME Conference*, New Hampshire, USA, 2, 17-24.
- Koyama, M. (2000), A Research on the Validity and Effectiveness of "Two-Axes Process Model" of Understanding Mathematics at Elementary School Level, *Proceedings of the 24th PME Conference*, Hiroshima, Japan, 3, 159-166.
- Koyama, M. (2002), Research on the Process of Understanding Concepts of Triangle and Quadrilateral in a Classroom, *Proceedings of the 26th PME Conference*, Norwich, England, 1, 284.

算数学習における理解過程に関する研究 (IV)

— 第5学年における「分数と小数、整数の包摂関係」を中心に —

小山 正孝 磯部 年晃 中原 忠男
赤井 利行 片桐 毅
(協力者) 岩田 耕司 今井 一仁

1. 目的と方法

本研究は、算数学習における子どもの理解過程を、理論的・実証的に解明しようとするものである。これまでの数学の理解過程に関する研究¹⁾²⁾によって、数学的概念や原理・法則などを理解することは、本質的には、個々の子どもの心的活動であり、複雑で力動的な過程であるが、他方では、教室で行われる算数学習においては、子どもの理解過程はその子どもと教師、子ども同士の社会的相互作用の影響を受けることが明らかになってきている。そこで、本研究では、算数学習における理解過程を、これら個人的側面と社会的側面の両方を視野に入れて解明することを目的とする。

そのために、まず本研究の第1報³⁾では、理論的研究として、小山が構築した数学理解の2軸過程モデルについて、このモデルの根底にあるパラダイムや認識論と、数学理解の階層的水準と学習段階をそれぞれ縦軸と横軸に設定することの妥当性を、文献解釈的方法によって再検討した。そして、第2報⁴⁾では、その実証的研究として、「図形」領域の学習において、小学校第2学年の子どもが三角形や四角形概念を学習する際の理解過程に焦点を当て、事前調査、授業実践、事後調査を通して、これらの図形についての子どもの理解過程を実証的に解明した。さらに、第3報⁵⁾では、「量と測定」領域の授業実践を通して、小学校第5学年の子どもが台形の面積の求め方を学習する際の理解過程を実証的に明らかにしてきた。

そこで第4報である本稿では、「数と計算」領域の授業実践を通して、小学校第5学年の子どもが分数と小数、整数の包摂関係を学習する際の理解過程を実証的に解明することを目的とする。

2. 授業の計画

(1) 計画の概要

【授業学年】 広島大学附属小学校 2部5年
(男子20名 女子20名 計40名)

① 単元名 分数

② 単元目標

- 単位分数のいくつ分であるかを見つけ、分数の仕組みや同分母分数の加減の仕方に関心を持ち、進んで考えていこうとする。(関心・意欲・態度)
- 単位分数をもとにして、同分母分数の加減の仕方を考えることができるとともに、整数の除法の結果を分数で表す方法や分数・小数・整数の包摂関係について考えることができる。(数学的な考え方)
- 1つの分数を、分母を変えて表すことができる。分数を小数や整数で、小数を整数や分数で表すことができる。また、整数・小数・分数を同じ数直線に表したり、大小をくらべることができる。(表現・処理)
- 同分母分数の加減の仕方が分かる。整数の除法の結果が分数で表せることと、分数・小数・整数の包摂関係が分かる。(知識・理解)

③ 指導計画 (全10時間)

第1次	大きさの等しい分数	2時間
第2次	分数のたし算・ひき算	3時間
第3次	分数と小数・整数	4時間
	・分数を小数で表そう	①
	・整数や小数を分数で表そう	①
	・1から5までの数で分数をつくって、仲間分けしよう	本時1①
	・6から10までの数で分数をつくって、仲間分けしよう	本時2①

Masataka Koyama, Toshiaki Isobe, Tadao Nakahara, Toshiyuki Akai, Tsuyoshi Katagiri, Koji Iwata, and Kazuhito Imai:
Research on the Process of Understanding in Elementary School Mathematics Learning (IV) — Focusing on Fifth Graders' Conception of the Inclusion Relation among Fractions, Decimals and Whole Numbers —

(2) 事前研究

① 教材分析 (単元全体について)

これまでに子どもたちは、はしたの量を表す数として小数や分数が生み出されたことを理解している。また、小数においては、整数と同じ十進位取り記数法の構造のもとで、加減乗除すべての計算が成り立っていることを理解し、整数と小数の包摂関係について追究している。

そこで、本単元では、分数の計算として、同分母分数の加法及び減法の方法を追求していく。ここでは、単位の考えを用いて考える。小数の加法及び減法で、0.1を単位として、そのいくつ分で考えたことをもとにして、分数の加法及び減法でも分子が1の分数(単位分数)を単位として、そのいくつ分で考えていくことになる。また、整数の除法の結果が分数で表せられることを理解させるとともに、分数と小数の特徴やよさについて追究させる中で分数・小数・整数の包摂関係について理解させていきたい。

具体的には、まず、単位分数の大きさを数直線を使ってとらえ、分母が大きくなるにつれて、分数の大きさは小さくなることをとらえさせる。また、大きさの等しい同値分数が存在することに気づかせたい。次に分数の加法・減法について、同分母分数の計算を単位分数のいくつ分で考えることができることを知り、分数の仕組みの理解を一層深めたい。さらに、分数と小数・整数の包摂関係について学習する。液量や長さなどの具体的な場面から抽象化を図り、整数の除法の結果が分数で表せることをとらえさせる。また、分数を小数や整数で表したり、整数や小数を分数で表したりすることができるようにさせる。このことを活用して、分数・小数・整数を同一直線上に表したり、分数と小数の混じった大小比較や計算の仕方について考えさせる。さらに、発展的な学習として、分数・小数・整数の集合の包摂関係を考察する場を設定する。それによって、今まで学習してきた分数・整数・小数の変換をもとに、分数・小数・整数の集合の間の関係について考えさせたい。

② 5年生の分数概念の理解に関する事前調査

本時の授業に入る前の第5学年の子どもたちの分数(特に分数と小数、整数の包摂関係)についての理解の程度を調べるために、2部5年の子どもたちに実態調査を行った。

ア. 事前調査のねらい

この事前調査では、次のことをねらいとした。

7つの分数を分類させることを通して、学習前の子どもたちの分数概念についての理解の程度を把握する。

イ. 事前調査の問題

次の7つの分数を提示し、分類させた。なお、この問題に取り組ませる際には、1つの分類だけでなく、様々な分類を行ってよいことを告げて、行わせた。

<問題> 次の7つの分数を仲間分けしましょう。

$$\frac{8}{10} \quad 1\frac{1}{2} \quad \frac{4}{11} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{2}{1} \quad 2\frac{1}{3} \quad \frac{6}{2}$$

ウ. 事前調査の結果

その結果、40名の子どもたちは次のような分類を行った。

子どもの反応

・真分数、仮分数、帯分数に分類	……	38 / 40
・大きさが1以上のものと、1未満のものに分類	……	4 / 40
・帯分数とそうでないものに分類	……	5 / 40
・整数になおせるものと、そうでないものに分類	……	22 / 40
・約分できるものと、そうでないものに分類	……	11 / 40
・分母が奇数か偶数かで分類	……	8 / 40
・小数に直せるもの、整数に直せるもの、そうでないものに分類	……	5 / 40

このような事前調査の結果から、本時の授業に入る前の子どもたちの実態として、以下のことが明らかになった。

- 既習内容である真分数、仮分数、帯分数を観点として分類する子どもが95%もいたことから、分数をみる観点として、分数の表し方に着目している子どもが多いことがわかる。
- 整数に直せるものとそうでないものを観点として分類した子どもが55%いた。また約分できるものとそうでないものを観点として分類した子どもも8%近くいた。このことから、分母と分子の関係性に着目して分数を見ることができると子どもが多いことがわかる。
- 分母が奇数か偶数かで分類する子どもが20%いたことから、既習の数の見方を分数にも活用して判断しようとしている子どもがいることがわかる。
- 小数に直せるもの、整数に直せるもの、そうでな

いものに分類した子どもが全体の 13 %程度いた。これは未習内容ではあるが、商分数の性質をもとに分類できる子どももいることがわかる。

3. 理解過程を重視した授業のデザイン

これらの事前調査の結果から、子どもの実態として「分数をその表記の仕方のみでみる」見方が特に強いことが明らかになった。こうした子どもの分数の見方を、本時の目標である「分母と分子の大きさの関係から分数をみることで、分数と小数、整数の包摂関係を明らかにすること」ことへ、特に、「分母の数から分数を判断すること」へ変容させるとともに、その変容過程を明らかにするために、次の2点に着目して授業づくりを行った。

- ① 課題の提示と課題追求の場の工夫
- ② 多様な分数の見方を共有し、吟味することができる社会的相互作用にもとづく反省化の場の工夫

① 課題の提示と課題追求の場の工夫について

本稿で取り上げる2つの授業場面(本時1と本時2)においては、 Δ/\bigcirc というフレームを提示し、その中に、1から5までの数を入れて分数をつくる場と6から10までの数を入れて分数をつくる場の2つの場を課題とする。これら2つの分数づくりの場を通して、整数に直せる分数、小数に直せる分数、整数にも小数にも直すことのできない分数(本稿では、有限小数に表せない分数をこのように呼ぶことにする)の存在を明らかにすることができるとともに、分数と整数、小数の包摂関係について数の見方がどのように変わったかを明確にさせることができるように工夫した。

② 多様な分数の見方を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場の工夫について

子どもたちが考えた分数のとらえ方の中に数学的知識を発見させ、より価値のある数学的知識へと高めさせていくためには、子どもから出てくる多様な数の見方を意味づけたり、関連づけたりすることが大切である。そのための手だてとして、子どもの多様な数の見方を表出させ、共通点や相違点を吟味させながら、全員が納得できる考えを創り出させられるように工夫した。

4. 第5学年「分数」における授業の実際と考察

(1) 本時1(第3次の3/4時「1から5までの数で分数をつくって、仲間分けしよう」)の実際と考察 〈本時1の目標〉

- ① Δ/\bigcirc のフレームの中に1から5までの数を入れたときにできる分数を、整数で表せるもの、小数で表せるもの、分数でしか表せないものの3つの視点から分類することができる。
- ② 分母が3のときは、例外(分子が分母の倍数)を除いて、分数は小数や整数で表せない理由を明らかにすることができる。

〈本時1の授業の流れ〉

[意識化]

まず、 Δ/\bigcirc という分数づくりのフレームを提示し、 Δ と \bigcirc に1から5までの数を入れるとどんな分数ができそうか、という本時の学習活動の方向性を意識し確認する段階である。

T1 今日の分数の研究では、 Δ/\bigcirc の中に数を入れて、いろいろな分数をつくってみたいと思います。

C1 どんな数でもいいのですか。

T2 それだと、たくさんできすぎますね。まず、1から5までの数で、挑戦してみましょう。まず、分子の数をカードをひいてみましょう。(1から5までの数をそれぞれ3枚ずつ入れた袋を準備し、子どもに引かせる。)

C2 3が出ました。

T3 それでは、今度は分母の数を先生が引いてみるよ。(一度引いてみるが、わざと隠して) あっ、これは、失敗だからもう一回ね。

C3 えー、何で隠すの。

C4 ずるい。

C5 わかった。1を引いたからだ。

T4 どうして1を引いたと思ったのですか。

C6 1だと、分母が1だから、整数になって、分数にならないからだ。

C7 1だったら、さっき先生が分数をつくって言って言ったのに、当てはまらないからだ。

T5 みんなするどいね。分母が1のときは、どんな数が分子でも、整数になるのですね。

C8 先生は、2か4か5が出てほしかったのでしよう。

T6 今、2か4か5って言ったけど、3はいけないのですか。

C9 3のときも分子が3だから、整数になるでしょ。だから、3が出て先生は失敗したって言ったと思います。

T7 なるほど、先生が失敗したと考えた理由を整数になるかならないかの視点で分析してくれましたね。それでは、1から5までの数を使ってできる分数は、整数になる場合を含めていくつありそうかな。

C 10 整数になるのを含めると、20 個以上できると
 思います。

C 11 25 個できると思います。

T 8 それでは、1 から 5 までの数を使うと分数は何
 個できるか調べてみましょう。

[操作化]

次に、1 から 5 までの数を使って、分数を実際につ
 くる段階である。△/○のフレームの中に 1 から 5 ま
 での数を入れてできる分数は、25 個ある。

40 名の子どもたちの反応は、以下のとおりである。

子どもの反応 1 : 25 個の分数を正しく構成するこ
 とができたか (N = 40)

子どもの活動の実際	人数 (%)
○ 落ちや重なりがなく、25 個の 分数をつくることのできた。	33 人 (82.5 %)
○ 分母と分子が同じ数になる場 合 (例えば 3/3) を除いて、 20 個の分数をつくることので きた。	4 人 (10 %)
○ 落ちや重なりが生まれ、同じ 分数を複数個つくった。	3 人 (7.5 %)

子どもの反応 2 : 子どもの分数のつくり方の実際
 (N = 40)

子どもの活動の実際	人数 (%)
○ 分母または分子を固定して、 それにあてはまる分数をつく っていった。(例えば、1/2、 2/2、3/2、……)	18 人 (45 %)
○ ランダムに分母、分子に数を入 れて分数をつくっていった。	5 人 (12.5 %)
○ はじめはランダムに数を入れて 分数をつくっていったが、 落ちや重なりが生まれること に気づき、分母か分子を固定 して分数をつくっていった。	17 人 (42.5 %)

[反省化]

この段階は、子どもがつくった分数について吟味し、
 分数でしか表せない場合についての気づきを出し合い
 ながら、より数学的に価値ある分数の見方へと高めて
 いく段階である。

T 9 それでは、分数は、何個できましたか。

C 12 25 個できました。

C 13 20 個だよ。

T 10 意見が分かれていますね。実際にどんな分数
 ができたのか出し合ってみましょう。

1/1, 2/1, 3/1, 4/1, 5/1
1/2, 2/2, 3/2, 4/2, 5/2
1/3, 2/3, 3/3, 4/3, 5/3
1/4, 2/4, 3/4, 4/4, 5/4
1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 5/5

C 14 (できた分数をみて) なんだ、分母と分子が
 同じでもよかったんだ。

T 11 早速、気づきを出してくれましたね。ほかに
 はどんな気づきがありそうですか。出してみま
 しょう。

C 15 分数なんだけど、整数になるものがたくさん
 あります。

C 16 小数になる分数の方が多いと思います。

T 12 それでは、分数を仲間分けしてみましょう。

C 17 整数になる分数は 10 個ありました。

C 18 小数で表せる分数は 11 個ありました。

C 19 分数でしか表せない分数は、1/3、2/3、
 4/3、5/3 の 4 つでした。ほかの 2 つに比べ
 るととても少ないです。

T 13 どうして分母が 3 のときは、分子が 3 のとき
 以外は、分数でしか表せないのでしょうか。

C 20 わり算で考えると、3 で割るときは、いつも
 割り切れないからだと思います。

C 21 分母が 2 のときはいつも半分だから割り切れ
 るし、4 は半分の半分だからこれも割り切れるけ
 ど、3 のときは割り切れないからだと思います。

C 22 分母が 5 のときも、5 で割ると、いつも割り
 切れるからいいけど、3 はやっぱり割り切れない
 から、分母が 3 のときは、分子が 3 の段の数で
 ないときは分数でしか表せないと思います。

[協定化]

最後は、子どもたちが新しく獲得した数の見方につ
 いて整理し、次時の課題を構成する段階である。

T 14 今日の研究で、発見したことには、どんなこ
 とがありますか。

- C 23 分数は、3つの仲間があることを見つけました。
- C 24 詳しく言います。分数には、整数に直せるものと、小数に直せるものと、分数で表せるものの3種類あることがわかりました。
- T 15 そうですね。3種類ありますね。この3種類の見分け方は、どうでしょう。
- C 25 分母の数で、だいたいわかります。
- C 26 分母が3のとき以外は、整数か小数になります。
- C 27 でも入れる数が1から5の数じゃないときは、分数でしか表せない分数はもっとたくさんできると思います。
- T 16 たとえば分母がどんなときですか。
- C 28 7のときです。
- C 29 9のときも分数でしか表せないと思います。
- T 18 それでは、次の研究で、1から5以外の数のときはどうなるか調べてみましょう。

<本時1の授業の考察>

- ① 課題の提示と課題追求の場の工夫について
本時1では、 Δ/\bigcirc というフレームを提示し、この中に1から5までの数を入れると、いくつ分数ができるかを課題とした。子どもたちのC3～C9の発言から明らかのように、この段階において子どもたちは、整数に直せる分数が存在することに気づくことができたといえる。また、これらの発言は分母と分子の関係性に着目していることの表れであると考えられる。分子が3のとき1や3が分母に入ると整数になるという気づきは、分数をみる視点として、分母と分子の関係に着目していくという新たな視点をもとに、分数を理解しようとする姿であるともいえる。また、C10やC11の発言から、子どもたちは分数づくりへの大まかな見通しをもつことができたと考えられる。
- 以上のことから、 Δ/\bigcirc のフレームに1から5までの数を入れて分数をつくることを課題として提示したことは、分母と分子の関係をみていくという新たな分数の見方を子どもが獲得することにつながったと言える。さらに、この課題を設定したことは、それが簡単な数を入れてみる活動であったことから、その後の分数をつくって仲間分けする活動への見通しをもたせる上でも有効であったと言えよう。
- ② 社会的相互作用の場の工夫について
反省化の段階におけるC15、16、17、18、19の発言をみると、25個の分数を他の整数や小数で表せるかということについて議論が進んでいることがわかる。そして、その後の議論の中では、教師のT13の発問と子どものC20の発言を契機に、分母が3のとき

きとそうでないときの違いについて考察が始まっている。その結果、分母と分子の関係から分数をみていく見方から分母の数だけをもとに分数を判断していかうとする見方へと変容していった子どもたちの様子がわかる。これは、単に分母が3のときに小数や整数に直せないということだけを明らかにしたのではなく、その理由までも追及させ、3以外の数が分母に入ったときにはどうなるかを考えたことによるものであると言える。

このように、本時1の授業において、子どもの分数の理解の仕方は、事前調査の時点での「分数をその表記の仕方のみでみる」見方から、「分母と分子の関係をみる」見方へ、さらに「分母をもとに判断する」見方へと変容してきたことがわかる。そこで以下では、本時1の次時として設定した本時2の授業の実際を取り上げることにより、子どもの理解過程をさらに詳しくみていくことにする。

(2) 本時2 (第3次の4/4時「6から10までの数で分数をつくって、仲間分けしよう」) の実際と考察

<本時2の目標>

- ① Δ/\bigcirc のフレームの中に6から10までの数を入れたときにできる分数を、整数で表せるもの、小数で表せるもの、分数でしか表せないものの3つの視点から分類することができる。
- ② 分母が3、6、7、9のとき、例外(分子が分母の倍数)を除いて、分数は小数や整数で表せない理由を発展的に明らかにすることができる。

<本時2の授業の流れ>

[意識化]

まず、前時と同様に、 Δ/\bigcirc という分数づくりのフレームを提示し、 Δ と \bigcirc に6から10までの数を入れたときに、分数でしか表せない分数にはどんな特徴がありそうか、という本時の学習活動の方向性を意識化し確認する段階である。

- T1 今日の分数の研究では、 Δ/\bigcirc の中に入れる数(1から5までの数)を変えて調べてみたいと思います。どんな数を入れるといいかな。
- C1 分母が6のときや7のときは、整数や小数には直せないよ。
- C2 9もそうだよ。
- C3 8は、整数や小数に絶対に直せると思います。
- T2 それでは、今日の研究では、1から5までの数から発展させて、今みんなが言ってくれたように、6から10までの数を入れて挑戦してみましょう。何個の分数ができるかな。
- C4 昨日と一緒に5つの数があるから、25個の数

ができると思います。

C 5 でも、昨日と違って1がないから、整数は少ししかできないと思います。

T 8 それでは、6から10までの数を使うと分数は何個できるのか、そして分数でしか表せない数は何個できるか調べてみましょう。

[操作化]

次に、6から10までの数を使って、分数を実際につくる段階である。

40名の子どもたちの反応は、以下のとおりである。

子どもの反応3：25個の分数を正しく構成することができたか (N = 40)

子どもの活動の実際	人数 (%)
○ 落ちや重なりがなく、25個の分数をつくることができた。	39人 (97.5%)
○ 落ちや重なりが生まれ、同じ分数を複数個つくった。	1人 (2.5%)

子どもの反応4：子どもの分数の作り方の実際 (N = 40)

子どもの活動の実際	人数 (%)
○ 分母を固定して、それにあてはまる分数をつくっていった。 (例えば、 $6/6$ 、 $7/6$ 、 $8/6$ 、……)	36人 (90%)
○ はじめはランダムに数を入れて分数をつくっていったが、落ちや重なりが生まれることに気づき、分母を固定して分数をつくっていった。	4人 (10%)

[反省化]

この段階は、子どもがつくった分数について吟味し、分数でしか表せない場合についての気づきを出し合いながら、より数学的に価値ある分数の見方へと高めていく段階である。

T 9 それでは、分数は何個できましたか。

C 6 やっぱり25個できました。

T 10 この前の研究をもとに、みんな分数の作り方を工夫していましたね。それでは、気づきを出してみましょう。

C 7 整数に直せる分数は、 $6/6$ 、 $7/7$ 、 $8/8$ 、 $9/9$ 、 $10/10$ の5つしかありませんでした。

C 8 逆に分数でしか表せないものがたくさんありました。

C 9 分母に6と7と9を入れると、分母と分子が同じ数のときと $9/6$ のとき以外は、全部分数でしか表せない数になりました。

T 11 いい気づきがたくさん出てきましたね。ところで、どうして分母が6、7、9のときは分数でしか表せない数になるのでしょうか。それでは、昨日の研究の数と合わせて考えてみましょう。

整数や小数で表せる分数の分母

1, 2, 4, 5, 8, 10

分数でしか表せない分数の分母

3, 6, 7, 9

C全体 (難しそうに考え込む)

C 10 7がなかったら、分かるのにな。

T 12 どういうことかな。

C 11 7がなかったら、分数でしか表せない分数の分母は3、6、9だから3の段の数が分母になったら、整数や小数で表せない数ができると言えます。

C 12 7は特別な数だと思います。

C 13 でも、もっと数を大きくしたら、たぶん14や21を分母にしても分数でしか表せない数になると思います。

T 13 3の段の数と7の段の数に何かヒントがありそうですね。それでは、今度は逆に整数や小数で表せる分数の分母を見てみるとどうなりますか。

C 14 わかった。今度は2、4、8、10で2の段の数があります。1は当たり前だけど、2の段の数と5の段の数が分母にきたら、整数や小数に表せると思います。

C 15 でも6も2の段の数だよ。2の段の数って言えないんじゃないですか。

T 14 それでは、10だけを今度は見てみるよ。10についてはどうかな。

C 16 10は2の段の答えになります。でもこれではさっきと変わりません。

C 17 あっ、10は 2×5 です。わかった。2と5で

できてる数だ。

T 15 どういうことかな。

C 18 かけ算で2と5でできる数が小数や整数で表せる数です。4は 2×2 だし、8は $2 \times 2 \times 2$ だし、10は 2×5 でできるから、4や8や10が分母のときは小数や整数で表せると思います。

C全体 (納得したような様子)

[協定化]

本時の最後は、子どもたちが新しく獲得した数の見方について整理し、次時の課題を構成する段階である。

T 14 今日の研究で、発見したことには、どんなことがありますか。

C 19 分数を仲間分けするときは、分母の数を見て仲間分けするとすぐにできることを発見しました。

C 20 1, 2, 4, 5, 8, 10のように、1と2と5のかけ算でできている数は全部小数や整数で表せるけど、分母に3や7のかけ算の数が入ると小数や整数では表せません。

T 15 それでは、10より大きな数になったら、小数や整数で表せる分数の分母にはどんな数があるかな。11から20までの数で考えてみよう。

C全体 (ノートに数を書いて、どんな成り立ちになるかを調べる。)

C 21 次は16です。それ以外の数は2と5のかけ算でできません。

<本時2の授業の考察>

① 課題の提示と課題追求の場の工夫について

本時2では、前時に引き続いて Δ/\bigcirc というフレームを提示し、この中に6から10までの数を入れると、分数でしか表せない数はいくつできるかを課題とした。本時の意識化の段階における子どもたちのC1～C3の発言から、この段階において子どもたちは、今までのわり算の経験や前時での学習によって、分数でしか表せない分数の分母の数に気づくことができたことがわかる。また、これらの発言は、前時の学習で観られた、分数を分母と分子の関係性に着目してみる見方からその分母のみを考察の対象としてみようとする見方への変容を、顕著に表していると考えられる。

次に課題追求の場においては、前時の経験をもとに、分数のつくり方について見直しをもって取り組むことができている。そのことは、 Δ/\bigcirc というフレームの中に1から5までの数を入れて分数をつくる活動(前時)に対する子どもの反応1・2と本時の6から10までの数を入れて分数をつくる活動に対する子どもの反応3・4をそれぞれ比較してみると、より一層明らかである。このことは、分数をつくりそれらを分類す

るという前時からの連続した活動を通して、分母に着目して分数をみていく子どもの分数理解の変容ととらえられるであろう。

② 社会的相互作用の場の工夫について

本時の反省化の段階におけるC10～C18の議論の様子を見ると、子どもは分母が3, 6, 7, 9のときなぜ小数や整数で表せないのか考えていることがわかる。このことは、分母に着目して分数を判断しようとする子どもたちの姿であり、事前調査の段階と比べて、子どもの分数理解の仕方が大きく進展し、深まっているととらえられる。ここでの議論においては、T13で2, 4, 5, 8, 10が分母のときなぜ小数や整数で表せるのかと観点の変更を促したり、T14で数10の構成の仕方に焦点化して考えさせたりする教師の発問が有効に機能したと考えられる。

このように、本時1と2の学習によって、子どもの分数の理解の仕方が、事前調査の時点での「分数をその表記の仕方のみでみる」見方から、「分母と分子の関係をみる」見方へ、さらには「分母をもとに判断する」見方へと変容したことがわかる。そして、子どもたちは、分数づくりの活動と社会的相互作用によって、分数が小数や整数で表される場合と分数でしか表せない場合の見分け方に気づくことができたのである。

5. 結論

本稿では、「数と計算」領域の学習において、小学校第5学年の子どもが分数と小数、整数の包摂関係を学習する際の理解過程を実証的に解明することを目的とした。

そこでまず、本時の授業に入る前の40名の子どもたちの実態を把握するために、分数(特に分数と小数、整数の包摂関係)の理解についての簡単な調査を行った。その結果、子どもの実態として、「分数をその表記の仕方のみでみる」子どもが多い(95%)こと、「分母と分子の関係性に着目してみる」ことのできる子どもも多い(83%)ことなどが明らかになった。こうした子どもたちの分数の見方を、「分母と分子の大きさの関係から分数をみることで、分数と小数、整数の包摂関係を明らかにする」ことへ、特に、「分母の数から分数を判断する」ことへ変容させ、その変容過程を明らかにするために、本単元の分数の発展的な学習として、本時1と2で分数をつくって仲間分けする算数的活動を行うこととした。

その際、課題の提示と課題追求の場と多様な分数の見方を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場を工夫することで、子どもの理解過程を重視した算数科授業を構成することを考えた。具体的には、課

題の提示と課題追求の場の工夫として、 Δ/\bigcirc というフレームを提示し、その中に、1から5までの数を入れて分数をつくる場（本時1）と6から10までの数を入れて分数をつくる場（本時2）の2つの場を課題とした。これら2つの分数づくりの場を通して、整数に直せる分数、小数に直せる分数、整数にも小数にも直すことのできない分数の存在を明らかにすることができるのと同時に、分数と整数、小数の包摂関係について数の見方がどのように変わったかを明確にさせることができると考えたからである。また、多様な分数の見方を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場の工夫として、子どもたちが考えた分数のとらえ方の中に数学的知識を発見させ、より価値のある数学的知識へと高めさせていくためには、子どもから出てくる多様な数の見方を意味づけたり、関連づけたりすることが大切であると考え、そのための手だてとして、子どもの多様な数の見方を表出させ、共通点や相違点を吟味させながら、全員が納得できる考えを創り出させられるように工夫した。

その結果、本時1の授業において、 Δ/\bigcirc というフレームの中に1から5までの数を入れて分数をつくる活動を通して、子どもたちは整数に直せる分数が存在することに気づき、分母と分子の関係性に着目して分数をみることができるようになった。また、社会的相互作用を通して、子どもたちの分数の見方が、分母と分子の関係性に着目して分数をみていく見方から分母の数だけをもとに分数を判断していこうとする見方へと変容していった。さらに、本時2の授業において、前時に引き続いて Δ/\bigcirc というフレームの中に6から10までの数を入れて分数をつくり、分数と小数、整数の関係について考えることで、子どもたちは分母に着目して分数を判断しようとし、分数が小数や整数で表される場合と分数でしか表せない場合の見分け方にも気づくことができた。その際、本時2の反省化の段階では、2, 4, 5, 8, 10が分母のときなぜ小数や整数で表せるのかと観点の変更を促したり、数10の構成の仕方に焦点化して考えさせたりする教師の発問が、こうした子どもたちの分数の理解の深化に有効に機能したと考えられる。

以上のように、本時1と2の授業によって、子どもの分数の理解の仕方が、事前調査の時点での「分数をその表記の仕方のみでみる」見方から、「分母と分子の関係をみる」見方へ、さらには「分母をもとに判断する」見方へと変容した。そして、子どもたちは、分数づくりの活動と社会的相互作用によって、分数が小数や整数で表される場合と分数でしか表せない場合の見分け方に気づくことができたのである。このような事例研

究からも、本研究の第2報と第3報の事例研究と同様に、算数学習において個人的構成と社会的構成の両方の活動が行われてはじめて、教室における個々の子どもや子どもたちの理解が深化し得るとということが示唆される。

本研究ではこれまでに小学校算数科における「図形」領域（第2報）、「量と測定」領域（第3報）、そして「数と計算」領域（本稿：第4報）に焦点化して、算数学習における理解過程に関する実証的研究を行ってきた。そこで、今後はもう一つの「数量関係」領域の学習における子どもの理解過程を実証的に解明することが課題である。

【付記】

本稿は、平成15年度科学研究費補助金基盤研究(C)(2)（代表者小山正孝、課題番号13680306）の研究成果の一部である。

参考文献

- 1) 小山正孝(1997)「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.
- 2) Koyama, M. (1997) Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol.5, pp.21-33.
- 3) 小山正孝, 中原忠男, 武内恒夫, 赤井利行, 宮本泰司, 脇坂郁文(2000)「算数学習における理解過程に関する研究(I) - 数学理解の2軸過程モデルの理論的再検討 -」, 『広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要』, 第28号, pp.117-123.
- 4) 磯部年晃, 小山正孝, 中原忠男, 赤井利行, 中村武司(2002)「算数学習における理解過程に関する研究(II) - 第2学年における三角形と四角形概念を中心に -」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第30号, pp.89-98.
- 5) 赤井利行, 小山正孝, 中原忠男, 中村武司, 磯部年晃(2003)「算数学習における理解過程に関する研究(III) - 第5学年における「台形の面積の求め方」を中心に -」, 広島大学学部・附属学校共同研究機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第31号, pp.115-122.

数学学習における理解過程に関する研究 —中学校第2学年の授業を事例として—

小山 正孝

(広島大学大学院教育学研究科)

0. はじめに

児童・生徒の数学理解が深化する過程を解明するためには、①数学理解はどのような水準に沿って深化するか、②ある水準において、どのように思考が展開するか、という2つの点を明らかにすることが重要であると考えられる。そこで、筆者は、児童・生徒の数学理解の深化の過程を解明し、その深化を促進するための1つの理論的枠組みとして、5つの階層的な水準と3つの学習段階をそれぞれ縦軸と横軸にもつ数学理解の「2軸過程モデル (Two-Axes Process Model)」を構築し、このモデルの妥当性と有効性に関する研究を行ってきた。その結果、小学校算数科における事例研究によって、教師が児童の算数理解を深化させる授業を構成し実践する際に2軸過程モデルがその枠組みとして有効に機能し得るということが明らかになった。

しかしながら、中学校数学科における理解過程に関する事例研究は十分ではない。そこで、本稿では、数学理解の2軸過程モデルに基づく数学科の授業構成の原理と方法を構築するための事例研究の1つとして、中学校数学科の授業を分析・検討することによって、生徒の理解過程をみていきたい。

1. 中学校第2学年「星形多角形の研究」の授業

本稿で取り上げる授業は、中学校第2学年の生徒(39名)を対象にして、単元「三角形と四角形」の課題学習として行われた「星形多角形の研究」の授業の1時間分である。本時の授業を行った教師の教材観や指導観は、学習指導案の中に以下のように述べられている。

《本時は課題学習として、正 n 角形において k 個隣の頂点を順に結んだときにできる図形を題材に取り上げ、その性質を調べる活動を行う。この図形は n が k で割りきれない場合には星形多角形となる。また、 k が n の $1/2$ を超えない範囲では、「先端の角」(次頁の図を参照)と呼ぶことにした角の大きさは k の1次関数となり、その変化の割合は $360^\circ/n$ である。このことは n や k を変化させたいくつかの場合について調べ、その結果を検討することで予想することができる。

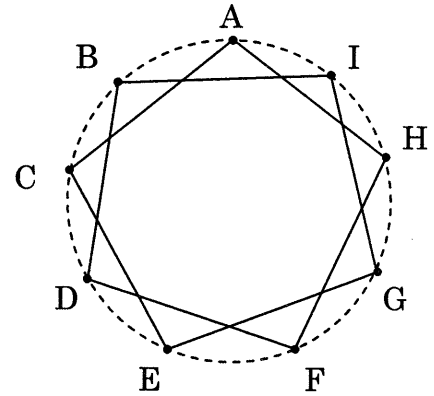
この課題のよさは、得られる予想が複数あり、なおかつその難易度がいくつかの段階にわかれることである。したがって、個々の生徒の理解度に応じた発見があり、正 n 角形の内角の大きさを表す式と先端の角の大きさを表す式の関係、 k が n の $1/2$ を超えた場合にも適用できるように角の大きさについての解釈の方法を考えることなど、発展的な課題を提示することもできる。この課題のよさをいかすため、机間指導やノート点検を利用して生徒の学習の状況を観察し、個々の生徒に適切な

課題を提示するなど、個に応じた学習を進めていきたい。

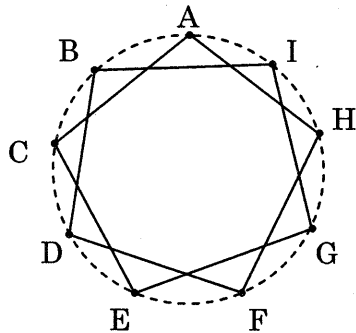
さらに、この課題学習において k や n を一般化した場合のことを考え、その結果を証明することを通して、一般化することの意味について考える機会をもたせ、数学的な見方や考え方のよさを感じ取らせたい。また、このような学習経験を積み重ねることで、生徒の課題に取り組む姿勢を育てられると考えている。》

本授業の目標の1つは、「星形多角形における先端の角の大きさの求め方を理解させる」ことであった。そこで、以下では、この授業のプロトコルをもとに生徒の理解過程を明らかにしてみよう。

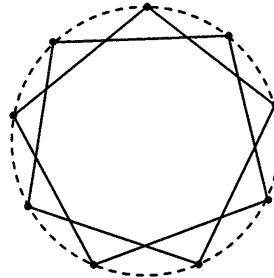
本授業の導入で教師によって星形多角形のかき方の復習がされた後、本時の課題として、「右図のように、正九角形において2個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形の頂点の先端の角の大きさはいくらか。」という課題1が提示された。生徒の自力解決中に教師は机間指導をして、生徒の解答におよそ3パターンあることに気づき、生徒S1、生徒S2、生徒S3の3名を指名して、それぞれの解答を板書させた(板書5)。そして、これら3名の生徒に順次、以下のように説明をさせた。



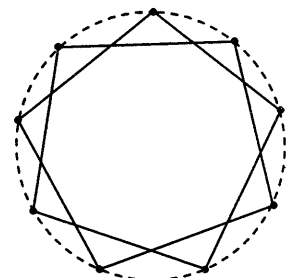
S : (3名の生徒が板書を終える。) (板書5)



$$180 - (40 + 40) = 100$$



$$\begin{aligned} 180 \times (9-2) \div 9 &= 140 \\ (180-140) \div 2 &= 20 \\ 140 - 20 \times 2 &= 100^\circ \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 360 - 180 \times (9-2) &= 360 + 540 \\ &= 900 \quad 900 \div 9 = 100 \end{aligned}$$

板書5

S1 : (教師に向かって小声で) ここ ($\triangle AJK$) が二等辺三角形っていうこと、みんなに言わなくてもいい? (板書6 : S1の板書を参照。ただし点の名前 (JとK) は記録者が便宜上つけたものである。)

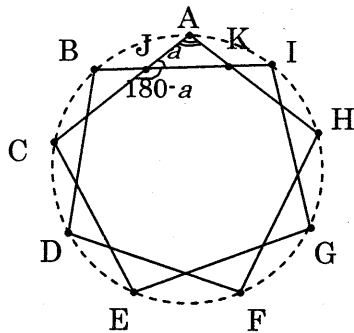
T : うん、二等辺三角形。いやいや、ちゃんとみんなに言わないと。私がこっちに行こうか、みんなの方に。(生徒たちの側に移動する。)

S1 : はい、ここの三角形 ($\triangle AJK$) が、

T : (小声で何やら言う。)

S1 : 二等辺三角形だから、ここ ($\angle AJK$) を $\angle a$ とすると、ここ ($\angle IJC$) が $180 -$

a , $180-a$ だから、で、この、この内側の九角形の、1つの内角が、 180 かけ 7 で、 180 , 7 , 割る 9 で、 140 度だから、 $180-140$ 度っていうことになって、 $a=40$ 度。さっき言ったように、ここ ($\triangle AJK$) が二等辺三角形だから、ここ ($\angle AKJ$) も a で、三角形の内角の和が 180 ひく、 40 , 40 , 100 度になりました。



$$180 \times 7 \div 9 = 140$$

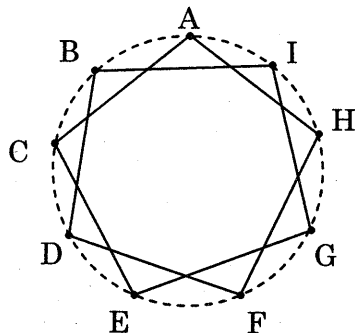
$$a = 40$$

$$180 - (40 + 40)$$

$$= 100$$

板書 6 : S1 の板書

S2 : (板書 7 : S2 の板書を参照) この最初の式は、外側の点線の、九角形の 1 つの内角で、この三角形 ($\triangle AHI$) に注目して、ここ ($\angle AIH$) が 140



$$180 \times (9 - 2) \div 9 = 140$$

$$(180 - 140) \div 2 = 20$$

$$140 - 20 \times 2 = 100^\circ$$

板書 7 : S2 の板書

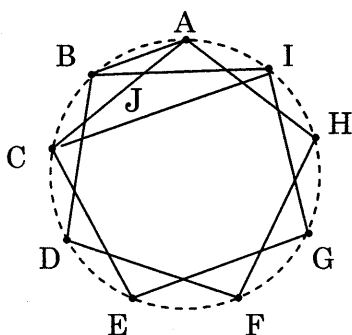
T : それはさっきの説明と一緒に。九角形...

S2 : それでオレンジの三角形 ($\triangle AHI$) が二等辺三角形だから、ここ ($\angle IAH$) とここ ($\angle IHA$) が 20 度で、それでこの三角形 ($\triangle ABI$) も同じように、この三角形 ($\triangle AHI$) と同じだから、ここ ($\angle AIB$) とここ ($\angle ABI$) が 20 度になって、んで、ここから、この 140 度から、 20 度かける 2 を引いたら、 100 度になりました。

S3 : (平行線 AB と CI を引く。板書 8 を参照) この小さい三角形 ($\triangle ABJ$) と、この三角形 ($\triangle CJI$) が... だったら、対頂角で、ここ ($\angle AJB$ と $\angle CJI$) が、同

じ角になるから、えーと、ここの角 ($\angle JIC$ と $\angle JCI$) をこっち側 ($\angle BAJ$ と $\angle ABJ$) へ移して、ここに一個五角形が出来ます (五角形 $ABDFH$ をなぞる)。それで、…

ここに四角形ができるから (四角形 $CEGI$ をなぞる)、ここの、えー、ここの、全部の角は、 360 度たす、 540 で、 900 になって、全部、角は同じ大きさだから、 900 割る 9 で 100 度…。



$$\begin{aligned} & 360 + 180 \times (5 - 2) \\ & = 360 + 540 \\ & = 900 \quad 900 \div 9 = 100 \end{aligned}$$

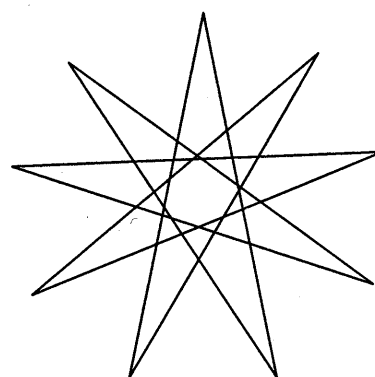
板書 8 : S3 の板書

教師は、上述のように生徒S1が先端の角の大きさの求め方を説明した後に、「生徒S1の背中で見えにくかった人もいられるかもしれませんから、もう一回復習するな。」と言って、生徒S1の説明を繰り返し確認していった。そして、上述の3名の生徒の説明が終わった後に、「解き方はいろいろあるけれども、…どれを使っても100度」になるということを言い、「納得？納得できん？」と生徒たちに問いかけた。それに対して、生徒たちから納得できないという声は聞かれなかった。

そこで教師は、次の課題2「正九角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを、 $k=1, 2, 3, 4$ の場合について調べ、わかったことをまとめよう。」を提示した。そして、「いつも言っているけど、分からないときは相談してもいいよ。相談した方が分からないことが見えてくる。でも、他人に任せっきりではいけないよ。自分も一緒になって考えてね。」と言って、相談しながら課題2について考えてもよいことを生徒たちに告げた。

生徒が解決中に教師は机間指導しながら、 $k=1$ のときは正九角形になり 140 度、 $k=3$ のときは正三角形になって 60 度であることを確認した。

そして、教師は「さあ問題です。 $k=4$ のとき。なんて複雑な形でしょう (板書10参照)。さあ、これどうでしょうか。」と問い、生徒S4を指名して求め方を説明さ



板書10

せた。

S4: これ ($k=4$ の時の図形) のまわりに円があるとするとするじゃないですか、

T: まわりに円があると考える。あー、最初コンパスを使いたくなかったのはなあ、それが、コンパスで描くのを見られたとき、一発でこの、解法でてくるからなあ。描きたくなかったんだけど、気づかれてはしょうがない。はい。で、円を描く (板書 10 の図形の周りに円を描く)。はい、そうすると？

S4: えー、円の中心から、

T: うん。円の中心から？はい。

S4: 1つの頂点に向かって、線を描く。

T: はい、はい、はい。まあ例えば、この場合は、ここここを狙うんだらうな。はい、それで？

S4: で、えっと、まあこの中心角は、

T: まあこの中心角は？はい。

S4: えっと、360度割る9で40度。

T: うんうん、中心角は、360度割る9で40度。はい、それで。

S4: (何か小声で言う。)

T: 円周角は、

S4: (何か小声で言う。)

T: うん、そうだな。中心角は、円周角のちょうど2倍になりますから、逆に言えば、円周角は中心角の半分ですよっていうことだから、はい。円周角は、40度割る2で20度と。はいオッケー、いいですね。S4, 正解。

このように生徒 S4 は、円周角と中心角の関係を利用して、先端の角の大きさが 20 度になることを説明しようとしたようだが、教師は生徒 S4 の発表の途中に入り込んで発言し、最終的には、生徒 S4 の言おうとしていることをくみ取って、教師が先端の角の大きさは 20 度であることを述べた。

その後、教師は「表を見て、気づいたことわかったこと、ないですか？」と生徒たちに問いかけた。それに対して、以下のように、生徒 S5 は 40 ずつ減っていること、生徒 S6 は先端の角の大きさが 20 の倍数になっていることを答えた。

S5: えっと、40 ずつ。

T: 40 ずつ。

S5: 減っている。

k	1	2	3	4
先端の角の大きさ	140	100	60	20

正 n 角形
 k 個隣り

k の値が 1 増えるごとに
……減っている

板書 11

- T: 減っている。はい。k の値が 1 増えるごとに、40 度ずつ、減っているんですね。
 (板書: k の値が 1 増えるごとに……減っている, と板書 11 の表の下に書く) は
 い。まあ、大なり小なり、これに気がついてくれた人がほとんどだと思うんです
 が、他にも気づいたことある人? これ言ってくれるとうれしいんだけどなってい
 うのが、幾つか答えがあるんですが、さあどうですか?
- S6: えっと、20 を基準にして、…60 が 3 倍で、100 が 5 倍で、140 が 7 倍だから…
- T: ふんふんふん、はいはいはい。140 度は、えーと、これは、20 度かける 7、それ
 で、100 は 20 度かける 5 だと。こっちは 20 度かける 3 だ、これは 20 度かける 1
 だってね。だから、1, 3, 5, 7 っていうときに、あの一、まあ奇数だね、がずつ
 と続きますよっていうことに気がついたんですね。オッケー。これも 1 つ立派な
 性質でございますね。他にない? もうない?
- T: はい。じゃえーっと、ちょっと、話を。これ 40 度ずつ減っているっていうけど、
 この 40 度って、なんで 40 なんだろうね? なんで 40 なの? あるいはこういうよ
 うなことが考えられる。40 度ずつ減ってる。これ、九角形だけかな? 八角形や例
 えば十角形や、あるいは六角形、十二角形、もっといや二十四角形もある。そん
 な中で調べていったらいったいどうなるんだろうか? 考え出せばいくらでもあり
 そうですけども。ちょっと話を…。これ 40 度。なんで九角形なら 40 度なんかな?
 えー、(一番前の一人の生徒を指しながら)
- S: (照れながら嫌がる。)
- T: 九角形ってどういう意味? 何か意味ありそう? なさそう? お、はい。S7。
- S7: 中心角?
- T: 中心角。中心角が 40 度だ。お、確かに中心角が 40 度だな。中心角が 40 度だっ
 たら、それが、ここではどういう形で出てくるんだろうか。確かに中心角が 40
 度。だからまあ、もっと言えば、360 を九角形で、9 で割っているから 40 度。な
 んか関連性がありそうだね。だからこの中心角が、ここの先端の角、どういう形
 で関わってくるのか。これもまた 1 つ魅力的なテーマであるな。いろんなことが
 考えられるんだけど、はいはいはい。残念ながらもう時間があとちょっとしかご
 ざいませんで、はい、それじゃあ課題の 3 に行きましょう。はい。いいですか
 ー、はい、行きます。問題。正 n 角形、正 n 角形において、 k 個隣、分かる? 正
 n 角形で k 個隣、だから、具体的な数字じゃないんだ。(正 n 角形、 k 個隣と板書
 する。板書 11 を参照) はい、で、結んでできる図形の、先端の角の大きさを、 n
 と k の式で表しましょう。はい、これが、今日の…になります。もう今まで考え
 られるだけの素地をみんなに提供してあるはずだから、考えてもらって。

このように、教師は、先端の角の大きさが 20 の倍数になっているという生徒 S6
 の気づきに対して「これも 1 つ立派な性質でございますね。」と評価した後、「40 度
 ずつ減ることと九角形との間に何か関連性がないか」と生徒たちに問いかけた。そし
 て、生徒 S7 は少し自信なさそうに「中心角?」と答えた。それに対して教師は「だ
 からこの中心角が、ここの先端の角、どういう形で関わってくるのか。これもまた 1
 つ魅力的なテーマであるな。」というように、明確な回答はせず、1 つの考えてみる
 価値のある魅力的なテーマであることに言及するに留めた。そして、授業時間が残り
 少ないこともあって、課題 3 「正 n 角形において k 個隣で結んでできる図形の先端
 の角の大きさを、 n と k の式で表しましょう。」を提示した。

2. 本時の授業にみられる生徒の理解過程についての考察

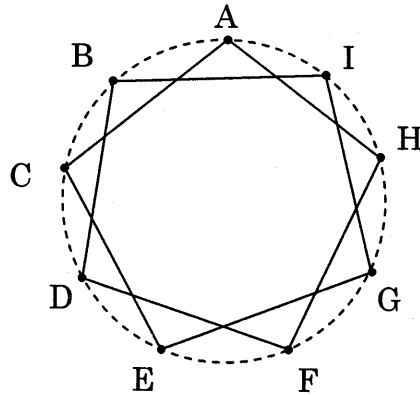
本時の授業は、概略、上述のように展開した。そこで、本節では、この授業にみられる生徒の理解過程について考察してみよう。

この授業では、次の3つの課題が教師から提示されている。

課題1：「右図のように、正九角形において
2個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形の頂点の先端の角の大きさはいくらか。」

課題2：「正九角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを、 $k=1, 2, 3, 4$ の場合について調べ、わかったことをまとめよう。」

課題3：「正 n 角形において k 個隣で結んでできる図形の先端の角の大きさを、 n と k の式で表しましょう。」



このような課題を教師が提示したのは、本時の目標として、次の2点が設定されていたからである。

目標1：星形多角形における先端の角の大きさの求め方を理解させる。

目標2：課題を一般化したときの結果を調べることを通じて、数学的な見方や考え方のよさを感じ取らせ、主体的に課題に取り組む態度を養う。

授業の実際の展開では、課題1と課題2の解決に多くの時間が費やされ、課題3は次時の学習課題として残されることになった。したがって、本時の授業では目標1が中心となったと言ってよい。そこで、以下では、課題1と課題2を解決していった際の生徒の理解過程について考察する。

まず課題1について、3名の生徒(S1, S2, S3)の解答が発表された。いずれの解答も先端の角の大きさが 100° になることを、論理的推論によって求められている。しかしながら、3名の生徒の着眼点は次のように異なっている。

生徒S1：3つの線分AC, AH, BIで囲まれた三角形($\triangle AJK$)が二等辺三角形であるという点(板書6を参照)

生徒S2：3つの線分AH, AI, IHで囲まれた三角形($\triangle AHI$)が二等辺三角形であるという点(板書7を参照)

生徒S3：平行線ABとCIを引いてできる小さい2つの三角形($\triangle ABJ$ と $\triangle CJI$)において、 $\angle JIC$ と $\angle JCI$ を $\angle BAJ$ と $\angle ABJ$ へ移して1つの五角形(ABDFH)に変形する点(板書8を参照)

生徒S1と生徒S2は着目している三角形に若干の相違はあるものの、「二等辺三角形の両底角は等しい」とことと「正九角形の1つの内角の大きさは 140° である」ということを根拠にして、先端の角の大きさが 100° になることを求めている。それに対して、生徒S3の考え方はユニークで、上記の着眼点による角度の移動をうまく利用して、星形九角形を五角形と四角形に分けて内角の和 900° を求め、先端の9つの角の大きさが等しいことから、それを9で割って先端の角の大きさが 100° になることを求めている。このように、最終的には 100° という同じ結果になるが、それを導く方法は異なっている。その意味で、これら3名の生徒の課題1における理解の仕方は異なっていると言える。このことから、一般的に数学理解について考えるときには、

単に最後の答えの正誤で理解できているかどうかを判断するのではなく、その答えに至る過程が重要であり、授業においてそのことを大切にすることが示唆される。

この授業で教師は生徒の3つの異なる解法を取り上げて説明させたことから、その重要性を意識していると考えられる。しかしながら、生徒S1が教師に向かって小声で言った「ここ(△AJK)が二等辺三角形っていうこと、みんなに言わなくてもいい？」という呟きの背後にあると考えられる生徒S1の不安を、教師は十分に察知できなかったようである。△AJKが二等辺三角形であることは図からは明らかであるが、生徒S1はそのことを証明することなく根拠としてよいか、不安に感じていたのであろう。これとは逆に、生徒S3は線分ABとCIが平行であることを、何の不安を感じることなく当然のこととして説明しているようであった。このように、課題1の解法の相違は教師にもとらえられるが、その背後にある心理的不安や自信までもとらえることは授業を行っている教師には難しいのかもしれない。さらに、上述の3名の生徒の説明が終わった後に、教師は「解き方はいろいろあるけれども、どれを使っても100度」になるということを言い、「納得？納得できん？」と生徒たちに問いかけ、それに対して生徒たちから納得できないという声が聞かれなかったことから、課題2を提示した。確かに発表した3名の生徒は課題1の先端の角の大きさの求め方をそれぞれの仕方理解していたであろうが、他の生徒はどうであっただろうか。このことについては、授業の録画記録だけでははっきりせず、教師が授業の限られた時間の中で把握することは難しいことであろう。

さて次に、課題2が提示された後の生徒の理解過程をみていこう。ここでは、まず生徒は「正九角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形」が $k=1, 2, 3, 4$ の場合どのような図形になるかを考えている。 K の値が変化するとそれに伴ってできる星形多角形がどのように変わるかを確認する必要があったからである。したがって、この時点での生徒の理解の焦点は、一時的ではあっても、先端の角の大きさの求め方から星形多角形の形へと移動していると言える。Pirie & Kieren (1989) の数学理解の「超越的再帰的モデル」における、いわゆる「イメージづくり」の水準への折り返し現象である。こうした現象は、理解を力動的な現象としてとらえる場合にはしばしば起こり得るものである。

では、なぜ、ここでこのような折り返し現象が起こったのであろうか。それは、一つには、大多数の生徒にとって課題1 ($k=2$ のとき) で考え理解したことをそのまま形式化し適用することが困難であったからであろう。この授業の対象者が中学校2年生であったことから、ごく自然な理解の過程をたどったと言ってもよい。また、これとは別に、このような折り返し現象が起こったのは教師の提示した課題の内容と提示の仕方にその理由があるとも考えられる。この授業では課題1, 2の順で提示されたが、これらの課題を次の課題1', 課題2'のように変更して提示していたら、生徒の理解過程は本時の授業でみられたものとは異なったものになったかもしれないからである。ここでは、課題1'でイメージづくり、課題2'で性質認知と形式化をねらっている。

課題1': 「正九角形において、 k 個隣の頂点を順に結んでできる図形は、どのような星形多角形か。」

課題2': 「そのときできる星形多角形の先端の角の大きさを調べ、わかったことを表にまとめよう。」

教師が授業構成する際には目標を設定することはもちろん大切なことであるが、た

とえ同じ目標であってもそれを達成するために教師が設定する学習状況(課題の内容や提示の仕方, 学習形態など)は多様に考えられる。それゆえ, 生徒の理解の実態を考慮し, 生徒の数学理解の深化を促すにはどのような学習状況を設定するのがより効果的かを教師は判断しなければならない。

さて, 最後に, $k=4$ のときに生徒 S4 が円周角と中心角の関係を利用して先端の角の大きさが求められることを発表し, $k=1, 2, 3, 4$ の場合それぞれの先端の角の大きさを整理した表を見て気づいたことを発表する場面以後の理解過程についてみていこう。教師に促されて, 生徒 S5 は 40 ずつ減っていること, 生徒 S6 は先端の角の大きさが 20 の倍数になっていることを答えた。これらの生徒は k の値と先端の角の大きさの値との変化や対応のきまりには気づいているが, 基の形が正九角形であることとそれらのきまりを関係づけようとはとしていなかった。

そこで, 教師「なんで九角形なら 40 度なんかな?」と発問した。この発問は生徒の理解を深化させるためのものであり, 深化の方向を指示する働きを担ったものと考えられる。しかしながら, 実際は生徒 S7 が少し自信なさそうに「中心角?」と答えただけであった。確かにこの生徒 S7 の呟きは教師の発問に対する答えとしては不十分であるが, 生徒 S7 がこのように答えられたのは, その前に生徒 S4 が $k=4$ のときに円周角と中心角の関係を利用して先端の角の大きさが求められることを発表したことを聞いていたからであろう。ここに, 一つの教室で教師と多くの生徒が数学を学び会うこと, つまり社会的相互作用することの意義が見て取れる。

本時の授業では授業時間が残り少ないこともあって教師は課題 3 を提示したが, この課題を提示するより, 正九角形の場合について分かったことを整理し, 関連づけることの方に残りの時間を使ってもよかったであろう。なぜなら, 課題 3 のように「正 n 角形において k 個隣で結んでできる図形の先端の角の大きさを, n と k の式で表しましょう。」と課題を一般化することによって理解の水準を上げるためには, 一般化する前の正九角形で行ったことを反省し, 分かったことを分析し, 統合する活動が必要であると考えられるからである。数学理解の 2 軸過程モデル(小山 1997) でいえば, 生徒の「反省的段階」と「分析的段階」の活動を重視することであり, それにはかなりの時間が必要となるからである。

本時の授業のプロトコルによると, 課題 3 を提示した後, 教師は「もう今まで考えられるだけの素地をみんなに提供してあるはずだから, 考えてもらって。」と言い, しばらく机間指導をして, 授業終了のチャイムが鳴った後, 「はい, 何人かの人できてきているな。」と言っていることから, 先端の角の大きさを n と k の式で表すことができた生徒もいたようである。このような生徒は, 短時間の内に分析段階で正九角形の場合の先端の角の大きさと k の値との関連性を理解できた生徒であろう。しかしながら, 他の多くの生徒は短時間では無理であった。こうした生徒に対しては, 生徒 S4 の発言をヒントにして, $k=1, 2, 3, 4$ の場合それぞれの先端の角の大きさと中心角の大きさを再度とらえ直させることが有効であろう。

3. おわりに

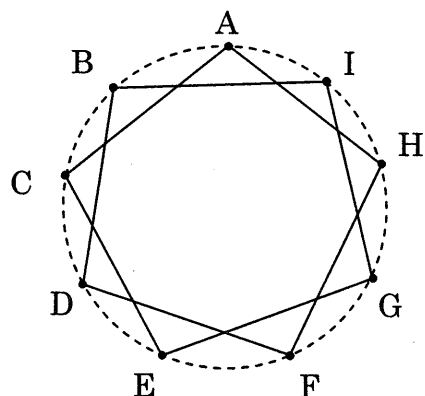
本稿では, 数学理解の 2 軸過程モデルに基づく数学科の授業構成の原理と方法を構築するための事例研究の 1 つとして, 中学校数学科の第 2 学年における「星形多角形の研究」の授業を分析・検討することによって, その授業にみられる生徒の理解過程

について考察した。この授業は、単元「三角形と四角形」の最後に課題学習として行われたもので、生徒がそれまでに学習し理解したことを深化させるねらいをもった授業であった。そのために教師は、次のような3つの課題を提示していった。

課題1：「右図のように、正九角形において
2個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形の頂点の先端の角の大きさはいくらか。」

課題2：「正九角形において、 k 個隣の頂点を
順に結んでできる図形の先端の角の大きさを、 $k=1, 2, 3, 4$ の場合について調べ、わかったことをまとめよう。」

課題3：「正 n 角形において k 個隣で結んでできる
図形の先端の角の大きさを、 n と k の式で表しましょう。」



こうした授業にみられる生徒の理解過程を分析した結果、主として以下の点が明らかになり、示唆された。

第一に、課題1の解答を発表した3名の生徒の着眼点は異なっていた。その意味で課題1におけるこれら3名の生徒の理解の仕方は異なっていると言える。このことから、一般的に数学理解について考えるときには、単に最後の答えの正誤で理解できているかどうかを判断するのではなく、その答えに至る過程が重要であり、授業においてそのことを大切にすることが示唆される。

第二に、課題2の解決において、生徒の理解の焦点は、一時的ではあっても、先端の角の大きさの求め方から星形多角形の形へと移動し、「イメージづくり」の水準への折り返し現象がみられた。その理由としては2つのことが考えられるが、教師が提示した課題の内容と提示の仕方がその1つと考えられる。それゆえ、生徒の理解の実態を考慮し、生徒の数学理解の深化を促すにはどのような学習状況を設定するのがより効果的かを教師は判断しなければならない、ということが示唆される。

第三に、教師は生徒の理解を深化させ、深化の方向を指示する意図の発問をした。それに対する生徒の反応は不十分であったが、その反応は別の生徒が発表したことを聞いていたからであろうと推察される。このことから、一つの教室で教師と多くの生徒が数学を学び合うこと、つまり社会的相互作用の重要性が示唆される。

第四に、課題2を課題3のように一般化することによって理解の水準を上げるためには、生徒は一般化する前の課題2で行ったことを反省し、分かったことを分析し、統合する活動（「反省的段階」と「分析的段階」の活動）をする必要があるということが示唆される。

以上のことを踏まえて、数学理解の2軸過程モデルに基づく数学科の授業構成の原理と方法を構築することは、今後の課題である。

〈参考文献〉

小山正孝 (1997), 「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.

Pirie, S. & Kieren, T. (1989), A Recursive Theory of Mathematical Understanding, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, No. 3, pp.7-11.

数学理解の2軸過程モデルに基づく 授業構成の原理と方法の構築

小山 正 孝

(広島大学大学院教育学研究科)

0. はじめに

筆者はこれまでの数学教育における理解過程に関する研究において、5つの階層的水準と3つの学習段階をそれぞれ縦軸と横軸にもつ数学理解の「2軸過程モデル(Two-Axes Process Model)」を理論的に構築し、このモデルの妥当性と有効性に関する研究を行ってきた(小山, 1992; Koyama, 1993; 小山, 1997; Koyama, 1997)。その結果、教師が児童・生徒の数学理解を深化させる授業を構成し実践する際に2軸過程モデルがその枠組みとして有効に機能し得るということが明らかになった。また、数学教育における構成主義的認識論に立つ2軸過程モデルを他の社会文化主義的認識論や相互作用主義的認識論などによって補完するとともに、算数・数学科の授業で扱う教材に応じて2軸過程モデルをより具体化することの必要性が明らかになった。

そこで、本稿では、算数・数学科のカリキュラム分析や教材研究を行うことによって、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法を構築することを目的とする。それによって、算数・数学科の授業において児童・生徒の理解を深めるための教師の有効な視点を提案したいと考えている。そのために、以下では、まず、筆者の理解研究における前提とねらい、数学理解の2軸過程モデルの概要を述べる。そして、そのモデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法を提案する。

1. 理解の基本的なとらえ方とそのモデル化の必要性及び観点

(1) 理解の基本的なとらえ方

児童・生徒が算数・数学を理解するとはどういうことか。また、どのようなメカニズムで理解は深化するのか。これらの問いは理解研究において解明すべき究極的な問題で、かなり以前から精力的に研究されてきた数学教育研究の主要な問題の1つである。最近の数学教育研究では、認知心理学的なアプローチによってこの問題を解明しようとするものがその主流となっている。

筆者は、理解に関する認知心理学的研究の成果をもとに、「理解(understanding)」を次のようにとらえ、これらを理解研究の前提としている。

- (1) あることを理解するとは、それを既存のシエマあるいは認知構造と認知的に関係づけることである。
- (2) 理解は本質的には個人的な心的活動であり、複雑で力動的な現象である。
- (3) 算数・数学の理解にはいくつかの階層的水準がある。

(2) 理解のモデル化の必要性

理解するということは児童・生徒の内面的な複雑な活動であるから、それをとらえるためには、この内面的で直接見ることのできない理解という現象を、何らかの方法によって顕在化させることが必要である。その方法としては、例えば、児童・生徒に理解体験を記述させる想起法、認知的コンフリクトによる方法、問題解決過程を観察する方法、面接者が個別に質問などして応答を引き出すインタビュー法、発語思考法やプロトコル分析法などがある。

これらのいろいろな方法を用いて多面的なアプローチを試みるのが重要であるが、いかなる方法によっても、理解を直接とらえることはほとんど不可能であると言ってもよい。そのため、理解の構造や機能を間接的にとらえるための理論的・解釈的枠組みが必要になる。その枠組みは、原型としての理解の構造や機能をよりとらえやすくするものであるから、それを「理解のモデル (model of understanding)」と呼ぶことができる。そして、理解のモデルを構築すること、つまり理解のモデル化は、児童・生徒の数学理解を解明するために必要不可欠であると考えられる。

(3) 理解のモデル化の観点

これまでに数学教育研究において理解のモデル化が試みられてきた。その結果いろいろなモデルが提案されているが、それらはモデル化の観点の違いから大きく2つの類型に分けられる。

第1の類型は、ある時点において児童・生徒が理解している状態、すなわち理解の様相を記述しようとするもので、「様相モデル (aspect model)」と呼ばれる。それに対して、第2の類型は、児童・生徒が理解しつつある過程を記述しようとするもので、「過程モデル (process model)」と呼ばれる。

さらに、数学理解のモデル化においては、理解する対象は何かということが重要なので、理解する対象が数学的内容(手続き、概念、性質、関係)である場合と、数学的形式(具体的表現、操作的表現、図的表現、言語的表現、記号的表現)である場合とに分けることができる。また、児童・生徒の主として頭の中の変化、つまり認知構造の変容に焦点を当てる場合と、主として観察可能なものの変化、つまり行動の変容に焦点を当てる場合とがある。

このような理解のモデル化の観点は、児童・生徒の数学理解に関するいろいろな研究を整理して、その動向をとらえたり研究すべき観点を明確にしたりするのに役立つと考える。

2. 数学理解の過程モデルの具備すべき特性

(1) 過程モデルの「記述性」と「規範性」

これまでに提案された理解のモデルの多くは、児童・生徒が算数・数学をどのように理解しているかということ、すなわち理解の様相や過程を説明することにその力点が置かれているように思われる。それらは、児童・生徒の算数・数学の理解にはどのような種類があるかを記述したり、理解という内面的な現象がどのように起こっているかを記述したりできるので、「記述性 (descriptive characteristic)」を備えたものであると言える。

しかし、数学教育においては、このような児童・生徒の理解の様相や過程の実態を把握するだけでは十分とは言えない。なぜなら、数学教育は、本来、教師が教える

いう活動と児童・生徒が学ぶという活動の2つ、すなわち教授活動と学習活動によって成立するものだからである。したがって、数学理解の過程モデルが、「教授＝学習」活動としての数学教育において真に有効なものであるためには、記述性だけでなく「規範性 (prescriptive characteristic)」, すなわち児童・生徒に算数・数学を理解させるにはどのような状況を設定すればよいか, また, 理解をどのような方向に深化させればよいか, などに対する教授学的原理を示唆し得るような特性をも備えていなければならないと考える。

(2) 反省的思考による理解の深化

筆者は、これら両方の特性を備えた、数学理解の過程モデルを構築しようと試みている。その際まず注目すべきは、児童・生徒の数学理解の深化における「反省的思考 (reflective thinking)」の役割である。筆者は、《反省的思考とは、学習者が自らの無意識的な活動や操作に注意を向け、それらやその結果を意識化して、図や言葉によって表現することを目的とする思考である。》ととらえ、次の3点が重要であると考える。①反省的思考は、学習者自身による活動や操作をその前提とする、②反省的思考の対象は、その活動や操作およびその結果である、③反省的思考の目的は、無意識的な活動や操作を意識化し、それを表現することである。このような反省的思考は、数学理解の階層的水準の上昇に必要不可欠であるから、算数・数学の学習における児童・生徒の理解の深化にとって重要な役割を果たすのである。

3. 数学理解の「2軸過程モデル」の概要

児童・生徒の数学理解が深化する過程を解明するためには、①数学理解はどのような水準に沿って深化するか、②ある水準において、どのように思考が展開するか、という2つの点を明らかにすることが重要であると考えられる。そこで、筆者は、児童・生徒の数学理解の深化の過程を解明し、その深化を促進するための1つの理論的枠組みとして、理解のいくつかの階層的水準と各水準における学習段階をそれぞれ縦軸と横軸にもつ、数学理解の「2軸過程モデル (two-axes process model)」を構築した。

このモデルの「縦軸 (vertical axis)」は理解水準に関するもので、数学的対象の理解、対象間の関係の理解、関係の一般性の理解などのいくつかの階層的水準から成る。一方、このモデルの「横軸 (horizontal axis)」は学習段階に関するもので、各理解水準における以下のような直観的段階、反省的段階、分析的段階の3つの学習段階から成る。必ずしも直線的にはないが、これらの段階を経て、児童の理解水準はある水準から次の水準へと上昇し得ると考えられる。

- (1) 直観的段階 (Intuitive Stage) とは、学習者が具体物あるいは概念や性質などの数学的対象を操作する、直観的思考 (intuitive thinking) を働かせる段階である。
- (2) 反省的段階 (Reflective Stage) とは、学習者が自らの無意識的な活動や操作に注意を向け、それらやその結果を意識化して、図や言葉などによって表現することを目的とする、反省的思考 (reflective thinking) を働かせる段階である。
- (3) 分析的段階 (Analytical Stage) とは、学習者が表現したものをより洗練して数学的に表現したり、他の例で確かめたり、それらのつながりを分析したりすることによって、統合を図ることを目的とする、分析的思考 (analytical thinking) を働かせる段階である。

この「2軸過程モデル」は、教材や児童・生徒の実態に応じてさらに精緻化する必要があるが、教師が算数・数学科の授業を構成したり実践したりする際に、算数・数学の学習における児童・生徒の理解過程をとらえ、理解を深化させるための視点になり得ると考えている。そして、その際の要点は、①算数・数学の理解を、全か無かというように二者択一的にではなく、複雑な力動的過程としてとらえる、②児童・生徒の活動や表現を注意深く観察して、児童・生徒のもつ「メンタルモデル」を推測し解釈する、③算数・数学の理解過程における「直観と論理の相補性」に着目して、児童・生徒の理解の深化を図る、ということである。

4. 数学理解の2軸過程モデルに基づく授業構成の原理と方法

(1) 授業構成の原理

このような数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成の原理としては、筆者がこれまで行ってきた理論的研究と実証的研究（小山, 1997; 小山ほか, 2002; 2003）の結果、次のP1~P3が挙げられる。

- P1: 算数・数学の理解を、全か無かというように二者択一的にではなく、複雑な力動的過程としてとらえること [複雑な力動的過程としての理解過程]
- P2: 算数・数学の理解の深化を促進するために、理解の階層的水準と学習段階の2軸を設定すること [理解の階層的水準と学習段階の設定]
- P3: 教室で行われる算数・数学の教授学習活動としての授業においては、児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を重視すること [個人的構成と社会的構成の重視]

まず原理P1は、数学理解の2軸過程モデルに基づいて算数・数学科の授業構成を考える際の前提であり、算数・数学を理解するとはいかなることかについての基本的立場を述べたものである。算数・数学の学習における児童・生徒の理解について考えるとき、ある児童・生徒がある数学的な概念や性質を完全に理解しているという状態は考えられない。また、その逆に、全く理解していないという状態も考えにくい。ある時点における児童・生徒の数学的な概念や性質の理解はこれら両極の間のどこかに位置し、その理解は常に成長しつつあると考えられるのである。

数学教育における「理解論争」の契機となったSkemp (1976) の「関係的理解」と「用具的理解」の区別に示唆されるように、縦の長さが L 、横の長さが B の長方形の面積 A を求めるとき、例えば、ある児童が単に面積を求める公式 $A=L \times B$ に当てはめて面積を求めることができた（用具的理解）としても、その児童が長方形の面積を完全に理解しているとは言えない。なぜなら、その児童は長方形の面積 A を求めるのになぜ $L \times B$ でよいのかが分かって（関係的理解）いないかもしれないからである。逆に、別の児童が長方形の面積 A を求めることができなかつたとしても、その児童が長方形の面積を全く理解していないとは必ずしも言えない。なぜなら、その児童は長方形の面積を求める公式を忘れて求められなかつただけで、2つの大きさの異なる長方形の面積を比べることはできるかもしれないからである。

また、算数・数学の理解が常に成長しつつある複雑な力動的過程であるということについては、例えば、Pirie & Kieren (1989)の数学的理解の超越的再帰的モデルに関する研究で例証されている。そのモデルは①なすこと (Doing) , ②イメージをつく

ること (Image Making) , ③イメージをもつこと (Image Having) , ④性質に気づくこと (Property Noticing) , ⑤形式化すること (Formalizing) , ⑥観察すること (Observing) , ⑦構造化すること (Structuring) , ⑧創案すること (Inventing) という8つの水準から成るが, このモデルを用いて生徒の数学的理解の成長が再帰的現象であり, 決して直線的ではないものとして記述されているのである。

以上のことから, P1「算数・数学的理解を, 全か無かというように二者択一的ではなく, 複雑な力動的過程としてとらえること」を, 数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成の第1の原理とする。

次に原理P2は, 数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成にとってまさに中心的な原理である。算数・数学の学習において児童・生徒の理解の深化を促進するためには, どのような学習状況を設定すればよいか, また, どのような方向に深化させればよいか, が最も重要なこととなる。ここでの目指すべき方向に関することが理解の階層的水準としての縦軸であり, 設定すべき学習状況に関することが各理解水準における学習段階としての横軸である。したがって, 児童・生徒の算数・数学的理解を深化させるための授業構成においては, これら階層的水準と学習段階の2軸を設定する必要がある。

まず, 数学理解の階層的水準としての縦軸を設定することの必要性は, 数学的思考の特質による。例えば, van Hiele (1986) の「学習水準理論」においては, 幾何学習における5つの階層的な思考水準 (具体物, 図形, 図形の性質, 命題, 論理) が示されており, 潜在的秩序を直観したとき思考水準は飛躍し, その結果, 考察の対象が変化するという「方法の対象化」と呼ばれる数学的思考の特質がとらえられている。このvan Hieleの理論から, 数学的对象 (数や図形など) , 数学的对象の性質, 数学的性質の関係としての命題, 命題の関係としての形式論理というように, 数学理解においてはいくつかの階層的水準があることが分かる。また, Sfard (1991) は, 数や関数のような抽象的な数学的概念は2つの基本的に異なった仕方 (構造的と操作的) とらえられることを述べ, 数学的概念作用 (mathematical conception) の二重性に着目し, 特に代数的思考の本性と成長の過程をその歴史的観察に基づいて認識論的に分析することによって, 操作的概念作用が構造的な概念作用に先行すること, そしてこれら2つの概念作用が循環しながら数学的概念が発達する (具体物の集合, 自然数, 正の有理数, 正の実数, 実数, 複素数) ことを明らかにしている (小山, 2002) 。これら2つの理論が示している階層的水準は長期間の算数・数学の学習にみられるものである。それよりも短期間の算数・数学の学習においては教材分析を通してさらに細かな階層的水準を明らかにし, それを縦軸に設定する必要がある。

次に, 児童・生徒の数学理解の深化, つまり水準を上昇させるために, 数学理解の各水準に学習段階としての横軸を設定することが必要性となる。具体的には, 次のような直観的段階, 反省的段階, 分析的段階の3つの学習段階を設定する。なぜなら, 必ずしも直線的ではないが, これらの段階を経て, 学習者である児童・生徒の数学理解の水準が上昇すると考えられるからである。

- ①直観的段階: 学習者が具体物あるいは概念や性質などの数学的对象を操作する。
ここでは, 学習者は主として直観的思考を働かせる。
- ②反省的段階: 学習者が自らの無意識的な活動や操作に注意を向け, それらやその結果を意識化して, 図や言葉などによって表現する。ここでは, 学習者は主として反省的思考を働かせる。
- ③分析的段階: 学習者が表現したものをより洗練して数学的に表現したり, 他の例

で確かめたり、それらのつながりを分析したりすることによって、統合を図る。ここでは、学習者は主として分析的思考を働かせる。

これら3つの段階は、数学的思考の生産的で確実な展開に必要な直観と論理の相補性という関係と、反省的思考の重要な役割を反映したものとなっている。それは、van Hieleのいう「方法の対象化」を促すものであり、Sfardの言葉を借りれば「内面化、圧縮、具象化」の3つの階層的な段階を経るということに対応する。

以上のことから、P2「算数・数学の理解の深化を促進するために、理解の階層的水準と学習段階の2軸を設定すること」を、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成の第2の原理とする。

最後に原理P3は、教室で行われる算数・数学の教授学習活動としての授業において必要となる原理である。数学教育における理解過程に関するこれまでの研究や構成主義的認識論、社会文化主義的認識論及び相互作用主義的認識論とそれらに基づく研究 (Sierpinska & Lerman, 1996; 中原, 1999; 小山, 2001) から、数学的概念や原理・法則などを理解するという事は、本質的には個々の児童・生徒の内面で生起する心的活動であり、複雑で力動的な過程であるが、他方で、独自の文化をもった教室で行われる算数・数学の教授学習においては、ある児童・生徒の理解過程はその教室の中の教師や他の児童・生徒との社会的相互作用の影響を受けることが明らかになってきている。

したがって、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成においては、数学的知識は伝達によって受動的に受け取られるものではなく認識主体によって能動的に構成されるものであるとする構成主義的認識論に立脚して、個々の児童・生徒の個人的構成活動を基本とする。そして、個々の児童・生徒を文化や社会的状況の中に置かれている者とみて、数学的知識は社会的に生産され常に変化し得る社会的価値と結びついた社会的に統制される社会的知識であるとする社会文化主義的認識論や数学的知識の源と成長の過程としての発達を相互作用とは不可分なものであるとする相互作用主義的認識論の立場から補完することを考慮して、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成においては児童・生徒同士や教師との相互作用を通しての社会的構成活動を組み込むこととする (小山ほか, 2000)。上述の原理P2の3つの学習段階との対応で言えば、児童・生徒の個人的構成活動は直観的段階、反省的段階、分析的段階のいずれの段階でも必要であるのに対して、社会的構成活動は反省的段階と分析的段階における個人的構成活動をよりよく促進するのに必要である。

以上のことから、P3「教室で行われる算数・数学の教授学習活動としての授業においては、児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を重視すること」を数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成の第3の原理とする。

(2) 授業構成の方法

以上のような算数・数学科の授業構成の3つの原理を基に、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成を行っていく。その際の授業構成の方法としては、筆者がこれまで行ってきた理論的研究と実証的研究 (小山, 1997; 小山ほか, 2002; 2003) の結果、次のM1~M3が挙げられる。

M1: 算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容について、算数・数学科のカリキュラムを分析することにより、数学理解の階層的水準を明らかにするこ

と〔理解の階層的水準の明確化〕

M2: 算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容に対する理解の程度について、診断的評価や事前調査などを行うことによって、その実態を把握すること
〔理解の程度の実態把握〕

M3: 数学理解の階層的水準と児童・生徒の理解の程度の実態把握を基に、算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容についての教材研究を行い、3つの学習段階を具体化し、児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を位置づけること〔理解の学習段階の具体化〕

まず方法M1は、算数・数学科の授業において児童・生徒の数学理解の深化の目指すべき方向を明らかにすることである。それは、算数・数学科のカリキュラムを分析することによって、長期的にみれば児童・生徒が学習する数学的内容の体系を明確にすることであり、短期的には算数・数学科の単元や1時間ごとの授業のねらいを明確にすることにつながる。

ここでは、その具体例として、小学校の算数科と中学校・高等学校の数学科における「図形」学習に焦点化し、「図形」領域のカリキュラム(文部省, 1999a; 1999b; 1999c)を分析することによって、児童・生徒の数学理解の深化の目指すべき方向を明らかにしてみよう。算数・数学科における「図形」学習のねらいは、大きく言って、①基本的な平面図形や空間図形についての理解を深める、②論理的に考察し表現する能力を伸ばすことである。そして、「図形」領域の学習において児童・生徒の数学理解の深化の目指すべき方向は、以下のように整理できる。

《小学校算数科》

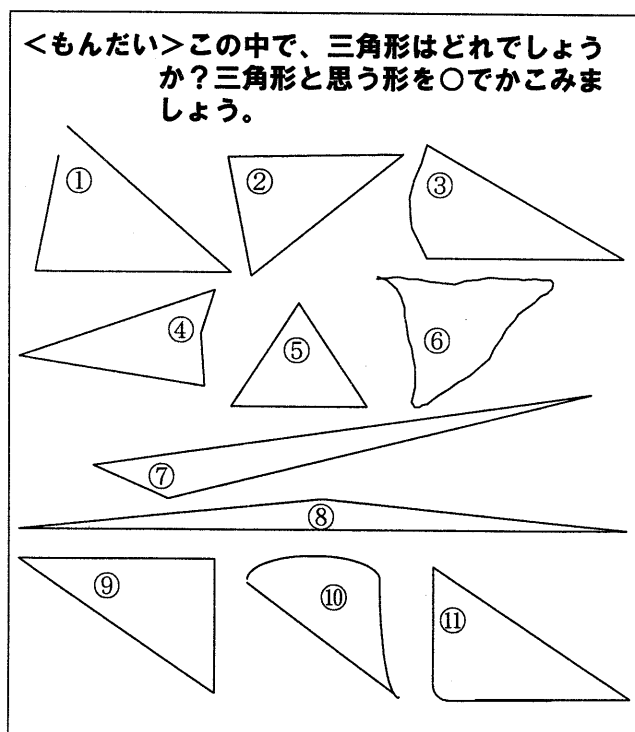
小学校1年:	身近な立体 (観察, 構成)	→	ものの形
小学校2年:	ものの形 (観察, 構成)	→	図形 〔三角形, 四角形〕 (かく, 作る)
小学校3年:	ものの形 (観察, 構成)	→	図形を構成する要素 〔正方形, 長方形, 直角三角形〕 (かく, 作る, 敷き詰める)
小学校4年:	図形 (観察, 構成)	→	図形を構成する要素 〔二等辺三角形, 正三角形〕 〔円, 球〕 (かく, 作る, 敷き詰める)
小学校5年:	図形の構成要素 及びそれらの 位置関係 (平面図形) (観察, 構成)	→	直線の平行や垂直 基本的な平面図形 〔平行四辺形, 台形, ひし形〕 基本的な図形の簡単な性質 円周率 (考察) (かく, 作る, 敷き詰める)
小学校6年:	図形の構成要素 及びそれらの 位置関係 (立体図形) (観察, 構成)	→	基本的な立体図形 〔立方体, 直方体〕 (見取図, 展開図) 直線や平面の平行及び垂直 角柱及び円柱 (考察) (かく, 作る)

《中学校数学科》	
中学校1年： 平面図形や空間図形 〈観察，操作，実験〉	<p>→ ☆図形に対する直観的な見方や考え方 ☆論理的に考察する基礎 〔線対称，点対称〕</p> <ul style="list-style-type: none"> ・角の二等分線，線分の垂直二等分線，垂線の作図 ・空間における直線や平面の位置関係 ・空間図形を直線や平面図形の運動によって構成されているものにとらえる ・扇形，柱体，錐体の計量
中学校2年： 平面図形の性質 〈観察，操作，実験〉	<p>→ ☆基本的な平面図形の性質の理解を深める</p> <ul style="list-style-type: none"> ・平行線や角の性質 ・三角形の角の性質 <p>☆数学的な推論の意義と方法を理解し，推論の過程を的確に表現する</p> <ul style="list-style-type: none"> ・証明の意義と方法 ・三角形の合同条件 ・円と中心角の関係
中学校3年： 平面図形の性質 〈観察，操作，実験〉	<p>→ ☆基本的な平面図形の性質の理解を深める</p> <p>☆図形について見通しをもって論理的に考察し表現する</p> <ul style="list-style-type: none"> ・三角形の相似条件 ・平行線と線分の比 ・三平方の定理とその利用
《高等学校数学科》	
数学Aの「平面図形」： 三角形の性質 円の性質	<p>→ ☆基本的な図形の性質の理解を深める ☆図形の見方を豊かにする ☆図形の性質を論理的に考察し処理する</p> <ul style="list-style-type: none"> ・三角形の角の二等分線 ・三角形の外心，内心，重心 ・三角形の辺と角の大小 ・2つの円の位置関係 ・円周角の定理とその逆 ・円に内接する四角形 ・円の接線と弦のつくる角 ・方べきの定理
数学Aの「集合と論理」： 命題と証明	<p>→ ☆命題と集合</p> <ul style="list-style-type: none"> ・命題の真偽と集合 ・必要条件，十分条件，必要十分条件 ・否定 ・逆，裏，対偶 <p>☆証明法（対偶を用いた証明，背理法）</p>

次に方法M2は、方法M1によって明確になった数学理解の深化の目指すべき方向を考慮し、算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容についての診断的評価や事前調査などを行うことによって、児童・生徒のその内容の理解の程度などの実態を把握し、次の方法M3によって学習段階を具体化するための判断材料とすることである。児童・生徒の理解の実態にそぐわなければ、算数・数学科の授業において設定される学習状況があまりにも平易すぎたり逆にあまりにも困難すぎたりして、児童・生徒の理解の深化に寄与しないということが考えられるからである。もちろん、児童・生徒によって理解の程度に差があることは十分に考えられる。すでに述べたように、理解は本質的には個人的な心的活動であり、複雑で力動的な現象であるから、むしろ、児童・生徒の理解の程度や理解の仕方に差があるのは自然なことであると言ってもよいかもしれない。したがって、児童・生徒の数学理解の実態に応じて、個別、小集団、一斉のどの学習指導形態を採用するか、あるいはそれらをどのように組み合わせていくかが決められなければならない。いずれの学習指導形態を採用しようとも、個々の児童・生徒に応ずる学習指導を行い、数学理解の深化を促すことが大切である。

ここでは、その具体例として、小学校の算数科における第2学年の「三角形と四角形」の学習に焦点化し、その学習に入る前に児童の三角形についての理解の程度を調べるために行った事前調査の方法とその結果から明らかになったことをみてみよう（小山ほか、2002、p.90）。

質問紙法により、下の左図のような11個の図形を第2学年の児童38名に提示し、三角形の同定を行わせた。そして、下の右表のような結果が得られた。



子どもの反応

・①を選択した子ども……	3名/38名 (8%)
・②を選択した子ども……	33名/38名 (87%)
・③を選択した子ども……	0名/38名 (0%)
・④を選択した子ども……	11名/38名 (29%)
・⑤を選択した子ども……	38名/38名 (100%)
・⑥を選択した子ども……	0名/38名 (0%)
・⑦を選択した子ども……	23名/38名 (61%)
・⑧を選択した子ども……	25名/38名 (66%)
・⑨を選択した子ども……	31名/38名 (82%)
・⑩を選択した子ども……	0名/38名 (0%)
・⑪を選択した子ども……	2名/38名 (5%)

このような事前調査の結果から、学習前の子どもたちの実態として、以下のことが明らかになった。

- ア. 図形③, ⑥, ⑩を選択した子どもが1名もいないことから, すべての子どもが三角形を直線で構成されているものと理解している。
- イ. 図形①, ⑪を選択した子どもが2, 3名いることから, 3本の直線で構成されている場合には完全に閉じていない図形でも, あるいは1つの角が多少丸みをおびている図形でも, それを三角形であると判断する子どもが少しいる。
- ウ. 図形②, ⑨を選択した子どもが30余名で, 数名の子どもが選択しなかったということから, 図形の向きによっては(特に, 典型的な上向きに置かれていない場合には), それを三角形と判断できない子どもが数名いる。
- エ. 図形⑦, ⑧を選択した子どもが60%余で, 約40%の子どもが選択しなかったことから, 図形の大きさによっては(特に, 最も長い辺に対する高さが極端に小さく細長い場合には), それを三角形と判断できない子どもが4割近くいる。
- オ. 図形④の凹四角形を選択した子どもが約30%いることや, 図形⑦, ⑧の細長い三角形を選択しなかった子どもが約40%いることから, 子どもが図形を同定する際の視点としては, 頂点や辺などの構成要素の数よりも「概形としてのかたち」という全体的な見えの方が優位である。

そして最後に方法 M3 によって, 数学理解の階層的水準と児童・生徒の理解の程度の実態把握を基に, 算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容についての教材研究を行い, 3つの学習段階を具体化し, 児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を位置づける(中原, 1995, pp.322-328)。実際の算数・数学科の授業はこれら3つの段階に沿って直線的に展開するとは限らない。また, 1つの単元の学習においてこれら3つの段階が繰り返されながら児童・生徒の数学理解が深化していくように授業を構成していくこととなる。

ここでは, その具体例として, 上述の事前調査の結果明らかになった小学校第2学年の児童の三角形についての理解の実態を踏まえて行われた, 単元「三角形と四角形」の学習における授業構成をみてみよう(小山ほか, 2002, pp.90-92)。

指導目標

- ジオボードで構成された図形を観察・分類するなど, 算数的に処理することのよさに気づくことができる。また, 図形の調和のとれた形の美しさや, 組み合わせることができる美しさを, 具体的な操作活動を通して感じるすることができる。
- ものの形についての観察や構成などの活動を通して, その相違や共通点, 図形の性質を考えることができる。
- ものの形についての観察や構成などの活動を通して, 三角形や四角形を弁別したり, 作図したりすることができる。
- 直線概念を理解し, 三角形と四角形の定義や性質が分かる。

指導計画(全11時間)

- | | | | |
|-----|--------------|----|-----|
| 第1次 | ジオボードで形をつくろう | …… | 2時間 |
| 第2次 | 三角形・四角形を調べよう | …… | 5時間 |
| 第3次 | 直角のある図形をつくろう | …… | 4時間 |

第1次の2/2時の授業構成

実態調査から明らかになった「図形を概形で見える見方」から, 本単元の目標である「図形を構成要素の数で見える見方」へと, 児童の図形理解の深化を促すために, 次の2つの点に着目して授業構成を行った。

- ①第1学年で獲得した, 図形をその機能で見える見方や概形で見える見方といった現

在の自分自身の図形に対する認識をもとに、図形を分類・操作することができるような課題追究の場（学習状況）を工夫すること〔主として個人的構成活動〕

②図形の多様な認識のよさを共有し、吟味することができるような社会的相互作用の場（学習状況）を工夫すること〔主として社会的構成活動〕

①課題の提示と課題追究の場の工夫

本時（第1次の2/2時）においては、前時までのジオボード、ジオペーパーによる図形の構成活動〔直観的段階〕でつくりだされた多様な三角形、四角形の分類の仕方を課題として取り上げる。この段階において子どもの図形のとらえ方は子どもによって個々ばらばらであり、そのズレは子どもの今までの図形の見方の違いである、ととらえられる。図形の多種多様な分類の仕方を課題として取り上げることで、図形の見方を子ども自身にはっきりと意識させ〔反省的段階〕、授業後に、新たに加わった見方は何か、それによって図形のとらえ方はどう変わったかを明確にさせる〔分析的段階〕ことができるように工夫した。

②図形の多様な認識を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場の工夫

子どもたちが分類する図形のとらえ方の中に数学的知識を発見させ、より価値ある数学的知識へと高めさせていくためには、子どもから出てくる多様な分類の視点を意味づけたり、関連づけたりすることが大切である。そのための手だてとして、子どもたちに多様な図形分類の視点を表出させ〔反省的段階〕、共通点や相違点を吟味させながら、全員が納得いく考えを創り出させる〔分析的段階〕ことが考えられる。

第2次の3/5時の授業構成

子どもの凹四角形の理解の深化を促すために、自分自身の図形に対する認識を明らかにすることができる課題追究の場（学習状況）と、図形の多様な認識を共有し、吟味することができる社会的相互作用の場（学習状況）の2つに着目して、以下のようにして授業構成を行った。

①課題の提示と課題追究の場の工夫

ア. 子どもたちに共有させる課題提示の場の工夫

本時（第2次の3/5時）においては、前時までのジオボードによる三角形や四角形の構成活動〔直観的段階〕でつくりだされた凹四角形のとらえ方を課題として取り上げる。この図形のとらえ方は子どもによって個々ばらばらであり、そのズレは子どもの図形の見方の違いである、ととらえられる。凹四角形のとらえ方を課題として取り上げることで、図形の見方を子ども自身にはっきりと意識させ〔反省的段階〕、授業後に、新たに加わった見方は何か、それによって図形のとらえ方はどう変わったかを明確にさせる〔分析的段階〕ことができるように工夫した。

イ. 多様な学習具による課題追究活動の場の工夫

子どもたちに「凹四角形は三角形か四角形か」という課題について、自分自身の図形の見方をはっきりさせるためには、学習具を限定せずに追究させる〔直観的段階〕ことが大切であると考え。例えば、辺の数に着目した子どもにとっては、辺の数がよく分かる数え棒で図形をつくりかえることで自分の見方をはっきりするのであろう。また、課題の条件にあう他の図形を構成しようとする子どもにとっては、頂点の位置を自由に変えて図形をつくることのできる「ジオボード」や「ジオペーパー」という教具をつかった方が分かりやすいであろう。このように、多様な学習具を子どもが自己選択できるように場を工夫することで、子どもに自分自身の図形のとらえ方を明確にさせることができると考えた。

②多様な凹四角形の認識を共有し、新たな図形認識の観点から凹四角形を吟味することができる社会的相互作用の場の工夫

子どもたちが意味づける凹四角形のとらえ方の中に数学的知識を発見させ、より価値ある数学的知識へと高めさせていくためには、子どもから出てくる多様な発想を意味づけたり、関連づけたりすることが大切である。そのための手だてとして、子どもたちに図形の多様なとらえ方を表出させ〔反省的段階〕、共通点や相違点を吟味させながら、全員が納得いく考えを創り出させる〔反省的段階〕ことが考えられる。

5. おわりに

本稿では、児童・生徒の数学理解の深化を促すための次のような数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科の授業構成の原理と方法を提案した。

授業構成の原理

数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成の原理として次のP1～P3が挙げられる。

- P1: 算数・数学の理解を、全か無かというように二者択一的にではなく、複雑な力動的過程としてとらえること〔複雑な力動的過程としての理解過程〕
- P2: 算数・数学の理解の深化を促進するために、理解の階層的水準と学習段階の2軸を設定すること〔理解の階層的水準と学習段階の設定〕
- P3: 教室で行われる算数・数学の教授学習活動としての授業においては、児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を重視すること〔個人的構成と社会的構成の重視〕

授業構成の方法

上記の3つの原理を基に、数学理解の2軸過程モデルに基づく算数・数学科における授業構成を行っていく際の授業構成の方法として次のM1～M3が挙げられる。

- M1: 算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容について、算数・数学科のカリキュラムを分析することにより、数学理解の階層的水準を明らかにすること〔理解の階層的水準の明確化〕
- M2: 算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容に対する理解の程度について、診断的評価や事前調査などを行うことによって、その実態を把握すること〔理解の程度の実態把握〕
- M3: 数学理解の階層的水準と児童・生徒の理解の程度の実態把握を基に、算数・数学科の授業で児童・生徒が学習する内容についての教材研究を行い、3つの学習段階を具体化し、児童・生徒の個人的構成と社会的構成の両方の活動を位置づけること〔理解の学習段階の具体化〕

これらの原理と方法の妥当性と有効性は、これまで筆者が行ってきた理論的研究と実証的研究によってある程度例証されている。しかしながら、まだ限られた数の事例研究にとどまっているので、今後は、事例研究の数を増やしてその有効性を実証的に検討することによって、これらの原理や方法が児童・生徒の理解を深化させるための算数・数学科の授業を構成する際に教師にとって有効な視点となるようさらに具体化・精緻化を図りたいと考えている。

〈参考文献〉

- 小山正孝 (1992), 「数学教育における理解のモデルについて」, 岩合一男先生退官記念出版会編『数学教育学の新展開』, 聖文社, pp.172-184.
- 小山正孝 (1997), 「数学学習と理解過程」, 日本数学教育学会編『学校数学の授業構成を問い直す』, 産業図書, pp.135-149.
- 小山正孝 (2001), 「教科教育学研究パラダイムの検討—数学教育学を事例として—」, 日本教科教育学会編『新しい教育課程の創造—教科学習と総合的学習の構造化—』教育出版, 2001, pp.164-174.
- 小山正孝, 中原忠男, 武内恒夫, 赤井利行, 宮本泰司, 脇坂郁文 (2002), 「算数学習における理解過程に関する研究 (I) —数学理解の2軸過程モデルの理論的再検討—」, 広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制『研究紀要』, 第28号, pp.117-123.
- 小山正孝, 磯部年晃, 中原忠男, 赤井利行, 中村武司 (2002), 「算数学習における理解過程に関する研究 (II) —第2学年における三角形と四角形の概念を中心に—」, 広島大学学部・附属学校共同研究体制機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第30号, pp.89-98.
- 小山正孝 (2002), 「数と計算・代数の認識に関わる基礎理論の検討」, 日本数学教育学会『第35回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録—今後の我が国の数学教育研究—』, pp.84-88.
- 小山正孝, 赤井利行, 中原忠男, 中村武司, 磯部年晃 (2003), 「算数学習における理解過程に関する研究 (III) —第5学年における「台形の面積の求め方」を中心に—」, 広島大学学部・附属学校共同研究体制機構『広島大学学部・附属学校共同研究紀要』, 第31号, pp.115-122.
- 中原忠男 (1995), 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』, 聖文社.
- 中原忠男 (1999), 「数学教育における構成主義的授業論の研究 (II) —「数学学習の多世界パラダイム」の提唱—」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第5巻, 1999, pp.1-8.
- 文部省 (1999a), 『小学校学習指導要領解説—算数編—』, 東洋館出版社.
- 文部省 (1999b), 『中学校学習指導要領(平成10年12月)解説—数学編—』, 大阪書籍.
- 文部省 (1999c), 『高等学校学習指導要領解説—数学編・理数編—』, 実教出版.
- Koyama, M. (1993), Building a Two-Axes Process Model of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol. 1, pp.63-73.
- Koyama, M. (1997) Research on the Complementarity of Intuition and Logical Thinking in the Process of Understanding Mathematics, *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, Vol. 5, pp.21-33.
- Pirie, S. & Kieren, T. (1989), A Recursive Theory of Mathematical Understanding, *For the Learning of Mathematics*, Vol. 9, No. 3, pp.7-11.
- Sfard, A. (1991), On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin, *Educational Studies in Mathematics*, Vol.22, 1-36.
- Sierpinska, A. and Lerman, S. (1996), Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. In Bishop, A. et al. (eds.), *International Handbook of*

- Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, pp.827-876.
- Skemp, R. R. (1976), Relational Understanding and Instrumental Understanding, *Mathematics Teaching*, No.77, pp.20-26.
- van Hiele, P. M. (1986), *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*, Academic Press.

研究資料

I. 中学校数学科授業のprotocols	87
II. 高等学校数学科授業のprotocols	117

中学校数学科学習指導案

指導者 富永 和宏

日時 2003年 11月14日(金) 第2限(10:35～11:25)

場所 研修館 第1研修室

学年・組 中学校2年B組 39名(男子20名, 女子19名)

題目 三角形と四角形

- 目標
1. 二等辺三角形, 平行四辺形, 円などについて, 図形の性質や条件を理解させる。
 2. 証明に使われる用語の意味を理解させ, 証明の意義や必要性を感じ取らせる。
 3. 図形の性質を調べたり, 証明したりすることを通して, 演繹的に推論を進め, それを記述することができるようにする。
 4. 定義や定理を利用して, いろいろな図形の性質を証明できるようにする。
 5. 具体的な例をもとに, 図形の性質を調べるなどの数学的な活動を体験させるとともに, 課題を解決しようとする態度を育てる。

時間配当	1. 三角形	…… 8時間
	2. 三角形と円	…… 4時間
	3. 四角形	…… 7時間
	4. (課題学習) 星形多角形の研究	…… 2時間 (本時はその1時間目)

指導の経過と今後の計画

小学校における図形の学習は, 三角形や四角形, 円などの図形を測る, 折る, 重ねるなど, 具体的な活動を取り入れながら, その性質を考察する。中学校第1学年では, 角の二等分線や垂直二等分線などの作図を通して, 図形の性質を考察し, 論理的に考える素地を培っている。また, 中学校第2学年では, 平行線と角, 三角形, 円, 四角形などの図形の性質を考察するのに, 定義と仮定に基づき論証することを通して, 論理的に推論を進める力や推論の過程を的確に記述する力を養っている。

本時は課題学習として, 正 n 角形において k 個隣の頂点を順に結んだときにできる図形を題材に取り上げ, その性質を調べる活動を行う。この図形は n が k で割りきれない場合には星形多角形となる。また, k が n の $1/2$ を超えない範囲では, 「先端の角」(次頁の図を参照)と呼ぶことにした角の大きさは k の1次関数となり, その変化の割合は $360^\circ/n$ である。このことは n や k を変化させたいくつかの場合について調べ, その結果を検討することで予想することができる。

この課題のよさは, 得られる予想が複数あり, なおかつその難易度がいくつかの段階にわかれることである。したがって, 個々の生徒の理解度に応じた発見があり, 正 n 角形の内角の大きさを表す式と先端の角の大きさを表す式の関係, k が n の $1/2$ を超えた場合にも適用できるように角の大きさについての解釈の方法を考えることなど, 発展的な課題を提示することもできる。この課題のよさをいかすため, 机間指導やノート点検を利用して生徒の学習の状況を観察し, 個々の生徒に適切な課題を提示するなど, 個に応じた学習を進めていきたい。

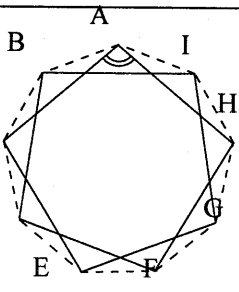
さらに, この課題学習において k や n を一般化した場合のことを考え, その結果を証明することを通して, 一般化することの意味について考える機会をもたせ, 数学的な見方や考え方のよさを感じ取らせたい。また, このような学習経験を積み重ねることで, 生徒の課題に取り組む姿勢を育てられると考えている。

本時の題目 星形多角形の先端の角の大きさ

本時の目標

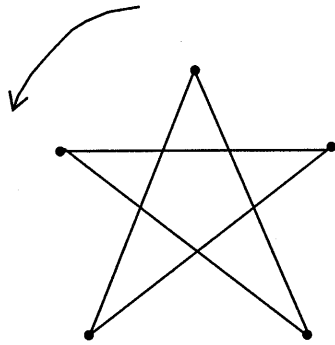
1. 星形多角形における先端の角の大きさの求め方を理解させる。
2. 課題を一般化したときの結果を調べることを通じて, 数学的な見方や考え方のよさを感じ取らせ主体的に課題に取り組む態度を養う。

本時の指導過程

学習内容	指導過程・学習活動	指導上の留意点・評価
<p>(導入) 星形多角形の つくり方</p> <p>(展開) 星形多角形の 頂点の周りの 角の大きさ</p> <p>頂点の周りの 角の大きさの 性質調べ</p> <p>課題の発展</p> <p>予想の確認 (まとめ) 本時のまとめ</p>	<ul style="list-style-type: none"> 正五角形に切った厚紙を提示し、星形は正五角形で2個隣の頂点を順に結んでいけばつくることができることを確認する。 <p style="text-align: center;">課題 1</p> <p>右図のように、正九角形において2個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形の頂点の先端の角(二重線部)の D 大きさはいくらか。</p>  <ul style="list-style-type: none"> $\angle CAH$ の大きさを求めるには、どの角の大きさがわかればよいかを問う。 二等辺三角形 ABC の底角の大きさを求めるために、正九角形の一つの内角の大きさを確認する。 解答を確認する。(100°) <p style="text-align: center;">課題 2</p> <p>正九角形において、k 個隣の頂点を順に結んでできる図形の先端の角の大きさを、$k = 2, 3, 4$ の場合について調べ、わかったことをまとめよ。</p> <ul style="list-style-type: none"> ワークシートにかかっている正九角形を利用して星形多角形をつくり、それぞれについて先端の角の大きさを求めさせる。 調べたことを表に整理して、気がついたことをまとめる。 正 n 角形において、k 個隣の頂点を順に結んでできる星形多角形の先端の角の大きさは、どのような式になるのかを、まとめた結果から予想させる。 正十二角形において、たてた予想を確かめる。 正九角形や正十二角形における星形多角形では先端の角の大きさは k の 1 次関数になることを確認する。 次回はこの性質が一般に成り立つことを確かめる方法を考えることをいう。 	<p>○図形の性質を利用して課題を解決することができるか。</p> <p>・正 n 角形の内角の大きさを表す式を確認する。 $180^\circ - 360^\circ / n$</p> <p>○先端の角の大きさを求めることができるか。</p> <p>○意欲的に課題に取り組もうとしているか。</p> <p>・予想される生徒の意見</p> <ul style="list-style-type: none"> * k が 1 増えるごとに先端の角は 40° ずつ減る。 * 360° を九角形の 9 で割ると変化の割合になる。 * 先端の角の大きさは $180^\circ - 40^\circ \times k$ という式で表される。 <p>・正十二角形もワークシートにかいておく。</p> <p>・進んだ生徒には、正 n 角形の内角の大きさを表す式と比較させ、気づいたことをまとめさせる。</p>
備考	<p>使用教科書 中学数学 2 (大阪書籍)</p> <p>準備物 正五角形に切った厚紙, ワークシート</p>	

中学校第2学年授業「星形多角形の研究」(富永和宏先生)のプロトコル

T: えー、昨日は、あの一、星形多角形、あれが星に見えないっていう人もいましたが、ま、一応星ということですよ。あの一、五つ星とか、七つ星とか、とかいうのもありますが、はい、ちょっと復習いいですが、例えば、こういう風に、ま、大体一緒な、正五角形があったとしますね、で、星描こうと思ったらどうしたらいいかという、こうやろ、こう、こういう感じな、こうやね、これで星形に見えますね。たら、えーっと、星描くには、例えばこっちからみたら、こう、時計と逆さまに、えーっと、こっちの回り方で見ていけば、1, 2, 二つ飛ばし、んで、次ここから、1, 2, また二つ飛ばし、で、1, 2, また二つ飛ばして、で、1, 2, 二つ、ま、二つ飛ばしにこれなとんやな。二つ隣って、でまた1, 2で、二つ隣りでぐるりと、ま、回ってきて、星が完成っていう風になりますね(板書1)。これは、えーっと、昨日の七角形でも一緒やったよね。えーな。オッケー? じゃあ、えーと、今日はですね、えーと、今度は、九角形にしようか。



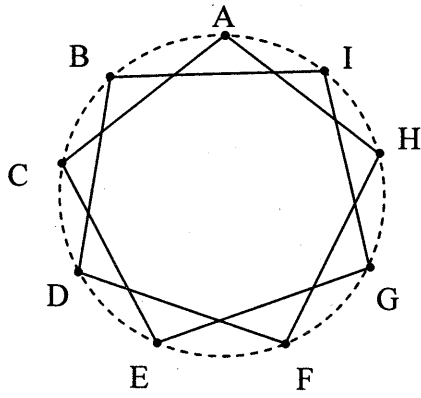
板書1

S: (何人かが) 九角形?

T: というのが今日のお題でございます。(プリントを配布) 表裏あるけど、こっちにしよう。表を、ちゃんと題書いてありますね。はい、ほなら、さっそくパシッと行ってまおうか。えーっと、課題1です。右図のように、正九角形において、□個ですけども、ま、これは図見たら分かるな。これは、Aからスタートしたと見たら、ま、こっち回りに考えて、こっち回りに考えたら2つだな。逆周りにみたらこれ7つやけども、(ボソボソ) 2つ、でC、でまた、2つ行ってまたDっていう風にこれは、2つ2個隣の頂点を順に結んでできる、星形多角形ですね。はい。ここ2個ですね。そのときここの二重線部、ちょうどそういう星形の先ちょよになっているの、ここの角の大きさを求めなさいっていう問題です。はいやってみよう。

(机間巡視)

(板書を全て消し、新たな板書2をかく)



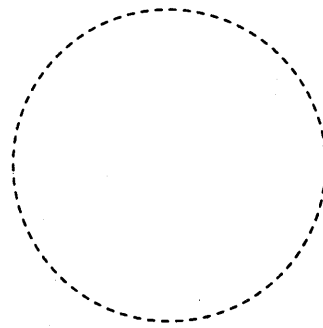
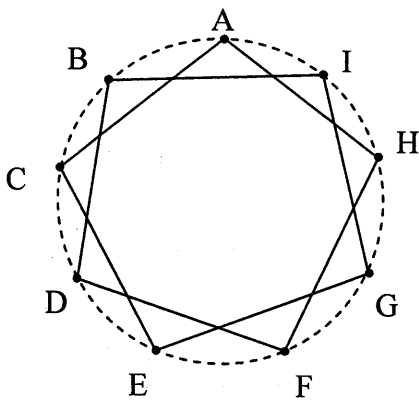
板書 2

(机間巡視)

さあ、どないな？もうちょこっとやけど。

(机間巡視)

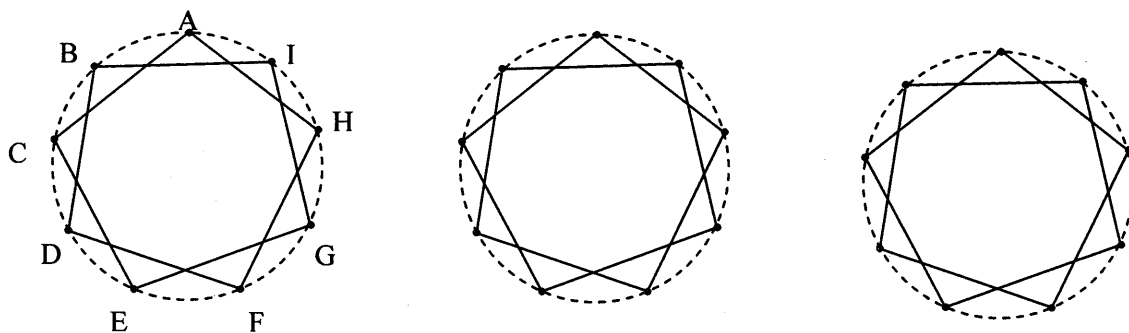
はい、えーっと、それじゃあ、ちょっとぼちぼち、やっていこうか。えーっとね、大体見た感じ今んところ 3 パターンぐらい、えー、解答があったと思うんですけども、誰に言ってもらおうかなー、えーっと、じゃあ、S2 と、えーっと、それからじゃあ S3 と、それから S1、3 人いこうかな。ちょっと、図用意しとくから。(板書 3 の右側の円をかくがすぐ消す)いくらなんでもこれはひどいな、やーめた。(コンパスを使って円を描き、板書 4) ん、ま、多少形が崩れているのはご愛嬌ということで、はい、じゃあ、さっき言った 3 人ちょっと前に来てやってもらおうか。とりあえずな。はい、じゃあ、S1 と、S2 と、S3。はい、じゃあ 3 人来て。



板書 3

S: (呼ばれた 3 人が前に出て、解答を書き始める)

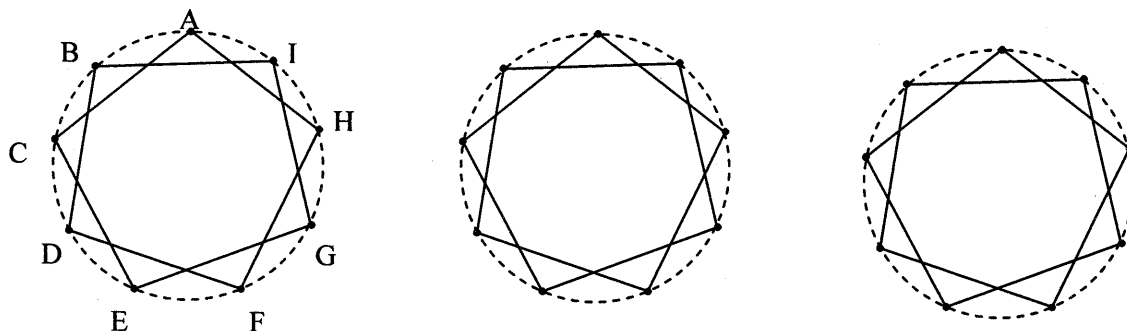
T: まず、さき、あの、式書いてくれる、どこどこ、どこか。それぞれ別々の式が、出てるからそれを書いてくれたら。(前に出てきた生徒の内の一人在教師に質問する)



板書 4

お、お、みんなに見えるようにある程度の大きさと書いてくれよ。あんまり小さすぎても見られへんけえの。

S : (3人の生徒が板書を終える) (板書 5)



$$180 - (40 + 40) = 100$$

$$180 \times (9 - 2) \div 9 = 140$$

$$(180 - 140) \div 2 = 20$$

$$140 - 20 \times 2 = 100^\circ$$

$$360 - 180 \times (9 - 2) = 360 + 540 = 900$$

$$900 \div 9 = 100$$

板書 5

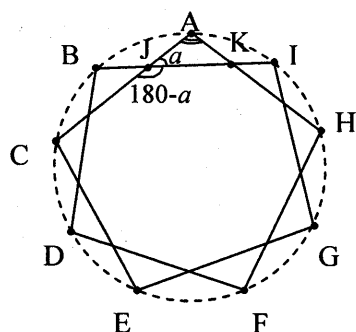
T : はい、ほな、順番にちょっとみんなに説明していってもらおうか。はい、えーと、じゃあ、うん、ちょっとじゃああの、S2 と S3 は、あの一、のけといてもろうて。あ、いや、ま、前に控えといてもろうて。んじゃ、はい S1 から。はい。あの必要になったら線引いてくれようが、あのここです (ボソボソ) うん、み、みんなに分かるように、みんなじゃなくてわしも。

S1 : (ボソボソと) ここが二等辺三角形っていうことみんなに言わなくてもいい?

T : うん、二等辺三角形。いやいや、ちゃんとみんなに言わないかんがな。わしがこっちにいこうか。わしがこっちにいったらいいじゃないか。みんなの方に。(生徒たち側に行く)

S1 : はい、ここの三角形 ($\triangle AKJ$) が (板書 6 : S1 の板書を参照。ただし点の名前 (J

と K) はこちらが便宜上振ってある。)



$$180 \times 7 \div 9 = 140$$

$$a = 40$$

$$180 - (40 + 40)$$

$$= 100$$

板書 6 : S1 の板書

T : (ボソボソ)

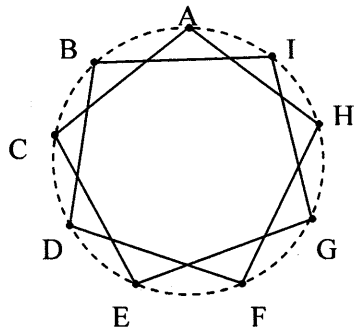
S1 : 二等辺三角形だから、ここ ($\angle AKJ$) を $\angle a$ とすると、ここ ($\angle IJC$) が $180 - a$, $180 - a$ だから、で、この、この内側の九角形の、1つの内角が、 180 かけ 7 で、 100 , 7 , 割る 9 で、 140 度だから、 $180 - 140$ 度っていうことになって、 $a = 40$ 度。さっき言ったように、ここ ($\triangle AKJ$) が二等辺三角形だから、ここ ($\angle AJK$) も a で、三角形の内角の和が 180 ひく、 40 , 40 , 100 度になりました。

T : はい、オッケーいいです。

質問ある人いますか? えー、はい、それじゃあ、オッケーオッケー。はい S1, いいです。はい。えー、ちょっとあの S1 の背中になって見えにくかった人もいるかもしれないからもう一回復習するな。と、ここ ($\angle AKJ$) を a , まあ、これがまあ、みなのおみてもろうたらわかりますように、これ ($\triangle AKJ$) 二等辺三角形ということですから、はい。そうすると、ここ ($\angle AKJ$) を a , そしたらここ ($\angle AJK$) も a やんな。2つの a が分かっちゃえば、ここ ($\angle KAJ$) が分かる。したら、この a 調べようと思ったら、この内側の、ここに九角形があるからこれもわしがフリーハンドで描いてしもうたから、らしくないんですけども、みんなのはちゃんと、ねコンピュータを使って描いてるから、それらしくなってるけども、この黄色の、やっぱり、この九角形が、んで、どれも見た感じ角一緒な。そしたら、あれやろ、えーっと、じゃあこの角一個何度っていったら、えーっと、九角形の内角の和は、 180° , あの一、三角形で割ってたら 7 つに分けられるから、ね、 2 少ないんやな。だから 180 かけ 7 割る 9 ということで 140 度やな。ここ 140 度。だからここ ($\angle AKJ$) 40 度やから、ここ 40 度、 40 度やから、ここ ($\angle KAJ$) が 100 度になるでっていう意味やな。よい? はい、ということです。オッケーです! じゃあ次。

S2 : (板書 7 : S2 の板書を参照) この最初の式は、外側の点線の、九角形の1つの

内角で、この三角形 ($\triangle AHI$) に注目して、ここ ($\angle AIH$) が 140



$$180 \times (9-2) \div 9 = 140$$

$$(180-140) \div 2 = 20$$

$$140 - 20 \times 2 = 100^\circ$$

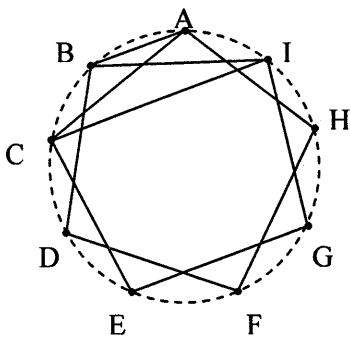
板書 7 : S2 の板書

T: それはさっきの説明と一緒にやな。九角形・・・

S2: それでオレンジの三角形 ($\triangle AHI$) が二等辺三角形だから、ここ ($\angle IAH$) とここ ($\angle IHA$) が 20 度で、それでこの三角形 ($\triangle ABI$) も同じように、この三角形 ($\triangle AHI$) と同じだから、ここ ($\angle AIB$) とここ ($\angle ABI$) が 20 度になって、んで、ここから、この 140 度から、20 度かける 2 を引いたら、100 度になりました。

T: はい、オッケーです。いいですね、はい、オッケーですよ。その次の人、はい。

S3: (平行線 AB と CI を引く。板書 8 を参照) ここの小さい三角形 ($\triangle ABJ$) と、ここの三角形 ($\triangle CJI$) が... だったら、対頂角で、ここ ($\angle AJB$ と $\angle CJI$) が、同じ角になるから、えーと、ここの角 ($\angle JIC$ と $\angle JCI$) をこっち側 ($\angle BAJ$ と $\angle ABJ$) へ移して、ここに一個五角形が出来ます (五角形 ABDFH をなぞる)。それで、...



$$360 + 180 \times (5-2)$$

$$= 360 + 540$$

$$= 900 \quad 900 \div 9 = 100$$

板書 8 : S3 の板書

ここに四角形ができるから（四角形 CEGI をなぞる），ここの，えー，ここの，全部の角は，360 度たす，540 で，900 になって，全部，角は同じ大きさだから，900 割る 9 で 100 度…。

T: オッケー，はい，いいですね。

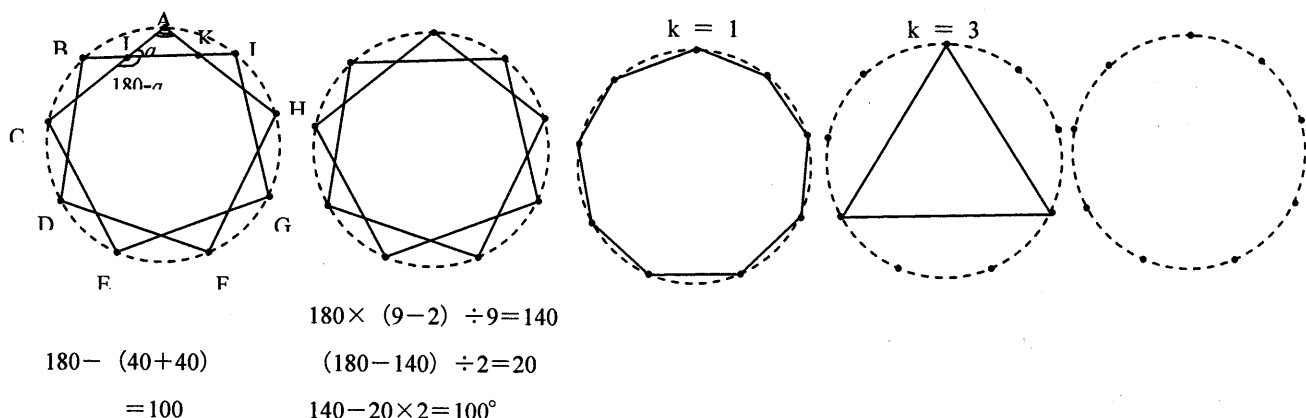
どないな？えーやろ，別に。あの一，間違っている答えは一つもなかったと思うんですけど，ね，みんな 100 度っていうことになりましたね。あの一，解き方はいろいろあるけれども，えー，いろんな考え方を使うと，どれを使っても 100 度，ね，えー，ちゃんとでてきました。これええやろ？納得？納得できん？えー，おかしいなっていう人おるか？いない？いない？…はい，あの一，なかなかね，ちゃんと説明しっかりしてくれて，はい，ありがとう（拍手をする）。さあ，それじゃあ，えーと，これで課題の 1 番はけりがつかしました。えーと，どうやら，2 個隣でやってくと，ですね，えーここの，まあ先端の角は 100 度になる。いうのが分かるな。はい。えーと，それじゃあ，ここの，このな，えーつと， k 個隣のいうたら，課題の 1 番はこれ 2 個隣やから， k が 2 個のとき，えー，2 のときは全体の角の大きさは 100 度やから，2 のときは 100 っていうことですね。100。さあ，ほな問題です。あの一，あと，1，2，3，4 の場合について調べましよういうてんやから，あと，1 と 3 と 4 があるなあ，はい，各自でちゃんと調べて，えー，この表を完成させてみてください。はい，で，完成できたら，えーつと，気づいたこと，な，あの一，いろいろ，見つけてくる。いつもいうとるけどあれやで，あの一，分からんときは，問題解くときは，分からんときは相談ありな。3 人よればも，3 人よれば文殊の知恵なんやけど，相談した方が，分からんことが見えてくる。でも，他人にまかせっきりはアカンで。自分も一緒になって考えてね。

（机間巡視）

はい，4 番，計算せずに，1，2，3 で見当付けてしもうてる人は，ちゃんと 4 番も計算していこう。

（机間巡視）

（3 番目の子ども（S3）の板書を消し，新たな板書をし始める。板書 9 を参照）



$$180 \times (9-2) \div 9 = 140$$

$$180 - (40+40) = 100$$

$$(180-140) \div 2 = 20$$

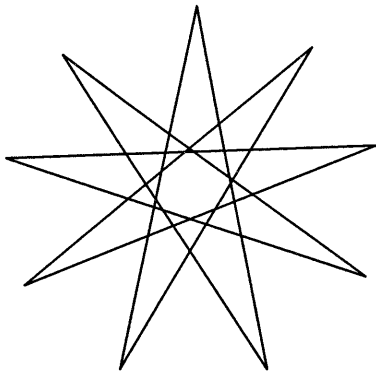
$$140 - 20 \times 2 = 100^\circ$$

板書 9

T: 横と隣結んでいけばいいんやけん要するに、それこそまさに正九角形ちゅうことやな。ていうことやな。はい、3 のときは、3 つ隣、3 つ隣、3 つ隣、やと、これは、もう見たら分かりますね。正三角形ですな。

はい、4 のときはどうなるかな? はい、1, 2, 3, 4, ここ。はい、1, 2, 3, 4, ここにくる。はい、1, 2, 3, 4, ここへくる。1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, ここにくる。1, 2, 3, 4, ここへくる。で、1, 2, 3, 4, ここへくる。1, 2, 3, 4, ここへなる。まだ終わらん。1, 2, 3, 4, ここにくる。んで最後、1, 2, 3, 4, はい。よし、こんな図やな。

さあ、ここでございます (板書 10 参照)。



板書 10

どうやって考えたらいいかなー?

前回の 3 人の人がそれぞれに、ねえ、ユニークなやり方を、ちゃんとやってくれてるんやから。

(机間巡視)

はい、ほないこ。はい、聞いてみるねえ。今日は、(出席簿を見て) はい、S4。はい、ここここは、んー、もう、いわずもがな。いいつすかー、はい、えーと、これは、さっきも言うてくれたけんども、はい、えーと、三角形な、まああの教科書にも何通りかやり方あったけど、まあ 1 つのやり方としては、こういう風に、とにかく全部三角形に割ってやったら、1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ってできるんやな。だから、この、九角形の内角の和っていうのは、 $180^\circ \times 7$ ですね。じゃあ、1 個分はどうなるのって言われたら、1 個分は、当然割る 9 ですから、こっちにある計算とまったく一緒ですね。はい、で、140。S2 さんの計算と一緒ですね。はい、ていうことで 140。はい。k=1 のときは、140 度でございます。はい、k=3 のとき、これもいいよね。k=3 のとき。これ、この長さもこの長さもこの長さもみな一緒やね。一緒でしょ。3 つおきにとったらこれ一緒だね。3 辺の長さが等しい三角形は、そりゃ正三角形。だったら、60 度。こんなもんは当たり前。はい、

これが 60 度はできる。はい。さあ問題です。 $k=4$ のとき。なんて複雑な形でしょ。
さあ、これどうでしょうか。うん。

S4: これ ($k=4$ の時の図形) のまわりに円があるとするじゃないですか。

T: まわりに円があると考える。あー、わしが最初コンパスを使いたくなかったのは
なあ、それが、あ、(こける) コンパスで描くのを見られたとき、一発でこの、解
法でてくるからなあ。描きたくなかったんだけど、気づかれてはしょうがない。

はい。で、円を描く(板書 10 の図形の周りに円を描く)。はい、そうすると?

S4: えー、円の中心から

T: うん。円の中心から? はい。

S4: 1 つの頂点に向かって、線を描く。

T: はいはいはい。まあ例えば、この場合は、こことここを狙うんやろうな。はい、
ほいで?

S4: で、えっと、まあこの中心角は

T: まあこの中心角は? はい。

S4: えっと、360 度割る 9 で 40 度。

T: うんうん、中心角は、360 度割る 9 で 40 度。はい、それで。

S4: (ボソボソ)

T: 円周角は、

S4: (ボソボソ)

T: うん、そやな。中心角は、円周角のちょうど 2 倍になりますから、逆にいやあ、
円周角は中心角の半分ですよっていうことだから、はい。円周角は、40 度割る 2
で 20 度と。はいオッケー、いいですね。S4 正解。

はい、ていうことになります。そうすると、表もう一回ちょっと、埋めてみよう
か。な。そしたら、(S1 の板書を消し、表を板書し始める。板書 11 を参照) はい、
 k の値と、それからまあ、先端の角の大きさな。これが 1, 2, 3, 4 のときは、そ
れぞれ下に行くと、これが 140 度、2 のときが 100 度、3 のときは 60 度、4 のとき
は 20 度。はい、気付いたこと分かったことなんですか? はい、S5。

S5: えっと、40 ずつ。

T: 40 ずつ。

S5: 減っている。

k	1	2	3	4
先端の角 の大きさ	140	100	60	20

正 n 角形
 k 個隣り

k の値が 1 増えるごとに
……減っている

板書 11

T: 減っている。はい。 k の値が1増えるごとに、40度ずつ、減っているんですね。

(板書: k の値が1増えるごとに……減っている, と板書11の表の下に書く) はい。まあ、大なり小なり、あの、これを、これに気がついてくれた人がほとんどだと思うんですが、他にも気づいたことある人。これ言ってくれるとうれしいんだけどな。っていうのが幾つか答えがあるんですが、さあどうだ。

うーん、どうでしょうどうでしょう。じゃあちょっと呼んでみましょう。あ、ゴメンゴメンはい。

S6: えっと、20を基準にして、…60が3倍で、100が5倍で、140が7倍だから…

T: ふんふんふん、はいはいはいはい。ね、140度は、えーと、これは、20度かける7、んで、100は20度かける5だと。こっちは20度かける3だ、これは20度かける1だ。ってね。だから、1, 3, 5, 7っていうときに、あの一、まあ奇数だね、がずーっと続きますよっていうことに気がついたんですね。オッケー。これも1つ立派な性質でございますねえ。他にない?もうない?

はい。じゃえーっと、ちよいと、話を。これ40ずつ減ってるっていうけど、この40度って、なんで40なんやろね?なんで40なの?あるいはこういうようなことが考えられる。40度ずつ減ってる。これ、九角形だけかな?八角形や、例えば十角形や、あるいは六角形、十二角形、もっといや二十四角形もある。そんな中で、調べていったらいったいどうなるんだろうか?考え出せばいくらでもありそうですけども。ちょっと話を…。これ40度。なんで九角形なら40度なんかな?えー、ちょっとちょっと余裕かまして… (一番前の一人の生徒を指しながら)

S: (照れながら嫌がる)

T: 九角形ってどういう意味?何か意味ありそう?なさそう?お、はい。S7。

S7: 中心角?

T: 中心角。中心角が40度だ。お、確かに中心角が40度だな。中心角が40度だったら、それが、ここではどういう形で出てくるんやろうか。確かに中心角が40度。だからまあ、もっと言えば、360を九角形で9で割ってるから40度。なんか関連性がありそうだね。だからこの中心角が、ここの先端の角、どういう形で関わってくるのか。これもまた1つ魅力的なテーマであるな。いろんなことが考えられるんだけど、はいはいはいはい。残念ながらもう時間があとちょろっとしかございませんので、はい、それじゃあ課題の3に行きましょう。はい。いいですかー、はい、行きます。問題。正 n 角形、正 n 角形において、 k 個隣、分かる?正 n 角形で k 個隣、だから、具体的な数字じゃないんだ。(板書: 正 n 角形, k 個隣。板書11を参照) はい、で、結んでできる図形の、先端の角の大きさを、 n と k の式で表しましょう。はい、これが、今日の…になります。もう今まで考えられるだけの素地をみんなに提供してあるはずだから、考えてもらって。

(机間巡視)

(チャイムが鳴る)

はい、何人かの人出来てるな。

はい、それじゃあチャイム鳴っちゃいましたので。

はい、えーっと、時間きてますんで、裏を見てください。おなじみのアンケートコーナーでございます。はい、アンケートコーナーにご記入ください、ね。

はい、じゃあ、アンケート書きながら、ちょっと聞いといてね。もう終わりますから。えーっとですね、これは前にもちょこっと話をしたと思うんですけども、例えば、えーっと、九角形で3つ飛ばし、今3つ隣でやってるのは、これ三角形になるな (板書: $\frac{9}{3}=3$ 。板書9の $k=3$ の図の下に)。これ、1個隣だったら、1

分の9で9ね (板書: $\frac{9}{1}=9$ 。板書9の $k=1$ の図の下に)。だから、九角形、三角形。だったらこれは?のときは3分の9で3やろ。で、 $k=1$ のときは1分の9で9やろ?で $k=4$ のときは?4分の9角形? (板書: $\frac{9}{4}$?板書9の一番右の図の下

に) なんていう話もありますね。なんでこれを4分の九角形と呼ぶか?もし呼んでいいとしたらその根拠は何か?みたいなところまで考えてくれるとうれしいなあ。えー、次の時間ももうちょっとだけこれ考えましょう。それからもう1つ、こっちの方はあの一、レポートにしようと思います。これ4番にいったら20です。次5取ったら、…40 えっとね、マイナス20だもんな。ね、6とったら、マイナス60になりますね。えーこのマイナスの角っていったいどういう風に評価したらいいんだろう?はい、そこ課題でございます。自分はこう考える、だってせっかくさあ、 k が1, 2, 3, 4のときまではうまくやってきたんで。4で打ち切りってのもったいないじゃん。5でも6でも7でもオッケーなようにしたいじゃん。さあ、でも角はマイナスになってしまう。一体どう考えたら、そこんところクリアできるか。はい、クリアできる答えが見つかったらレポートにしておいで。

S8: $k=4$ のとき…

T: じゃけ、 $k=4$ のときまではプラスの値でしょ。5とか6になったら、これ40度ずつ減ってくからマイナスに突っ込むじゃない。これ僕だったら4で打ち止めとか、そんな中途半端なことじゃなくて伸ばしたいじゃない、伸ばしてもオッケーなように。さあ、どういう風に解釈すればいいのかなっていうお話。はい、考えてきたら、あの、レポート……はい、じゃ、えーっと、終わりにします。

中学校数学科学習指導案

指導者 井ノ迫 泰弘

日時	2003年11月14日(金) 第1限(9:30～10:20)	
場所	研修館 第1研修室	
学年・組	中学校3年A組 40名(男子20名, 女子20名)	
題目	関数 $y = ax^2$	
目標	(1) 2乗に比例する関数の意味を理解し, 身近な事象の中から, このような関数の例を見つけ出すことができるようにする。 (2) $y = ax^2$ の形で表される関数のグラフをかくことができるようにし, この関数の考察を通して, 関数の値の変化や対応の特徴について理解する。 (3) 既習の関数と比較しながら, 2乗に比例する関数の値や変化の割合について考察し, 既習の関数や2乗に比例する関数の理解を深める。	
時間配当	1. 2乗に比例する関数 …… 1時間	2. 関数 $y = ax^2$ …… 2時間
	3. 関数 $y = x^2$ のグラフ …… 1時間	4. 関数 $y = ax^2$ のグラフ …… 1時間
	5. 関数 $y = ax^2$ の値の変化 …… 1時間	6. 放物線と直線 …… 1時間
	7. 問題演習 …… 2時間	8. 放物線の性質 …… 1時間 (本時)

指導の経過と今後の計画

中学校における関数の指導については, 第1学年では, 比例, 反比例を題材としてともなっていて変わる2つの数量の変化や対応の仕方について学習し, 第2学年では, 比例から1次関数に発展させるとともに, 2元1次方程式と1次関数を統合的に理解することを学んでいる。これらを受けて第3学年では, 直線的に変化しないものについて考察し, 関数についての理解を深めさせる。

数学の教材は, 身の周りの事象や図形の計量に関連した事柄, 理科でも学習する自然現象の中などから幅広く取り上げ, 関数の理解を助ける具体的なイメージを多く持たせるとともに, 問題解決に利用することができるような能力を伸ばすようにしたい。

本時の授業は, 関数の教材と直接的には結びついていないが, 2乗に比例する関数のグラフがもっている図形的な性質を, 紙を折ることによって発見・理解させ, 関数の学習への興味を深めさせようとするものである。中学校学習指導要領の指導計画の作成と内容の取り扱いにおいて,

「生徒の主体的な学習を促し, 数学的な見方や考え方の育成を図るため……各領域の内容を総合したり日常の事象に関連付けたりした適切な課題を設け, 作業, 観察, 実験, 調査などの活動を重視して行う課題学習を各学年で指導計画に適切に位置づけて実施するものとする」

とあるが, 本時の授業はその展開例の1つである。

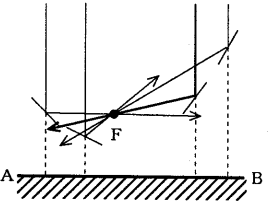
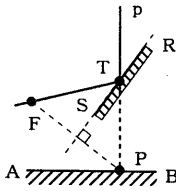
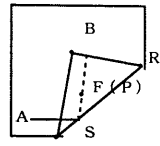
本時の題目 紙を折って浮かび上がってくる曲線

— 関数 $y = ax^2$ のグラフの図形的な性質を見つける —

本時の目標

1. 一定の規則に従って紙を折るとき, 浮かび上がってくる曲線が, 関数 $y = ax^2$ のグラフであることを理解させる。
2. またこのことから関数 $y = ax^2$ のグラフの図形的な性質について考察させ, この関数の有用性を理解させる。

本時の指導過程

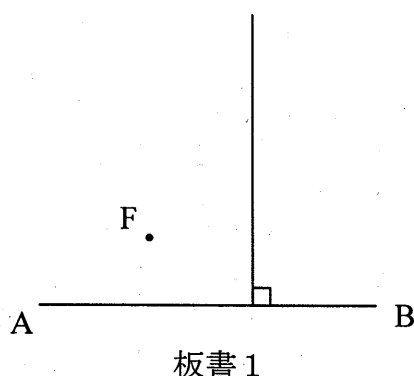
学習内容	指導過程 学習活動	指導上の留意点・評価
<p>(導入)</p> <p>○課題の確認 ・課題の確認</p> <p>(展開)</p> <p>○課題の解決のために ・課題解決の方策の確認 ・紙を折ってみる</p> <p>・シミュレーションで予想の確認</p> <p>・曲線は x の 2 乗に比例する関数のグラフであることを確認</p> <p>(まとめ)</p> <p>○本時の学習内容の確認</p>	<p>○下の本時の課題を提起し, ①, ②を確認させる。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>直線 AB に垂直に入ってくる太陽光線を, 小さな鏡で適当に反射させ, すべて 1 つの点 F に集めるようにしたい。小さな鏡をどのように置いたらよいか。</p> </div> <p>①直線 AB 上のいろいろな点 P に対して, 点 P で直角に入射する光線 p を, 小さな鏡 RS を適当に置き, 定点 F を通るようにすると, 課題を明確に理解する。</p> <p>②①のように説明し, 直線 AB 上の勝手な点 P で垂直に入射してくる光線を, 点 F を通るようにするには, 小鏡 RS を線分 FP の垂直二等分線になるようにおけばよいことを理解する。</p> <p>③最終的には, 紙に線分 AB と点 F を記入し, 線分 AB 上の各点 P に対して, 線分 FP の垂直二等分線を折り, 線分 FP の全体がどのようになるか考えればよいことを理解する。</p> <p>○紙を折って, 折り目からどんな曲線が浮かび上がってくるか考えさせる。</p> <p>① 上記③の場面設定で, 線分 AB 上の各点 P に対して, FP の垂直二等分線を折ってみる。</p> <p>② すると, 折り目が現れる範囲と現れない範囲の境目として, 曲線が浮かび上がってくることを発見・理解する。</p> <p>③ ②のことを, コンピュータでシミュレーションした印刷物によって, 予想を確認し, 理解する。</p> <p>○曲線が 2 乗に比例する関数のグラフであることを確認させる。</p> <p>① 方眼紙を用意して, 折り紙に重ね, 浮かび上がった曲線が, x の 2 乗に比例する関数のグラフではないかと予想する。</p> <p>② この関数の式を考え, その式を求めてみる。</p> <p>○本時の学習内容をまとめ, 確認させる。</p> <p>・ 2 乗に比例する関数のグラフの図形的な性質を利用したものが存在することから, この関数のよさを確認する。</p>	<p>○課題に興味を抱き, 意欲的に取り組んでいるか。</p>  <p>・ 光の反射は理科一分野で既習。</p>  <p>・ 上図で $\triangle TFP$ は $TP = TF$ の二等辺三角形になり, 光線が点 P と点 F に到達する時間は等しい。</p> <p>・ 大きな紙で折り方を演示。</p>  <p>○課題解決の具体方策の案出に取り組み, その方法を理解しているか。</p> <p>・ 折り目は線分 FP の垂直二等分線である。また浮かび上がってくる曲線は折り目を通る範囲と通らない範囲の境目である。</p> <p>・ 点 F は $(0, 1)$, 直線 AB は $y = -1$ として考える。</p> <p>○ 2 乗に比例する関数のグラフの図形的な性質をよさとして理解できたか。</p>
<p>(備考) 印刷物作成で利用したソフト: Geometric Constructor</p>		

中学校第3学年授業「放物線の性質」(井ノ迫泰弘先生)のプロトコル

T: はい, じゃあ始めましょう。号令かけて。

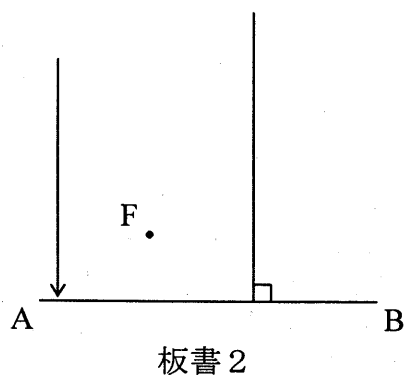
S: 起立。姿勢。礼。

T: はい, おはようございます。えー, 外を見てください。いい天気ですね。太陽がさんさんと降り注いでますね。今日はですね, 遙か遠方からくる太陽の光を一点に集めるということを考えたいと思います。遙か遠方からくる光を一点に集める, ね, クラスマッチも団結すると力を発揮する, 何倍にもなりますね。えー, で, 今ですね, ま, 最終的には空間で考えるんですが, 意外と難しいですから, この(黒板を指す)平面上で考えてですね, この遙か遠方の方に太陽があるとしませうね。えー, ま, 遙か遠方から光がやってくると, いう具合に, 思ってください。で, まあここにですね, (板書1) 遙か遠方からこういう具合に光が入ってくるんですが, まあ, 直角にですね, こうはいつてくる, いう場合を考えます。それではですね, (黒板用の直角二等辺三角形の定規を板書1の水平な直線にあてる) 今こう直線を動かして, 直角に入るように考える。



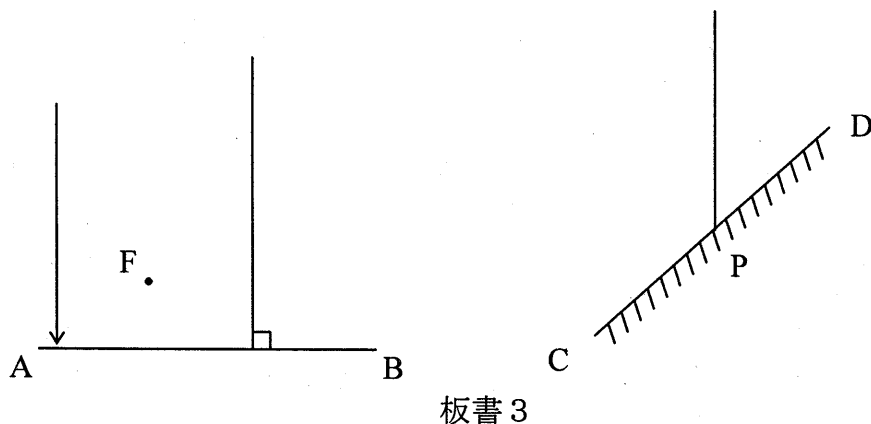
で, えー, どっか一点ですね, で, こう決めて, ここに, こう入ってきてですね, (一人の生徒が遅れて教室に入ってきて着席) はい, もういいですか? 遙か遠方からきた光がですね, ここまで, こう直線に当たるんですね, これがここ(板書1の点を指す)へ集まるようにしたい。で, 鏡を当ててですね, この辺(板書1の垂直な線の下ぐらいで定規を動かす)にこう鏡を当てて, 鏡は光を反射するよね? それは, 一分野でもう習ったと思うんですけども, どういう具合におけば, この光がここへ行くんだらうか? どうですか? で, 一回今ここ AB があったとして(板書1の水平線の両端に A, B と書く), 遠方からきた光がですね, ここは垂直に当たってるんですけども(黒板に三角定規を水平線にそってあてる), それを, ま, 他のところにもこう(板書2), 光がくると思うんですが, これをですね, 鏡を置いて(黒板に三角定規を垂直線に斜めになるようにあてる), 反射させてここに, え, この点, まあちょっと F にしときましょう(板書2の点に F とかく)。ここにですね, いくようにしたい。どういう具合に鏡を置いたらいいでしょう? あの, こちらにきたのも, これぐらいに置いてですね(黒板で2本の垂直な線に三角定規を斜めになるようにあてる), ここ(点 F を指す)を通るようにしたい。ちょっと短いな(板書2の右側の垂直線にマグネット付きの紙テープを重ねる)。こうきたのをですね, えー, どっか鏡をこう置いて, 置いてですね, ここを通るようにしたい(板書2で, 右側の垂直線上から点 F に向かってマグネット付きの紙

テープを貼って、すぐにはがす)。どう置いたらいいでしょう。はい、ま、必要であればノートを開いてですね、考えてみてください。



(生徒たちがノートを開く)

え、どこか適当なところで、鏡を置いて、(一人の生徒が遅れて教室に入ってくる) はい、これで全員そろったね。えー、はい、遅れてきた人、呼吸を整えて、え、もう一回言いますよ。最終的にはね、えー、空間で考えるんですが、この(黒板を指す)平面上で考えます。遠方からきた光が、この(板書2の水平線に腕をあてる)、直線にですね、ま、直角に当たってる。遠方からはたくさんきてます(板書2の右側の垂直線にそって腕を上下させる)。で、それを、ここに当たってる光をですね全部ここへ(点Fをさす)、こう、集めるようにしたい(板書2の左側の垂直線上から点Fに向かって点線を書く)。鏡を置いてですね、鏡を置く。鏡は光がどういう具合に反射するんだった? 鏡は? (板書3) こう光がきたら、で、こう鏡を置くとですね、どういう具合に反射するんだったかね? どうですか、はい? どういう具合に反射する?

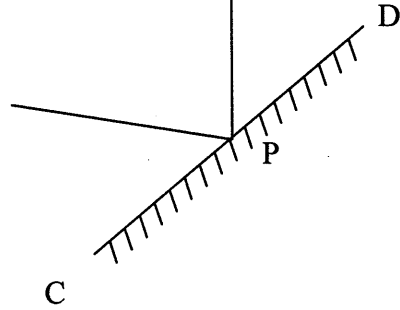
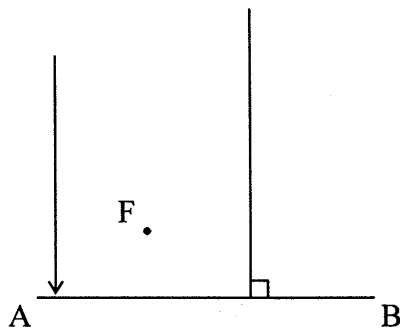


まあここをA, Bにしましょうか? (板書3の斜めの線の両端にA, Bと書く) ABと当たって、まあ、何にしますかね? C, Dにしましょうか(板書3のA, BをC, Dに書き直す)。ここに光が当たったら、こういう具合になっている(CDと光の交点をPと置く)。はい、ま、これ一分野で習ったから、みんな分かると思うんですが、どうですか? はい、遅れてきたS1君どうですか?

S1: Cに(ボソボソと発言する)

T: ちょっと前に出て描いてみてくれる? もう大体のところでいいから。

S: (板書4: 点Pから線を伸ばす)



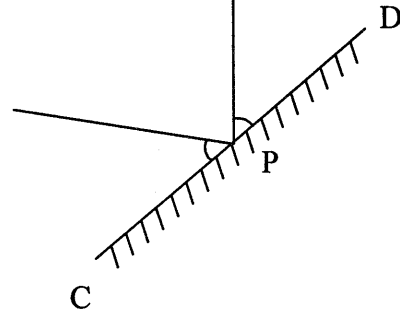
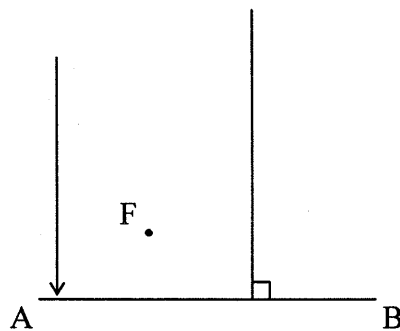
板書4

T: で, その...

S: (笑いが起る)

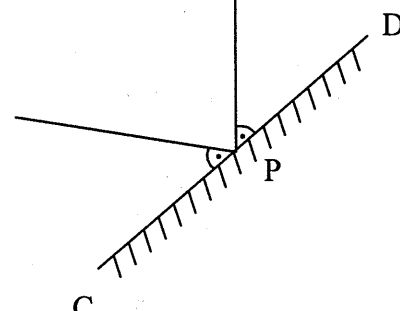
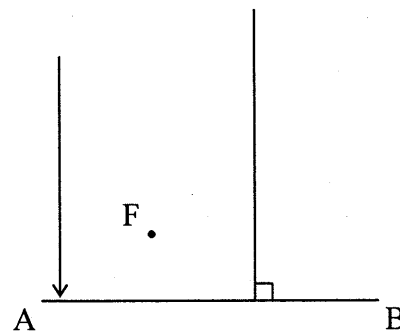
T: どういう具合になった?

S: (板書5)

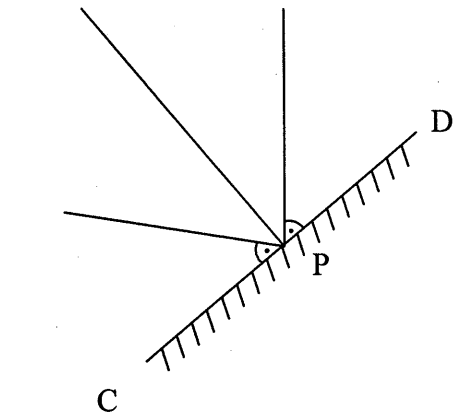
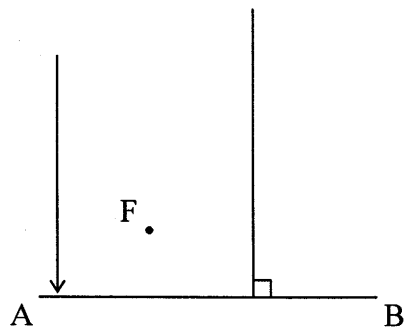


板書5

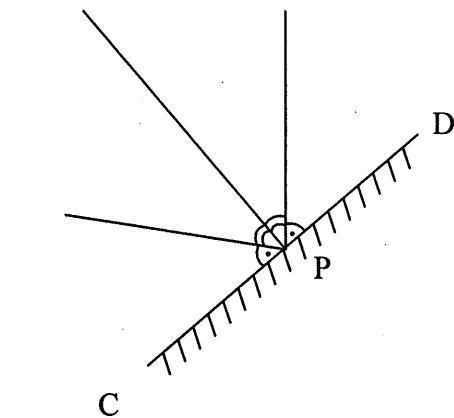
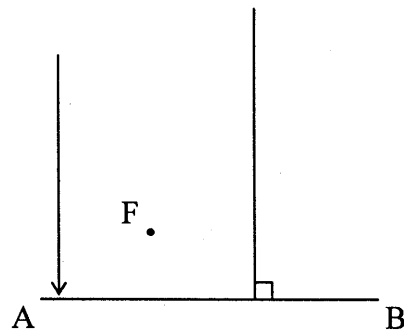
T: はい, いいですね。この角とこの角が (板書6: 板書5の2つの角に点をうつ), まあ等しくなるように, 反射しますね。えー, 教科書では, ここで垂線を立ててですね (板書7), そして, この角とこの角が等しくなるように (板書8), ここは説明をされております。で, この角 (コンパスで入射角を指し) を何といいますか? え, どうですか? S2 どんな?



板書6



板書 7



板書 8

S2: 入射角。

T: ここは? (コンパスで反射角を指し)

S2: 反射角。

T: はい、そうですね。入射角、反射角、したがってまあここここは (板書 6 でうった 2 点を指し), 等しくなるように反射します。ね。どうですか, このまあ, そういう, えー, 光の反射の法則を使うと, ここ (板書 2 の水平線と右側の垂直線の交点を指し) に来ている光がここ (点 F を指し) に集まるようにしようと思うたら, どうしたらいいん? これぐらいかね (コンパスを鏡に見立てて黒板にあてる)? どうですか? えー, こんな感じやね (板書 2 の, 右側の垂直線上から点 F に向かってマグネット付きの紙テープを貼る)。こうなるように, 鏡をどういう具合に持ってくるんですか? ま, ちょっと説明するのに難しいですから (板書 1 の水平線と右側の垂直線の交点を点 P とする), ちょっと点を打ってみましょう。遙か, 遙か遠方は何とするかね? まあ直線, 法線 l にしましょう (板書 2 の右側の垂直線の上に l と書く)。ここ (点 P を指す) に当たる光をここ (点 F を指す) に集めようと思うたら, どういう具合に鏡を置きます?

はい (ボソボソと何か言う)。

じゃあ今日は 14 だから, 14 番の S3 どうだ? どういう具合に, P とか, F とか, あるいは AB とか名前がついてますけども, どういう具合に鏡をおきますか? ここに入った光が。

S3 : 名前が足りないんで説明できません。(笑い)

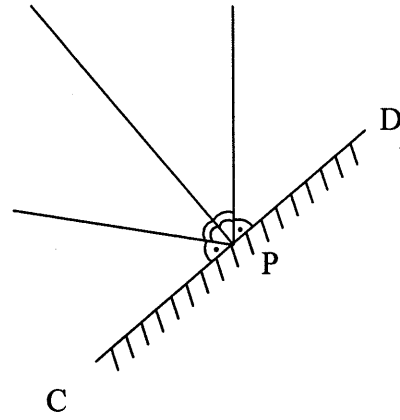
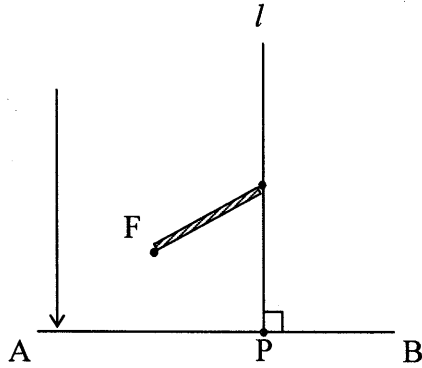
T : 増やしてみて, 自分で。

S3 : じゃあ, C

T : どこ, Cは? Cをどこにするか言って。

S3 : そこ。

T : ここ? (板書 9)



板書 9

S3 : そこ。

T : ここ Cにする?

S3 : (このとき教師は, 板書 9の Cを消す) え, え, そ, そ, そこ, (笑い) そこに鏡を置かんにゃあいけんのじゃないん?

T : そうですね, その鏡の置き方, どこへ鏡を置けばいいのか?

S3 : 先生, そこを Cにしてください。(笑い)

T : (板書 9) はい, それで。

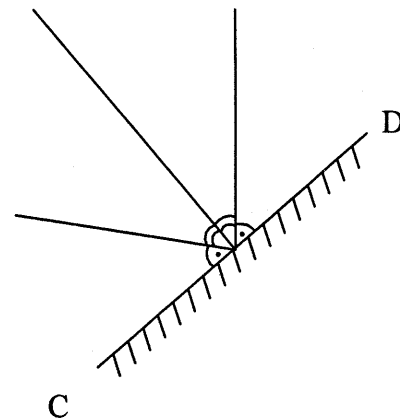
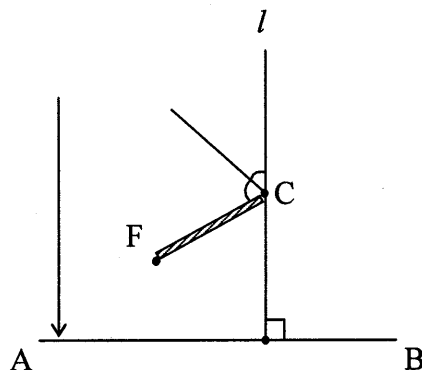
S3 : えっと, $\angle C$ があるじゃないですか。

T : はい。

S3 : それで, l, あ, l

T : 前出て説明して。はい。

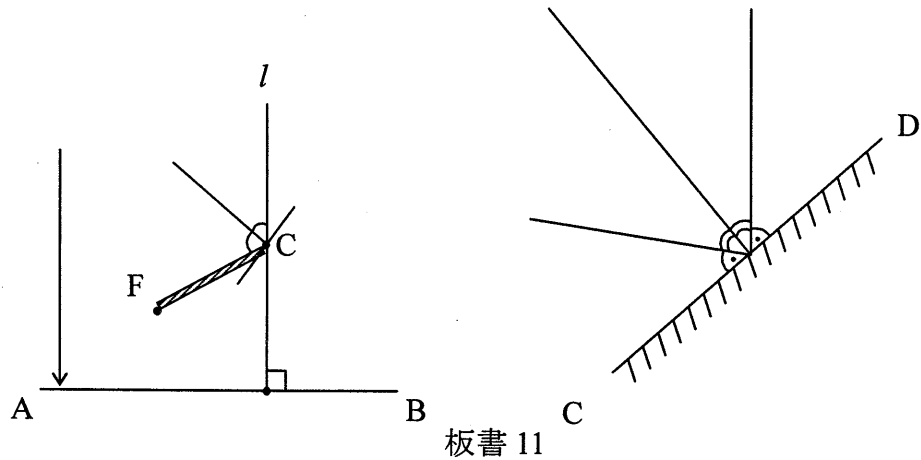
S3 : この角度の, えっと, ($\angle ICF$ を指して) 角の二等分線を引いて (板書 10: $\angle ICF$ の二等分線を引く), この角の二等分線と直角になる線を, 引いたら, そこが鏡の位置。



板書 10

T: この角 ($\angle ICF$ を指して) の二等分線。

S3: そう。で、この引いた角の二等分線と直角に交わるような (板書 11: 点 C を通るそのような線分を書く)、え、ものを置いたら、多分、こう反射するような気がします。



T: はいはい、ちょっと座って。えー、今の意見どうですか?でも、このところどうかね?Cの位置が分からんね。

S3: え!?

T: Cの位置が。

S3: んじゃ、んじゃいいですよ。Cどこでもいいんじゃないんですか?

T: あ、どこでもいい?この辺でも? (点Cの上の方でコンパスを鏡に見立てて黒板にあてる)

S3: 違う。IP上だったら。

T: IP上だったら。うーん。ま、今ここに (点Pを指す) 来ている光をここに (点Fを指す) 集めたい。これを (点Pを指す) ここに (点Fを指す) 集めたい。

S3: それだったら、それは違う。(笑い)

T: じゃあどうなる?この点 (点Pを指す) がここへ (点Fを指す) くるんだから、この鏡は、この置き方は (コンパスを鏡に見立てて黒板にあてる)。ちょっともう一回確認するよ。ねえ、たくさん来ているんですけども、この点Pが、ここに来ている光線を (点Pを指す)、ね、ここに集めるっていうことで (点Fを指す)、この点Pに来ている光線がここに (点Fを指す) くるようにしたいんです。鏡をどう置けばいいんでしょうかっていう、ね。この光がここへ (点Fを指す) くるように、ここへ (点Pを指す) 来ているやつがここへ (点Fを指す) 重なるように、通るように、したい。

S3: じゃあ、CをPまで移動させて。

T: CをPまで移動させて、どういうこと (Pにコンパスを置き鏡のまね)?え、どういう具合にやるん?

S3: 先生の、問題とする、意味が、わからん。(笑い)

T: 問題の意味のどこがわからんの?

S: (ざわざわする)

T: 今ね、たくさん光が来てるんですが、点Pに来てるね、これを、この、光線をここ (点F) を通るようにしたいんです。

S3 : 先生。

T : はい。ん？鏡をこう置いて（三角定規を点 C に置く），まあ鏡をこう置いたら反射するよね。この鏡の置き方をどういう具合に置けばいいんでしょうかというのを求める。

S : (ざわざわする)

T : (机間巡視を始める) 意味がわかりませんか。

(しばらくして) はい，まあ議論して。

(しばらくして) はい，どうですか？

(机間巡視を終えて) はい，今のね。はい，ほんじゃ注目。今の，あの一，今の意見は違っているんですかという意見がありましたけれど，どうですかね。今，これ，この光線だけ考えてるんですね（直線 l を指して），で，ここへ来ているこの光（点 P を指して），ここ（点 P を指す）の点を，この光線（直線 l ）とこの，ここ（点 P を指す）へ到達しているのをここ（点 F を指す）へ通るようにしたいんです。んー。

S3 : ねえ先生。

T : はい。

S3 : その F から C に伸びてるあの線は何なんですか？

T : だから（線分 CF のマグネット付の紙をはがして，コンパスを鏡に見立てて点 C に置く），鏡を上手においたら，反射してこうなる。

S3 : 到達しとる光をってさっき言いませんでしたっけ？（教室がざわざわしている）

S4 : ねえ先生。

T : はい。

S4 : 点 P に行くまでに，鏡をおいて

T : そうです。あー，んじゃもう 1 つ条件入れましょうか，ね。はい。態度を変えます。遙か遠方から光が来てるんですが，みたらまあこれ，同時にこう到達するわけね。この光が同時に到達した，ここ（点 P を指す）にも同時に到達，ここ（点 P の左にある直線同士の交点）にも到達するんですが，それを，ここ（点 F を指す）にですね，集めるようにしたい。同時にきた光の，ここ（点 P を指す）にもきた，ここ（点 P の左にある点を指して）にもきた，あそこ（その間を適当に指して）にもきた，これを同時にここ（点 F）に集めるようにしたい。

S3 : あ，あー。

T : ちょっと態度を変えましたよ。ちょっと説明不足でしょうか。ね。遙か遠方から光がいつぺんにこうきてますね（コンパスで光の真似）。ど，同時に到達するのを，同時にここ（点 F を指して）へ集めるようにする。言ってること分かります？

S3 : 先生。

T : はい。

S3 : 鏡にしないで（ボソボソと発言する）

T : もっと大きい声で言ってみて。

S3 : ここにもきた，ここにもきた，他にもいっぱいある光を，全て F にもっていかないといけないんですか？

T : ん，まあ，とりあえず今，鏡一枚でね。あと，これが成功したら他のもどういう具合におくか，鏡はたくさんあることにして。鏡はたくさんあることにしています。まず，この光は（直線 l を指す），ね，ここ（点 F を指して）へくるように，ね，したいんです。

S5 : 先生, 先生。

T : はい。

S5 : (何かぼそぼそと発言する)

T : はい, じゃあもうちょっと, もう一回よく整理しよ。遙か遠方からくる光が同時にここ (点 P を指す) にきます。ね。同時にくるやつをいっぺんに集めるから, あの, 光が強くなるんですね。そこで, こうきたやつをですね (直線 l を指す), 同時にここ (点 F を指す) へ集めるようにしたいんです。

S : (全体がざわざわして, その中で一人が) 同時ってなにが同時?

T : だから, 同時にきた光が, ここ (コンパスを直線 AB に重ねる) へ同時に到達しますね。

S : (何人かが) だから同時って…

S3 : ね, 先生。

T : はい。

S3 : 先生。じゃ, いま光が, たくさん来てることにしてるんですか?

T : そうです。

S3 : じゃあその矢印の 2 本の光がありますけど, それ以外にもあるんですか?

T : はい, そうそうそうそう。

S : (ざわざわ)

T : はい, えー, ちょっと, なかなかここ難しいんでね。えー, 説明が難しいんですが。よし, ちょっと注目。注目。話し止めて。話し止めて注目。もう一回整理するよ。ね, 遠方から同時にこう光が来てます (コンパスで光の真似)。で, ここ (直線 AB にコンパスを重ねる) 同時に到達します。この光をですね, えー, 同時にここ (直線 AB にコンパスを重ねる) に到達するんですけども, それを鏡をですね, いっぺんにこうたくさん, 何枚も何枚も置いてですね (コンパスを随所で鏡に見立てる), そして, まあ例えば, この一本については, ここ (点 P を指す) へ来ている光をここ (点 F を指す) へ集めるように, したいんです。はい, ね, 同時にこっちから (直線 l の左側の直線指す), こうきてる光も別の鏡でこう置いてですね, ここ (点 F を指す) へ通るようにしたいんです。ね, あの一, ねらいはそういうことです。で, まず一本について考えます。ね。えー, 同時につくんですから, どうなるかね?

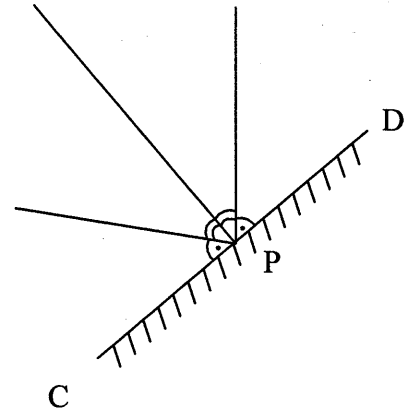
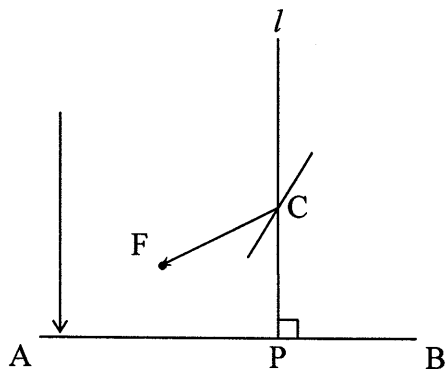
T : ちょっともうこれ取りますね (2 本の紙テープをはがす)。(板書 12 : 点 C 周辺の板書を消し, 鏡を表す直線と CF をかく) 遠方の光について, (図を描き直して) で, どうか適当に見つけてですね, 同時に届かなきゃいけませんので, ここのところとここのところはね (板書 13 : CF と CP に長さが等しい記号を入れる), えー, 等しくなるように, 鏡を, どういう置き方にすればいいですか? どうですか。はい, S6 どういう具合に置く? どういう具合に置く?

S6 : えっと, FP を結んで

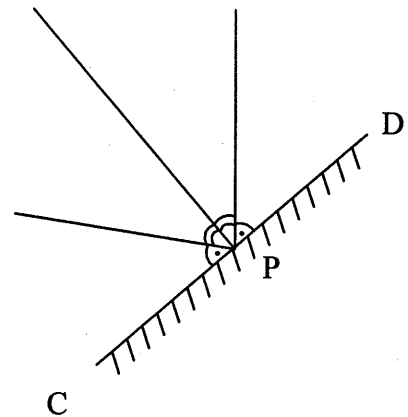
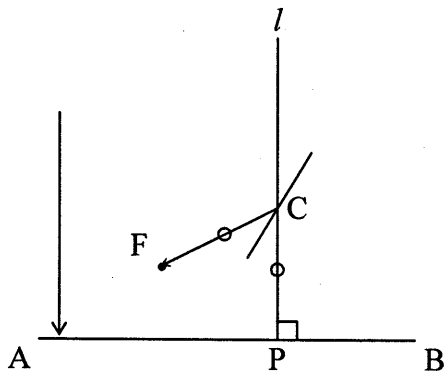
T : FP を結んで, そして (板書 14 : FP を直線で結ぶ)

S6 : (ボソボソと発言する)

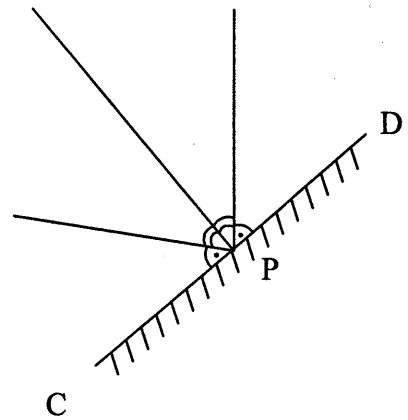
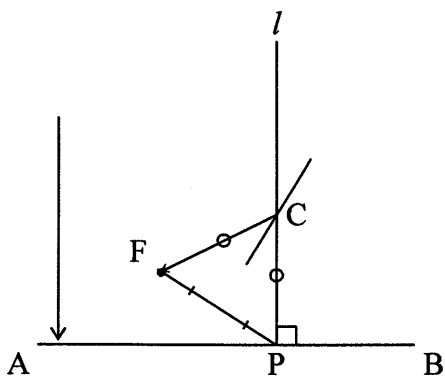
T : はい, FP を結んで, FP の, だからまだ本当はこれは分からないからちょっと消しますね (板書 14 の CF, CP, 鏡の直線を消す)。これも分からないので, ね。FP を結んで, これがまあ垂直二等分線ね, 正確にはちゃんとしなきゃいけません (板書 15 : FP の垂直 2 等分線を引く), こうやって, そしてどうする? こうきたのを,



板書 12



板書 13



板書 14

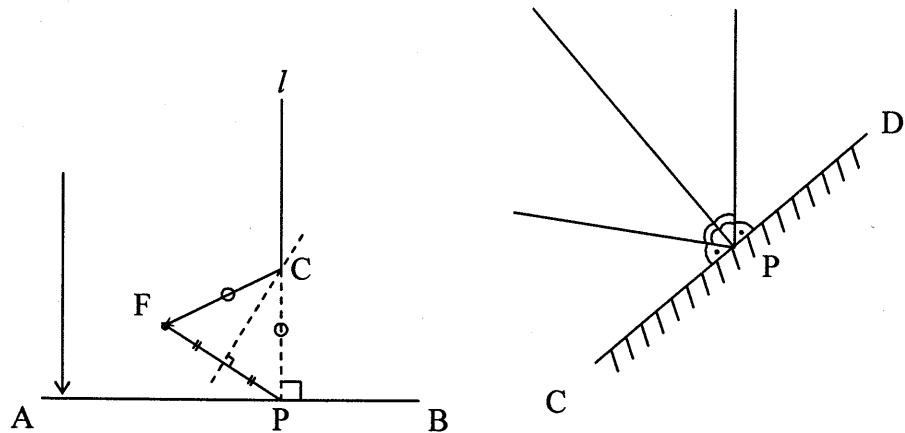
S6 : (ボソボソと発言する)

T : はい, Cにして (板書 15 : 垂直二等分線と直線 l との交点を Cとする)

S6 : で, その垂直二等分線を, (ボソボソと発言する)

T: (CとFを結ぶ) こういう具合にする。

え、鏡はだから、ちょっとこういう具合に置く。で、このところが、(板書 15: FP に2等分の記号を入れる)



板書 15

S7: 先生、光が点 C と F を結んだけん、C の位置を変えることを…

T: どうですか、みんな。はい、なに、S7 なにに言いおるか、ちょっと大きな声で言ってみ。

S7: え、じゃけん、あの、勝手になんか F, C とかおいとったけん、わけ分からんようになった。

T: 勝手になに?

S7: あのー、なんか、FC に紙をおいとったじゃん。

T: はい。

S7: それで、あのー、分かりづらくなった。

T: はあはあはあ。分かりづらくなった。

S7: (ボソボソと発言する)

T: S7 大きい声で言ってみて。

S: え。

T: 大きい声で。

S: はい?

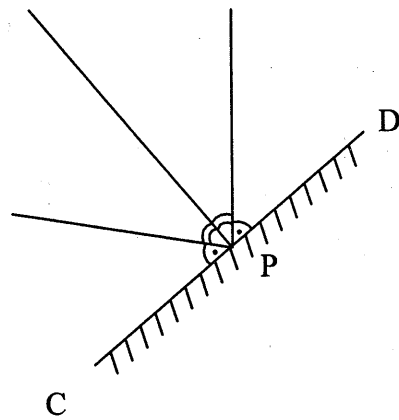
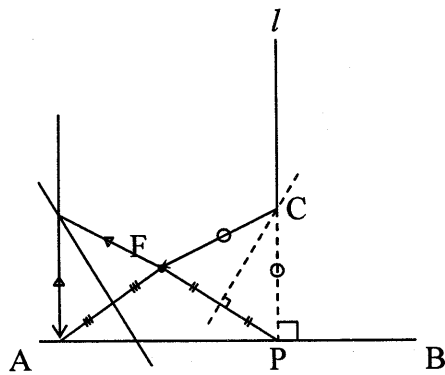
T: もういいんですか? はい、だからね。こういう具合にすると、この長さとの長さが、等しくなるね (板書 15: CF と CP に長さが等しい記号を入れる)。ということで、こうきた光は (直線 l を指す)、同時に、ここ (点 P を指す) へ到達するのと同じ時間でここ (点 F を指す) へ到達するね。

S: (ボソボソと発言する)

T: そうです。それもちょっと付け加えました。それは言わなくてもいいかとおもったんですがね。厳しい意見が出たので、ちょっと態度を変えてですね、付け加えました。

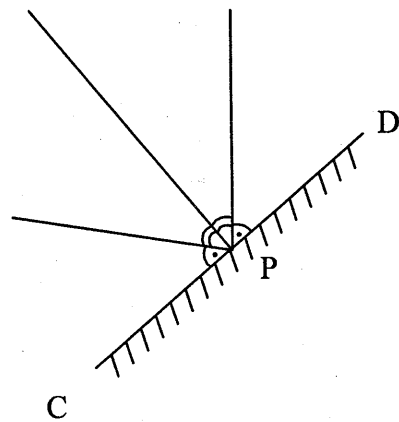
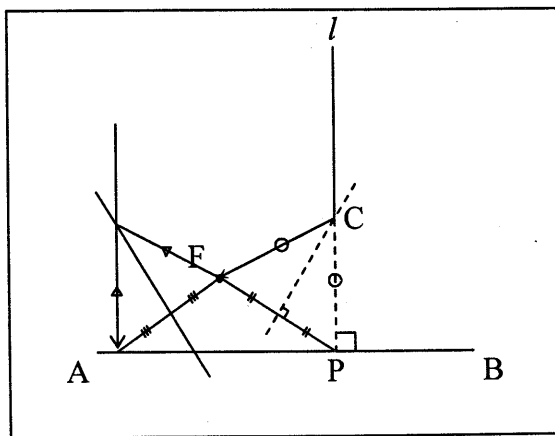
はい、それでですね、いいですか、ここまでちょっと整理しますよ。たくさん光が出てきて、あん、届きますけども、例えばこの中の 1 つがここ (点 P) については、鏡をどういう具合に置くかっていったら、この点 (点 P を指す) が、垂直二等分線ですから、ここへ (点 F を指す) 重なるように鏡を置けばいいんです

ね。垂直二等分線。で、ですね、このことを今からですね、えー、君たちにやっ
てもらおうと思います。ね、えー、こちらにもこう来ている。ね、ここへ到達し
ている、光をですね（板書 16：直線 l の左の線と水平線との交点に黒丸をうつ）、
ここへ（点 F を指す）集めようと思ったら、こちらの方も、垂直二等分線を引いて、
ね、鏡をこのところで（板書 16 の左側の直線と水平線との交点と点 F とを結ん
だ直線の垂直二等分線と左側の直線との交点を指す）、こういう具合に置けばいい
と。（板書 16：左側の直線についても直線 l の三角形と同じように結び、長さが等
しいことの記号を入れる）こうやればこうなりますから、ね、同時に到達するこ
とになる。ね。で、今からですね、えー、このことをシュミレーションしてもう
らんですが、どういう具合にやるかっているとですね、こういう具合にやります。



板書 16

ちょっと注目してください。

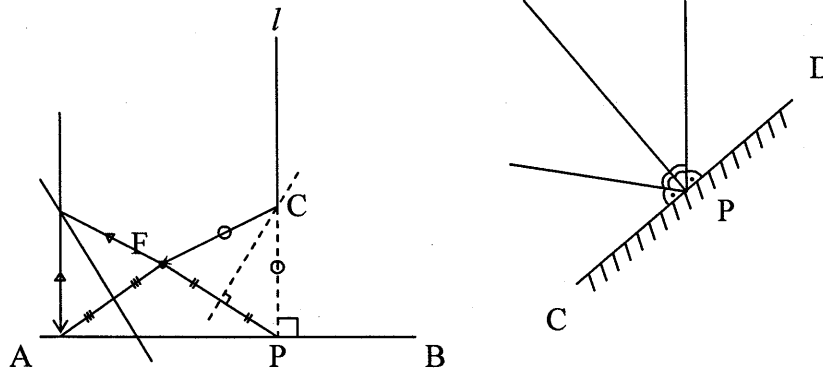


板書 17

ここからこういう紙を渡しますので（板書 17：黒板の板書を四角で囲み、紙に
見立てる）、ね、この紙には直線が描いてあります、ね。で、例えばここ（点 P を
指す）へ来た光がここ（点 F を指す）に重なるように、ここ（点 F を指す）を通
るようにしたいのでその、鏡の置き方は、これ（点 P を指す）がここ（点 F を指
す）へ重なりますから、何かね、この鏡は（直線 l の方の垂直二等分線にコンパス

板の四角の枠を消す)
はい、どんどん折ってください。

紙を折って浮かび上がってくる曲線



板書 18

(机間巡視)

はい、浮かび上がったきたらね、それは、どんな曲線かっていうのを考えてみてください。

(机間巡視)

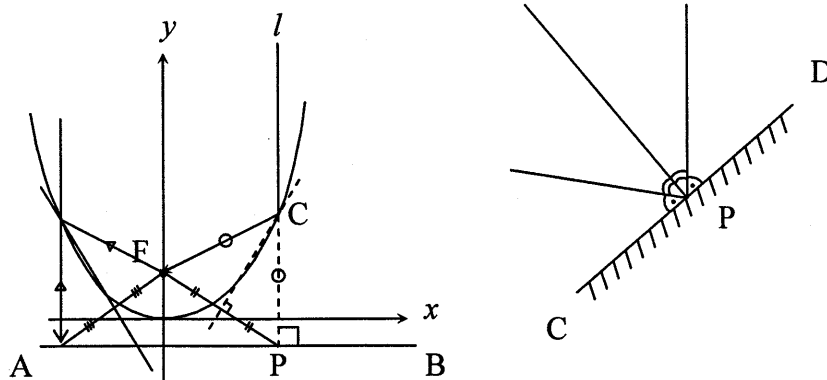
いや、本当はね、0.5の刻みでやらなくてもいいんです。あの一、とにかく細かく、で、細かくやった方が、ね、えー、曲線が、どんな曲線かっていうのが浮かび上がってくるのがよく分かる思うんで。えー、別に等間隔にやらなくてもいいんですが、まあ、たくさん点取った方がいいですね。

はい、え、で、その紙にはね、座標をどうすればいいんだろうか。

(机間巡視)

放物線だという声が出てますけども、そのためには、座標を入れてですね、えー、その放物線の式を立ててみたいと思います。座標をどういう具合にすればいいでしょう？放物線はxの2乗に比例するグラフとして習いましたので、えー、頂点のところがね…

紙を折って浮かび上がってくる曲線



板書 19

頂点のところ、座標を原点にするね。(板書 19: 放物線をかく) はい、えーまー、
 こういう曲線が浮かび上がってきたと思います。ね。はい、そこでね、えー、大
 体ここが、ね (板書 19: 放物線の頂点に印をつける)、点 F から AB に垂線を下ろ
 して (板書 19: 垂線を下ろす)、この点がここへ重なりますから、ちょうどこの中
 点が、ね、こういう曲線上の点になるね。ということで、これを x 軸にしてです
 ね (板書 19: F から下ろした垂線の垂直二等分線をかく)、それから、F から AB
 に下ろした垂線、FH の垂直二等分線を x 軸にして、そして、この垂線を y 軸にし
 て (板書 19: 点 F を通る垂線をかき、y 軸とする)、で、グラフ考えてみてくださ
 い。どういう式になりそう? 大体そこみてもらったら分かると思うんですが。ど
 うですか? はい。

はい、目盛りはね、ちょうど 1cm、を、1 になるようにちょうど、下の線はしてあ
 ります。はい。折った人はここに座標軸を入れてですね、この垂直二等分線を、
 x 軸にして、これを y 軸にして、大体、線を見たら分かるでしょ? どういう式にな
 りそう?

はい、もう折る方はいいです。もう折る方はいいです。座標軸入れて。

S: (ボソボソと質問する)

T: え、それに書き込んで。(机間巡視を始める)

はい、式が分かったっていう人ちょっと手を挙げてみて。式が 1 つ出た人。おら
 ん?

(机間巡視)

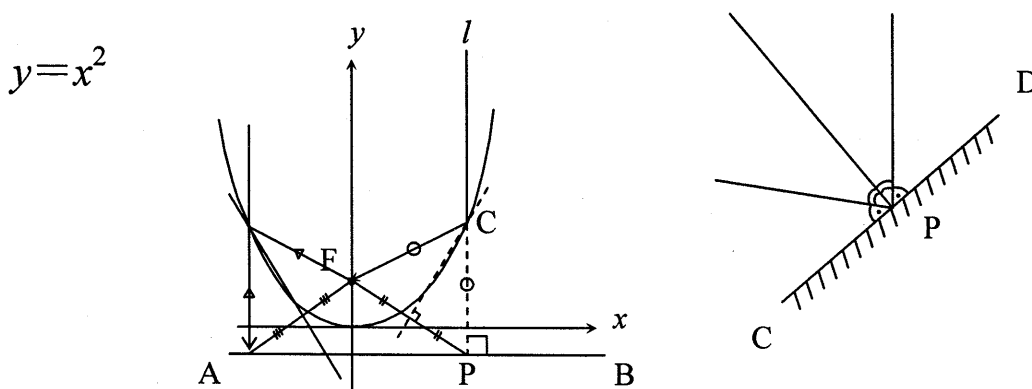
y イコール何になる?

S: $y=x^2$ 。

T: ほんと? $y=x^2$ になるか? (板書 20: $y=x^2$ と書く) こうなる?

はい。見つけた人? S8 どうなった? あれでいいか? $y=x^2$ でいい? 1cm、で、1cm を 1
 にしてください。座標は 1cm を 1 にする。はい、見つけた人、手を挙げてみて。

紙を折って浮かび上がってくる曲線



板書 20

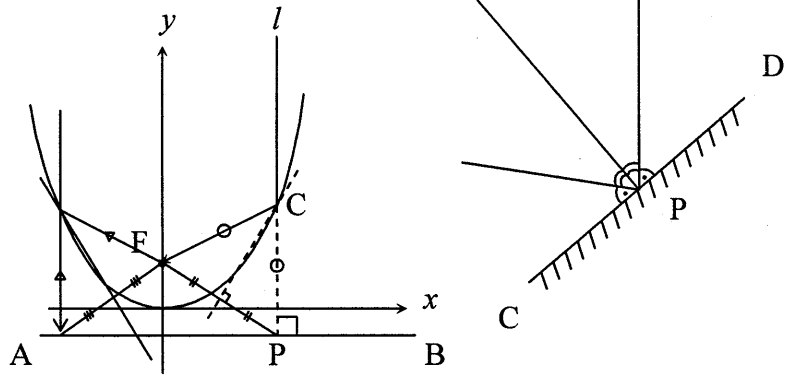
(机間巡視)

どうなる? どうなる?

紙を折って浮かび上がってくる曲線

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

F(0, 1), AB: y = -1
として、折ると、上の
関数のグラフとなる。



板書 22

と、えー、燃え出すんですね。えー、インターネットでですね、そういう状況を
ですね、写真、多分、オリンピックで、オリンピックやる時にですね、採火式、
えー、太陽から火をとると思うんですが、そこのところの写真とってこよう思っ
たんですが、ちょっと間に合いませんでした。ね。えー、でもテレビでそんなの
よく出てるね。見たことあるでしょ？で、今の場合は、これ、光をここへ集める
といいましたけども、えー、電波でもいっしょです。ね。遥か遠方から来た、電
波が全部ここへ集まるので、えー、ここに電波を集める、集まった電波がですね
ー、まあ強くなって、ここで、集めた電波を後で処理すると、ね、えー受信がい
い具合にいくと。ま、そういう、ことですね。で、えー、ちょっとそういう、利
用されているものは、これもちょっとあまり間に合いませんでしたが、こんなの
見たことあるね？ね。えー、何か山口県の方にですね、えー、アンテナがある、
こういう（チャイムが鳴る）放物線を利用したアンテナのことをパラボナアンテ
ナといいますけども、山口県が一番多いんだそうです。その理由はですね、何
かあの上の方にある衛生からですね、この電波をえー、日本全部に送ろうとす
るとですね、あの辺に、集めた電波が一番、日本全部にですね、配りやすいんだそ
うです。はい。どうですかね？理解できましたかね？こういう関数習いましたけ
ども実はね、そういう性質があったんです。はい、それではね。はい、話しやめ
て。今日の授業についてですね、感想を書いて下さい。

S: (何人かが) えー。

T: (プリントを配りながら) あの、一番上には自己評価の欄がありますので。

はい、それではね、次の授業もありますので、今日は

S: 先生、わしらない。

T: 君たちはないが、ここであるので、ここは早く開けなきゃいけませんから…。は
い、5分ぐらいで、大体5分ぐらいで書いて。

高等学校数学科学習指導案

指導者 吉村 直道

日時 2003年11月14日(金) 第2限(10:35～11:25)

場所 数学教室

学年・組 高等学校1年2組 38名(男子20名, 女子18名)

単元 図形と計量

- 目標
1. 鋭角の三角比としての正接・正弦・余弦の意味を理解させる。
 2. 正弦・余弦・正接の間の相互関係として成り立つ公式を理解し、それらが活用できるようにする。
 3. 鋭角で定義した三角比を、角が鈍角あるいは 0° , 90° , 180° の場合まで拡張し、三角比の相互関係を調べる。
 4. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で、三角方程式・不等式を解くことができるようにする。
 5. 一般の三角形において、正弦定理や余弦定理を導き、それを用いて、三角形の辺と角との関係などを調べることができるようにする。
 6. 三角比を利用して、平面図形や空間図形の線分の長さ、角の大きさ、面積、体積などの計量問題を考察する。

時間配当	1. 三角比	5 時間
	2. 三角比の拡張	5 時間
	3. 三角比と図形	12 時間
	4. いろいろな図形の内積・体積	7 時間
	5. 円の内接四角形の面積	1 時間(本時)

指導の経過と今後の計画

三角比は中学3年生で学習した相似からつながるものであり、三角比の導入においては、三角形の相似の考え方を利用して、正接の学習から始めた。そして、三角比の性質を学習した上で、それらを図形の計量に利用することに取り組んだ。また、教育課程が新しくなり、今年度からこの単元の最後で、相似な図形において「面積比は相似比の2乗である」や「体積比は相似比の3乗である」ことも学習し、この性質を用いているいろいろな図形の面積や体積を求める活動に取り組んだ。

この生徒たちには、「数学I」の発展教材の学習(開発)をねらいとし、ヘロンの公式や特別な角(30° , 45° , 60° など)以外の正弦の値などの学習を積極的にさせてきた。本時の授業もその取り組みの一つである。内接四角形の面積の公式は、かなり制限された条件のもと成り立つものであり、公式として暗記して用いるまでの意義は感じ得ない。しかし、対称式であるなどきれいな構造をしており、それだけで魅力のあるものと感じている。さらに、なぜこんなきれいな構造になるのかという疑問から、逆に任意な四角形において面積が定まるにはどういう条件が必要か、これまでの理解を整理、発展させる一つの機会になり得るものではないかと考えている。

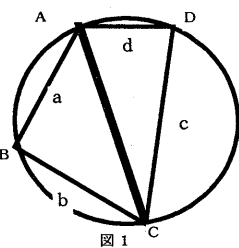
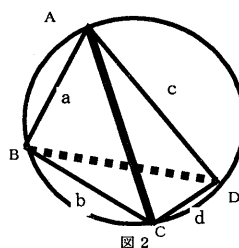
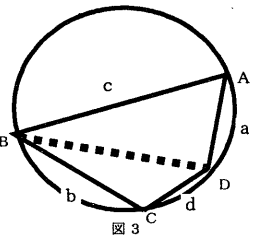
なお、今後の計画としては、図形については「数学A」の平面図形に、三角比については「数学II」の三角関数に発展していくこととなる。

本時の題目 三角比の応用 —— 円に内接する四角形の面積 ——

本時の目標

1. 円に内接し、4辺の長さが与えられた四角形の面積を求めることができるようにする。
2. 内接四角形の面積の公式を理解させ、その有用性を実感させる。

本時の指導過程

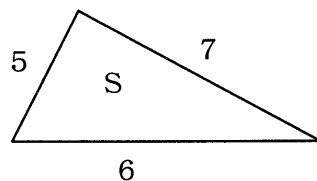
学習内容	指導過程・学習活動	指導上の留意点・評価
<p>(導 入) 3 辺が与えられた三角形の面積</p>	<p>○余弦定理と三角形の面積の公式を確認させる。 課題 1 : 3 辺の長さが 5, 6, 7 である三角形の面積を求める方法を答えよ。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・ヘロンの公式の利用 ・余弦定理から $\sin \theta$ を求め、三角形の面積の公式の利用 	<p>○余弦定理や三角形の面積の公式を理解しているか。</p>
<p>(展 開) 内接四角形の面積</p>	<p>○課題を提示する。 課題 2 : 円に内接し 4 辺の長さが a, b, c, d である四角形の面積 S を求めよ。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・円に内接する四角形の条件を考える。 $\cos D = -\cos B, \sin D = \sin B \dots \textcircled{1}$ ・余弦定理を考える。 $a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos D$ $\therefore 2(ab + cd) \cos B = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \dots \textcircled{2}$ ・三角形の面積の公式を利用する。 $S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin B + \frac{1}{2} cd \cdot \sin D = \frac{1}{2} (ab + cd) \sin B$ $\therefore 4S = 2(ab + cd) \sin B \dots \textcircled{3}$ ・$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ より、内接四角形の面積を求める。 	<ul style="list-style-type: none"> ・ワークシートを配布する。 ○積極的に問題に取り組んでいるか。 ・机間指導をし、適宜、変形の視点を与える。 ・$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ を利用して、変形させる。
<p>公式の検討</p>	<p>$S = \frac{1}{4} \sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$ Brahmagupta (598 - 660, イト)</p> <p>○公式の特徴を考え、そのよさを実感させる。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・4 辺の長さだけで決定されること ・対称式であること <div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div>	<ul style="list-style-type: none"> ・円に内接する場合、4 辺の長さで四角形が決定されることを説明する。 ・図 1, 2, 3 を使って、対称性について説明する。 ○公式が理解できたか。 <div style="text-align: center;">  </div>
<p>練習問題</p>	<p>練習 : 円に内接し、4 辺の長さが 3, 5, 5, 7 である四角形の面積を求めよ。</p>	<p>○公式を使って、手際よく解決できているか。</p>
<p>(ま と め)</p>	<p>○本時のまとめをする。</p> <ul style="list-style-type: none"> ・公式利用の方法ならびに余弦定理から正弦の値を求め面積を考える方法を整理する。 	<ul style="list-style-type: none"> ・授業後、ワークシートに感想を書いて提出するよう指示する。
<p>(備 考)</p>	<p>教科書 : 「高等学校 数学 I」(第一学習社) 準備物 : ワークシート</p>	

高等学校第1学年授業「円の内接四角形の面積」(吉村直道先生)の Protokol

T: まずはウォーミングアップを兼ねて、ちょっと問題に取り組んでもらいたいです。どんな問題かというところをプリント配るんですが・・・

(黒板に問題を提示)

Q: 3辺が5, 6, 7である三角形の面積S?



T: 三角形があるんですけど、ここに3辺の長さが5, 6, 7である三角形の面積Sを求めて欲しい。まず三角比を思い出してもらうためにこの問題から取り組んでみてください。プリント配ります。

(プリント配布)

(生徒の自力解決活動)

T: ええ、まわってみるかぎり速攻でできよる人もおられますし、まだ途中の人もいますね。じゃ、ちょっと途中の人もおるかもしれませんが少し前で黒板に書きながらみんなで解答を作っていくしたいと思います。まず三角形の面積・公式があったと思いますが、例えばこの角度を θ としますと(左下の角)、三角比のところで面積の公式がありましたね。2分の1のうんぬんで・・・S1 どうなりますか? これだと。

$$S1: \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin \theta$$

T: はい、こういうふうになりますね。2分の1, はさむ辺のはさんだ角度の θ , ああごめん \sin いうので面積がでるんだってことを以前やりましたね。ええ、ということはもうここで僕達の問題は $\sin \theta$ さえ分かればいってことになりました。ちょっとずつ問題は変わっていききましたよ。ただし、今手がかりは3辺のデータしかない。3辺のデータから三角比のデータを得るためにはどんなことを考えればいい? S2?

S2: 余弦定理・・・

T: 余弦定理ですねえ、3辺が分かっているところから、角度の情報を出そうと思ったら余弦定理を考えていくっていうのがありましたから余弦定理を考えていきます。ええと、S2, 余弦定理・・・ $\cos \theta = ?$

S2: 「・・・」

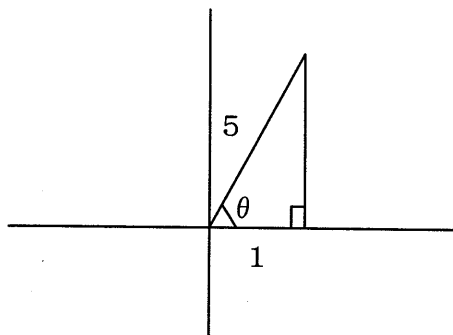
T: $\frac{\quad}{2 \cdot 5 \cdot 6}$ で? じゃ、・・・君?

S3: $\frac{25+36-49}{2 \cdot 5 \cdot 6}$

T: こうなりますね、そうすると、 $\cos \theta$ はなんぼになるん?

S3: $\frac{1}{5}$

T: そうですね、さっここからなんですけど、ちょっとね、だいぶ時間も経ってますんで、あれですけど、なるべく図を使って出しましょうってのをやってみましたね、このクラスではね。

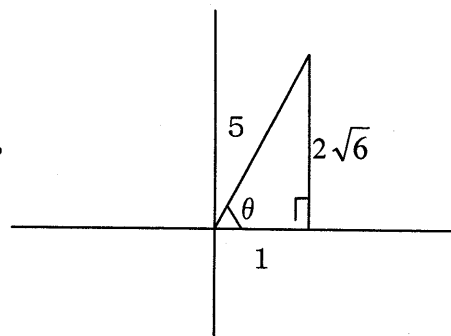


T: ええ、今、 $\cos \theta$ は+ですから、 $\frac{1}{5}$ というとき+になってますから、これ第1象限ですね。で、Cの字ですから、斜め横。5、1と書きますね。三平方の定理つかうとここなんぼかいね? S4

S4: $2\sqrt{6}$

T: はい、 $2\sqrt{6}$ ですね。ということはS4、 $\sin \theta$ なんぼ?

S4: $\frac{2\sqrt{6}}{5}$



T: OK, はい。ということは求めたいやつはこれで分かったよってことになりますね。

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = \underline{6\sqrt{6}}$$

T: これ見てみるとですね、違うやり方の人もおります。ええー、違うやり方・・・誰がそうだったかな・・・Sさん、違うやり方だったっけ? 同じやり方だったっけ。ええと、S5、どういうやり方でやりました? ちょっと紹介してください。

S5: ええっと、 $S = \frac{1}{4} \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4}$

T: はい、これ計算して $6\sqrt{2}$ というふうになりました。これ何人もおりました。これ何の公式を利用したのですか? 名前ついとったよね。

S5 : 「・・・」

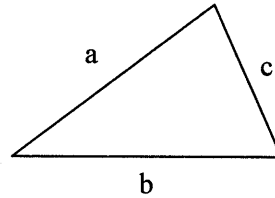
T : 名前までは覚えてないか。覚えてないかな。ええと、S6 もこれだったよね。何の公式だったかな？

S6 : ヘロンの公式

T : ヘロンの公式ですね。これ使っていない人もおられますのでちょっと紹介をしておきます。ヘロンの公式というのはええ、三角形ですね。3辺が a,b,c, こういう風に分かっていたら、ちょっと S5, ($S = \frac{1}{4} \sqrt{\quad}$ ←ここまで教師が板書して) 最初言うて、何がくるかいね？

ヘロンの公式

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{\quad}$$



S5 : a+b+c

T : 次は？

S5 : -a+b+c

T : OK, ほいで、次は？

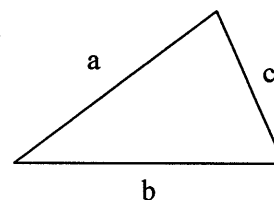
S5 : a-b+c

T : で、最後は？

S5 : a+b-c

ヘロンの公式

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$



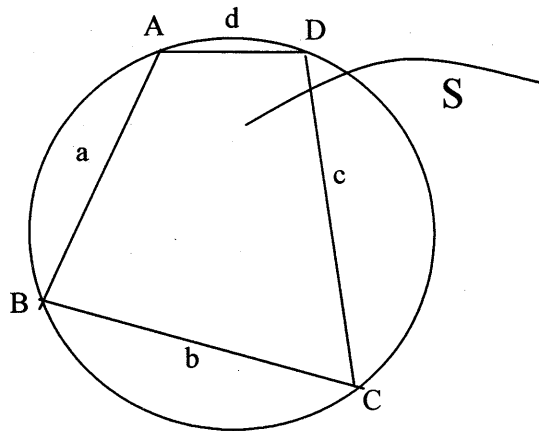
T : OK。まあこれが以前の授業で一度君達にもやっておるものにもなります。ヘロンの公式を使えばですね、まず3つのデータの足し算、で、1個引き算、1個引き算、1個引き算ですね。で、 $\frac{1}{4}$ のルートです。はい、ええと、こういう2つのやり方があります。で、ここでちょっと見て欲しいんですが、面積を求めるためにはええ、 $\frac{1}{2}$ なら3辺のはさんだ角度、ここが分かっていたら面積も求められるんだよってことです。そしたら今度は君達はこれをやってほしい。

(小黑板提示)

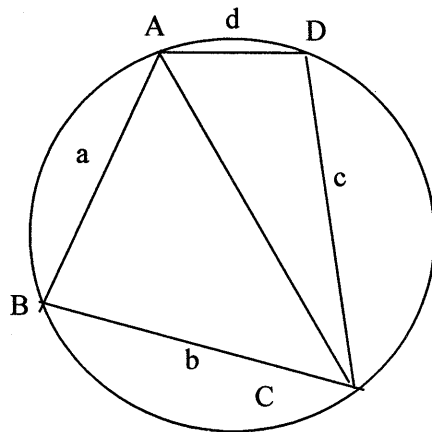
(生徒達には次の課題2がプリントに書いてある)

[課題2]

円に内接し、4辺の長さが a, b, c, d である四角形の面積 S を求めよ。



T: 円に内接し、4 辺の長さが a , b , c , d 。数字にしません、全部文字にします。このときの四角形の面積を求めよってことです。ちょっと考えてみてください。いいですか、今やったのは三角形なら僕達できるってことですからこの四角形、三角形に分割してやればいい。多角形がね、三角形分割できるわけですから三角形の面積さえ手に入れておけばみんなできますよね。ちょっと考えてみてください。



(生徒の自力解決活動)

T: 方針が立たない人は、しっかり対角線引っ張って三角形分割で考えてくださいよ。ほいで全部文字使ってますから、もしかしたら途中の計算式がややこしくなるかもしれない。そのときに、手際よく処理をしていかなくてははいけませんよね。

(生徒は自力解決中)

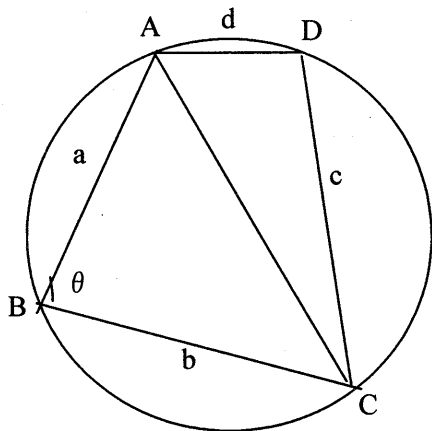
T: 途中ちょっとややこしくなるでしょう。もうねえ、今日はみんなにうまく処理してほしいんです。

T: ええ、最後に到達しそうな人もいれば、ちょおっとまだ、3行くらいまでという

人もいますので、ちょっと方針を与えながらやっていきたいと思います。ええ、途中の人もね、・・・、ちょっと考えながらやってみてください。まず、これ問題読んでみるとですね、『円に内接し』という言葉がありますね、まず、円に内接する条件ということから考えていきます。円に内接するということを考えたらずね、どんな条件が・・・ありますか？または、数学的な性質をあの図から導き出すことができますか？S7？円に内接する時はどういうとき？

S7:「・・・」

T: 漠然とみよったら分かんね。ちょっと1箇所見てみよう。例えばここを θ とすると、なんか分かったことない？



S7: Dが $180 - \theta$

T: そうやね、お互いの対角足したら 180 度になるってのがあったよね。ええ、円に内接することから $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ですね。ということは、いいかな、今僕らはさ、ここに三角形分割あるわけですから、ここで $\sin \theta$ 欲しいわけですね。 $\sin \theta$ を考えるということは、・・・ああ、 θ にした、まあ、いいや、 $\sin B$ でいきましょう。 $\sin B$ が欲しいっていうことと同じですからね。 $\sin B$ について考えます。 $\sin B$ というのはこの式 ($\angle B + \angle D = 180^\circ$) 入れ替えたら、 $\sin(180^\circ - D)$ になってきますから、これ変形することができますよね。S8, $\sin(180^\circ - D)$ って何かいね？

S8: $\sin D$

T: D やね。で、後でちょっと余弦定理もかけていきますから $\cos B$ もちょっとここで書いていきます。 $\cos B = \cos(180^\circ - D) =$ で S9, なんぼになるんかいね？

S9: $-\cos D$

T: はい、こういう風になってきます。円に内接することから三角比の要素を取り出してみるとこういうことができますね。はい、今から面積にもっていきますね。三角形の面積の公式を考えていくと求めたい面積 S というのはどうやって表現できるのかというと、S10, $S = ?$ あの図見ながら。

S10: $\frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin D$

T: はい、ということは、今ここに $\sin D$ でますから、 $\sin D$ は $\sin B$ にここ変わりますね。

$$S = \frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin D = \frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin B$$

T: ということは、もうちょっと整理すると、 $= \frac{1}{2} ()$, ちょっと S10, どうなるかいね、() の中?

S10: $(ab+cd) \sin B$

T: こうなりますね。

$$= \frac{1}{2} (ab+cd) \sin B \quad \dots \dots \dots (\star)$$

T: 先生ちょっと結論知ってますので、後の事も考えて・・・ちよつとここ一行空けていてください。で、ここです、今度僕らの目標こう変わっていきます。a,b,c,d はもう与えられています、これデータですから、数値ですからここは計算できているわけですね。あとは問題は sinB です。さっき問題ありましたね、さっきの問題考えてみれば sinB が欲しい時にはええ、辺の情報からですね、三角比求めたかったら余弦定理でしたよね。ここで余弦定理を考えていきます。ただしね、cosB と cosD, これを両方一片に相手にしたいので AC を中心にみていきたいと思えます。つまり、第1余弦定理ですね、これでいきます。S11, $AC^2 =$ でいうとここ (図) をみながら余弦定理かけるとどうなりますか?

S11: $a^2+b^2-2ab \cos B$

T: そうですね、今度これ裏側同様にやると同じことですから $c^2+d^2-2cd \cos D$ になってきますね。で、cosD は -cosB になりますからここ+になります。

$$AC^2 = a^2+b^2-2ab \cos B = c^2+d^2-2cd \cos D \\ = c^2+d^2+2cd \cos B$$

$$(2ab+2cd) \cos B = a^2+b^2-c^2-d^2$$

T: ほんで、ここでなんです、ここで 2ab, 2cd がきてますので (また, ★の) これが出てますからここんと揃えるためにこっちの式 (★) の両辺を 4倍します。

(★) の下の行に

$$4S = (2ab+2cd) \sin B$$

T: で、ええと、もともとの僕達の要求はですね、ここの sin が欲しいから cos の情報を取りにいったんですが、これ cos をですね、分母とかに持っていったら、かなりちょっと文字のたくさんある分数になってしまいますので、分数の計算で余計ややこしいですからね、それをなくすために、手際よく処理するためにこれとこれを 2乗して足します。そうするとどうなりますか?

$$4S = (2ab+2cd) \sin B \quad \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

$$(2ab+2cd) \cos B = a^2+b^2-c^2-d^2 \quad \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}^2 + \textcircled{2}^2$$

$$(2ab+2cd)^2 \underline{(\sin^2 B + \cos^2 B)} = 16S^2 + (a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$

T: 「ほんなら、このところ（——部）はどうなる？

S12: 1

T: 1ですね、ここつぶれますね。ここで角度の情報がこの時点で消えていく。はい、そうすると、

$$16S^2 = (2ab+2cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2$$

T: ここまでくると2乗-2乗ですから処理しやすいですよ。

$$= (2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)$$

T: そうすると、もう少し変形できますよね、S13、どういう風に変形できる？

S13: $(c+d)^2$

T: そうやね、こっちは？

S13: $(a+b)^2$

T: -やな、 $-2ab$ がきて-がきて $+2ab$ になるからね

$$16S^2 = \{(c+d)^2 - (a-b)^2\} \{ \quad \}$$

T: これの続き、処理してください、2乗-2乗がどんどん出てくるからね。

(生徒の自力解決活動)

T: ちょっともうこの先皆さん行ってますからね、僕の方が追いかけていきますよ、そうすると・・・

$$16S^2 = (c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$$

T: ここまでできますね、ここまで整理することができます。そうすると、S っていうのはどういう風に最後なります？S14？S = ？どうなる？2乗から1乗に解いていくとS = ？どうなりますか？

S14: 「・・・」

T: まだ難しい？もうちょっと説明しましょうか？そうすると、ちょっと場所 (a,b,c,d の順) 入れ替えながらやります。ちょっとリズム感悪いんでね。

$$S^2 = \frac{1}{16} (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$$

T: こうなってきました。ってことは2乗の分がもう分かった訳ですから1乗に解いていくとどうなりますか？S が正であるということに気をつけながらS をとっていくと？どうぞ

$$S14 : \frac{1}{4} (-a+b+c+d) \dots$$

T : () ? $\frac{1}{4}$ の ?

S14 : $\sqrt{\quad}$

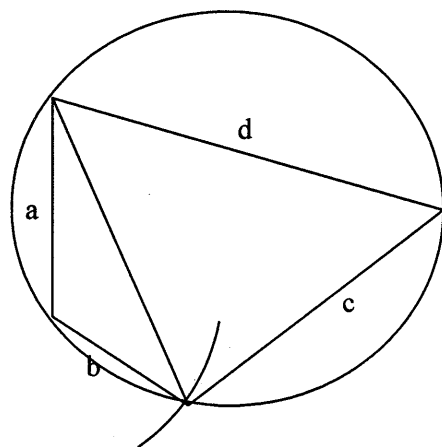
T : $\sqrt{\quad}$ 出すんよね, $\sqrt{\quad}$ のかけていくんやな, ちょっとここもう整理したのがありますから . . .

Brahmagupta の公式

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

T : これはですね, インドの天文学, 数学の人, Brahmagupta っていう人ですね。ええ, インドのですね, 人なんです, ええと, 598年から660年の間にまあ活躍された人ですね, インドの人です。これ, 四角形が円に内接するとか外接するとかそういう風なことを研究した人になります。その人の名前です, Brahmagupta の公式ですね。これ非常に覚え易い。

T : ここで, 見てみると, まず最初は全部足し算でいくんだけどそのうち1個だけまず a がマイナス, b がマイナス, c がマイナス, d がマイナス。これでいきますよということです。で, ここの特徴を考えて下さい。ま, 当然といやあ当然なんです, 4 辺のところから出てるわけですから, 途中で角度の事なども消えているんですけどね, まあもともと 4 辺のところからスタートしたんでそれしかないんですが, どういう特徴があるかという, 内接しておれば, 四角形が円に内接していれば, 面積というのは 4 辺だけの情報で決まるんだということ, それをこの公式は教えてくれていますね。4 辺だけで面積は出てるんです。ということです。また, この公式の特徴的なところ見てみると, 例えば a と b をチェンジさせる, しかし, 式全体は変わりませんね。任意な 2 つの 2 辺を入れ替えてもその結果に変わりはないということになります。これはどういうことか分かりますか? 普通, 四角形っていったら面積は 4 辺だけのところには角度の状況によって面積は大きくなったり小さくなったりします。つまり 4 辺の状況だけでは普通は決まりません。普通は角度がないと面積が決まらない。しかし, 今の場合, 円に内接するということがあればですよー, ある長さ a を与え, そのとき次の辺 b を与える時に,



例えば4辺がちょうど内接する4辺の情報があったとするんよー，円に内接することからここでbは1個に決まってしまう（上図）。そうすると次にcとdもきます。そうすると3辺が全部揃ってきて合同条件で唯一1個の三角形が表します。つまり，円に内接するっていうことと4辺あれば，これ面積決まる，それをこの式は言うてくれてます。

T:それと，今度は2辺を入れ替えても不変とはどういうことかというといいですか，見とってくださいね（図A）。今ここにこういう面積（ $\triangle ACD$ ）があります。この対角線(AC)変わりませんからこれ引っ付きますね（黄色部の $\triangle ACD$ は画用紙で操作可能）。このときcとdは入れ替えてもいいわけですね。入れ替えても面積は変わらない。分かりますか？この黄色の面積，今動いても減ってないですからね，面積変わらない。内接するという4点が与えられればそれさえ分かっていたら，後はそのa, b, c, dの配列は無関係ですね。この(cとdを)入れ替えたものがこれです（図B）。

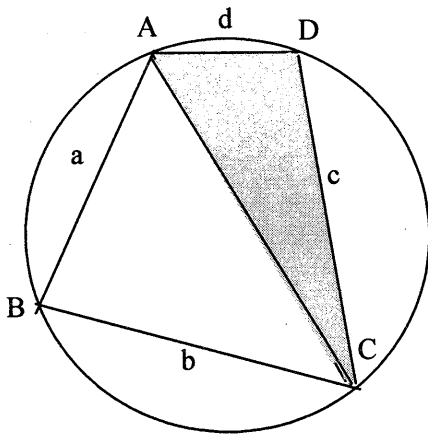


図 A

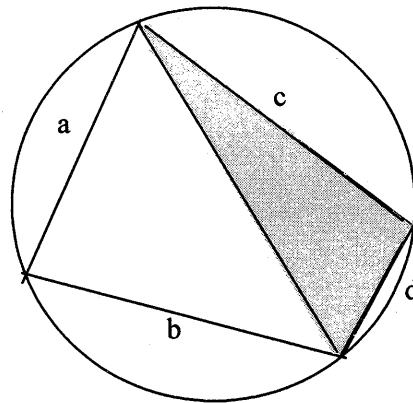


図 B

T:今度次に，違う切り替え方がありますよ，例えばこの面積（ $\triangle ABD$ ），こうありますね（図C）。それをこうやれば，こういうパターンになるよね（図D）。

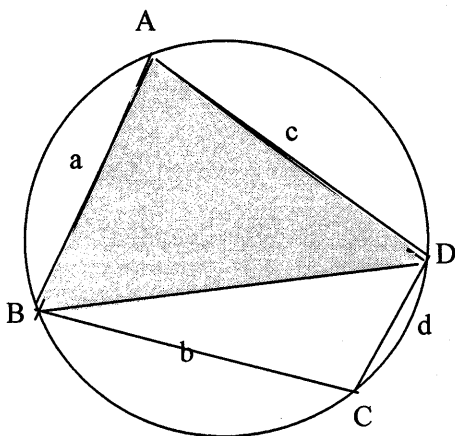


図 C

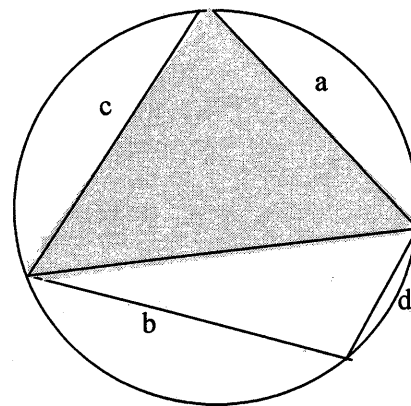


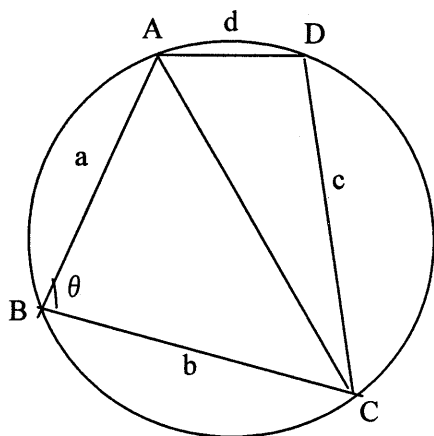
図 D

T: ちょっと見てください。(図 A を指して) a と b, b を中心に考えて, a が隣にあるときは, c と d のチェンジのパターンがありますね。違う図形として, パターンの配列があります。表裏はこれは考えてもしょうがないので。a と b が隣り合わせにある時は d と c のチェンジしかありませんね。それがこれですね (図 B)。今度は a が b と違うところにかいかにやあいけん。そうすると, ここですよ (図 D), a がここに移ってきます。で, c と d がどっちにあったってそれは同じですから。結局 a, b, c, d の辺の組み合わせとしては 3 通りしかない。3 通りしかない。ここに全部でとんですがあ (注)。これにおいても 2 辺の入れ替えをしてもこれは変わらないということがここで分かりますよ。えー, いうふうになります。

(注) 図 B と図 C は同じ四角形である。黄色の画用紙を使って説明しているため, 黒板には図 A, 図 B=図 C, 図 D の三種類の四角形を提示している。

(チャイムが鳴る)

T: えー, ちょっと時間を間違えたんですが, あの一, ここで皆さん考えて下さい。いいかなー。一般の四角形するとき, (つまり) 円の内接を外します。円の内接を外したとき, 普通の四角形で, 例えば 4 辺だけじゃ決まらないのは分かったね。じゃ, あと何の情報があるの? 角 1 個がいる? 2 個がいる? 3 個がいる? 例えば今日の授業だったら最初こう書かれてましたよ (課題 2 を指差して)。で, 今ここに円がないとき, そうすると d の情報ないんだから 4 辺と, 1 個と 1 個 ($\angle B$, $\angle D$ 指差して) いらいますか? 考えて下さい。分かります? 言っとること分かるかな? この円の情報がなくなったときに例えば 4 辺あったら, この θ , 1 個でいいかね? いけんかね? どっかもう 1 個いるかね? じゃ, いるならどこがいるかね? 1 個でいいんかね? そういうことをまた考えてみてください。



T: いいですね。それとね, もう 1 つ興味深いのが, このヘロンの公式とこれ (Brahmagupta の公式), 見て下さいね。これ, すごい似とるでしょ? どっか 0 につぶせばいいね。四角形が三角形になる円じゃから, 例えば d を 0 にしましょう。(図 A を指差して) この d をずううっと近づけて ($D \rightarrow A$) 下さい。D を 0 にしたらどうなりますか? ……。同じやね。ということは, ヘロンの公式がこの公式 (Brahmagupta の公式) の特別なある 1 つの場面を表していますよ, と

いうことになりますね。

ヘロンの公式

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Brahmagupta の公式

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

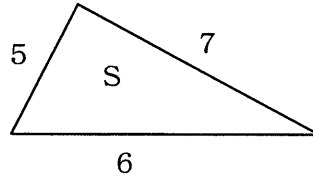
T: ええー、あとね、もう1個これ面白かったのが、今度これ (図 B を指して) にです、ここに円がこう中にきれいに (内接円をかく)……。さっきまでは各頂点に接するという条件でした。今度は点に接するんじゃなくて辺に接するに変えたらどうなるか? 辺に接するようにする。ちょっときれいな円は書けませんが、ここ (a) とここ (b) とここ (c) とここ (d) でもしもきれいに接することができたらこの公式どうなるかやってみてください。かなりきれいになります、もっと美しい公式になります。また自分達で考えてみて下さい。ええー、申し訳ありません、5分延長になりましたが、ちょっと今日はですね、アンケート前にあります。これを書いて月曜日に提出をお願いします。それと、さっき言いましたね。もしも中に辺に今度接する場合はどんな公式になるのか、どんな式がでてくるのか、これやってみようという人は月曜日のレポートにつけたして出してください。ぜひ関心のある人はそれに取り組んでください。はい、ほいじゃ終わります。

(授業終了)

<板書>

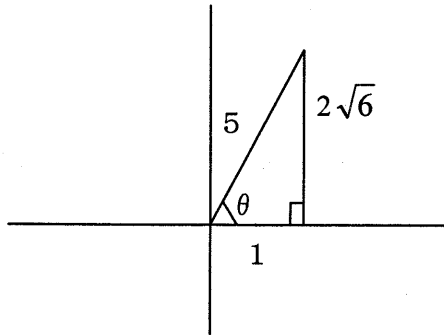
Q : 3辺が5, 6, 7である三角形の面積S?

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin \theta$$



余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{25 + 36 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 6} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$



図より

$$\sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}$$

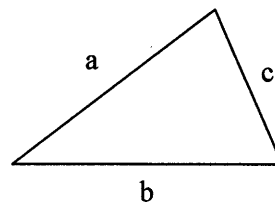
[別]

ヘロンの公式より

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4}$$

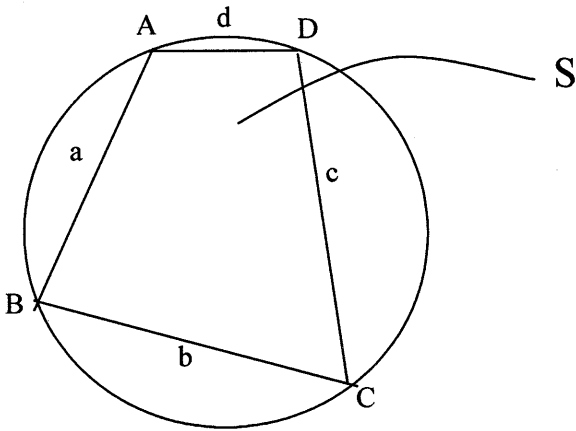
ヘロンの公式

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$



[課題 2]

円に内接し、4辺の長さが a, b, c, d である四角形の面積 S を求めよ。



←小黒板

<内接四角形の面積>

[解]

- 円に内接することより
 $\angle B + \angle D = 180^\circ$
 $\sin B = \sin(180^\circ - D) = \sin D$
 $\cos B = \cos(180^\circ - D) = -\cos D$

- 三角形の面積の公式より

$$S = \frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin D$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin B \\ &= \frac{1}{2} (ab + cd) \sin B \end{aligned}$$

×4

$$4S = (2ab + 2cd) \sin B \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

- 余弦定理を考えると

$$\begin{aligned} AC^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cos D \\ &= c^2 + d^2 + 2cd \cos B \end{aligned}$$

$$(2ab + 2cd) \cos B = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{1}^2 + \textcircled{2}^2 \\ & (2ab+2cd)^2 \overbrace{(\sin^2 B + \cos^2 B)}^1 = 16S^2 + (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 \\ \therefore 16S^2 &= (2ab+2cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 \\ &= (2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2) \end{aligned}$$

$$16S^2 = \{(c+d)^2 - (a-b)^2\} \{(a+b)^2 - (c-d)^2\}$$

$$16S^2 = (c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$$

$$S^2 = \frac{1}{16}(c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$$

$S > 0$

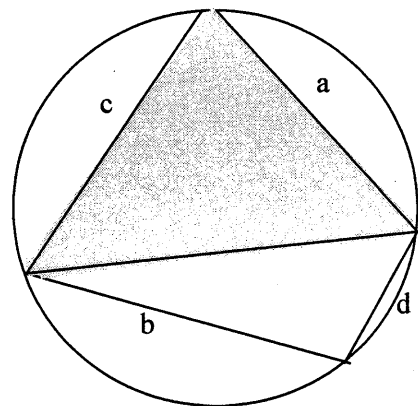
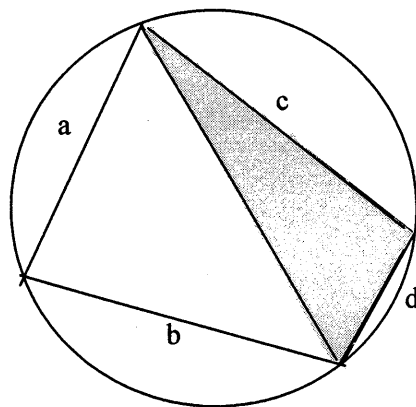
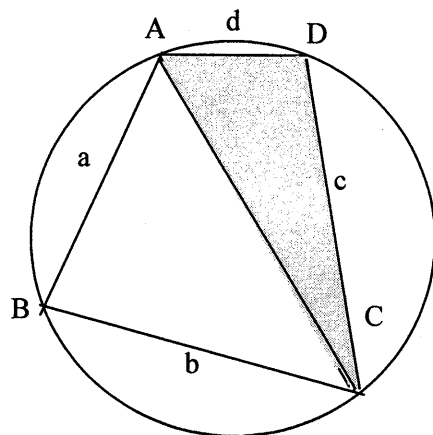
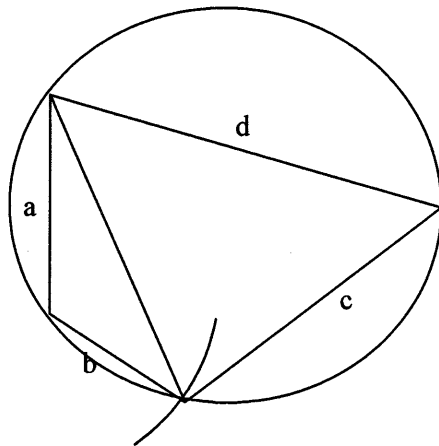
Brahmagupta の公式

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

(特徴)

内接すれば面積は

- ・ 4 辺だけで決まる
- ・ 2 辺を入替えても不変



高等学校数学科学習指導案

指導者 喜田 英昭

日時	2003年11月14日(金) 第1限(9:30~10:20)
場所	数学教室
学年・組	高等学校Ⅱ年5組 41名(男子24名, 女子17名)
題目	空間ベクトルの図形への応用
目標	1. 空間座標の意味や表し方について理解させる。 2. 空間におけるベクトルが、平面上のベクトルと同様に扱えることを理解させる。 3. 空間ベクトルを用いて空間図形を考察する有用性を理解させる。 4. 空間図形を考察するときにベクトルを利用できるようにする。
時間配当	1. 空間の点の座標・・・・・・・・・・1時間 2. 空間のベクトルとその演算・・・・・・・・2時間 3. 空間におけるベクトル方程式・・・・・・・・2時間 4. 空間における直線, 平面・・・・・・・・2時間 5. 空間ベクトルの図形への応用・・・・・・・・4時間(本時はその第3時)

指導の経過と今後の計画

生徒はこれまでに、中学校において空間内の点, 直線, 平面の位置関係, 空間図形の切断, 投影及び展開, 空間図形での三平方の定理, 立体図形の相似といった「空間図形」に関する内容を学習してきている。これを受けて, 高等学校では空間図形の計量, 空間ベクトルに関する内容を学習することになる。しかし, 「空間図形」に関する内容は, 高等学校数学カリキュラムにおいて, 非常に少なく, さらに, 空間における直線, 平面の位置関係や空間図形の性質など, より深まった内容まで扱われていない。これには授業時数の削減や内容の厳選という理由もあるが, 生徒の認識が平面と比較して格段に困難となることも挙げられる。確かに, 空間図形に関する内容に難色を示す生徒は比較的多い。しかし, 平面, 空間を含めた図形に関する学習は, それらの性質を直観的に捉え, 論証などの方法を用いてその図形を認識するという, 図形認識についての数学的思考を高める活動である。この点から, 高等学校段階において, 空間図形に関する内容を取り上げることが重要であると考えられる。

そこで, このベクトルの分野では, 平面, 空間図形に関する性質を代数的に取り扱い, その性質を考察していくことで, 平面, 空間図形の認識を高めていく学習が考えられる。とりわけ空間におけるベクトルに関する内容は, 平面図形と比較して視覚的に認識が困難な図形の性質が, ベクトルを用いて代数的に取り扱うことで, その性質を認識できる教材である。

本時では, 四面体に内接する球の接し方から, 四面体の形状を特定していく問題を取り扱う。この問題は初等幾何的な方法で考察することも可能であるが, 空間ベクトルを用いて考察することにより, 図形の性質を代数的に取り扱うことができる。このようにベクトルを用いることで, 生徒の図形認識も深まり, ベクトルの有用性も認識できると考える。

本時の題目 四面体の内接球からみえてくる性質

本時の目標

四面体に内接する球の性質から, その四面体の形状を考察していくときに, ベクトルが有用であることを理解させる。

本時の指導過程

学習内容	指導過程・学習活動	指導上の留意点・評価
<p>(導 入)</p> <ul style="list-style-type: none"> 四面体の形状の予想 <p>(展 開)</p> <ul style="list-style-type: none"> 四面体の形状の考察 <ul style="list-style-type: none"> 位置ベクトルを用いた課題の解決 <p>(ま と め)</p>	<p>○本時の課題を提示する。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>課題1：与えられた四面体に内接する球が、各面の重心で接するとき、その四面体はどのような四面体になるだろうか。</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> 模型を用いて、与えられた四面体に内接する球が存在することを示す。 この四面体が正四面体になることを予想させる。 <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 5px 0;"> <p>課題2：課題1の四面体が正四面体であることを証明せよ。</p> </div> <p>○予想が正しいことを証明する方法を考えさせる。</p> <ul style="list-style-type: none"> 内接球の中心をOとし、点Oに関する四面体の頂点の位置ベクトル$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$を考え、証明したい事柄を位置ベクトルで表す。 <p>○四面体に内接する球の性質を位置ベクトルで表現し、条件式をまとめさせる。</p> <ol style="list-style-type: none"> 各面の重心の位置ベクトルと各頂点の位置ベクトルの内積が一定である。 各頂点への位置ベクトルの大きさが一定である。 <p>○この四面体が正四面体であることを証明させる。</p> <p>○本時のまとめを行う。</p>	<p>○前時までの学習内容</p> <ul style="list-style-type: none"> 三角形の重心，内心，外心の位置ベクトル 空間における直線，平面の位置関係 <p>○予想を解決する方法を考えたことができたか。</p> <ul style="list-style-type: none"> $\overline{AB} = \vec{b} - \vec{a}$を用いて辺ABの長さが一定値になることを示す。 <p>○各面の重心の位置ベクトルと各頂点の位置ベクトルの内積が一定であること，各頂点への位置ベクトルの大きさが一定であることが理解できたか。</p> <p>○ベクトルを用いる有用性を理解できたか。</p>
<p>備 考</p>	<p>使用教科書：「高等学校 改訂版 数学B」（第一学習社）</p> <p>準備物：ワークシート，四面体，球の模型，</p>	

与えられた四面体 ABCD に内接する球が存在することの証明

空間内において、平行でない2つの平面に対し、それら2つの平面への距離が等しい点の集合は2つの平面となる。

そこで、平面 ABC と平面 ACD から等距離にある平面のうち四面体の内部を通るものを α 、平面 ABC と平面 ADB から等距離にある平面のうち四面体の内部を通るものを β 、

平面 ABC と平面 BCD から等距離にある平面のうち四面体の内部を通るものを γ とする。

平面 α と平面 β の交線と平面 γ が交わる点をIとすると、この点Iは平面 α 、 β 、 γ の交点となり、各平面から等距離にある。よって、この点Iを中心とする内接球が存在する。

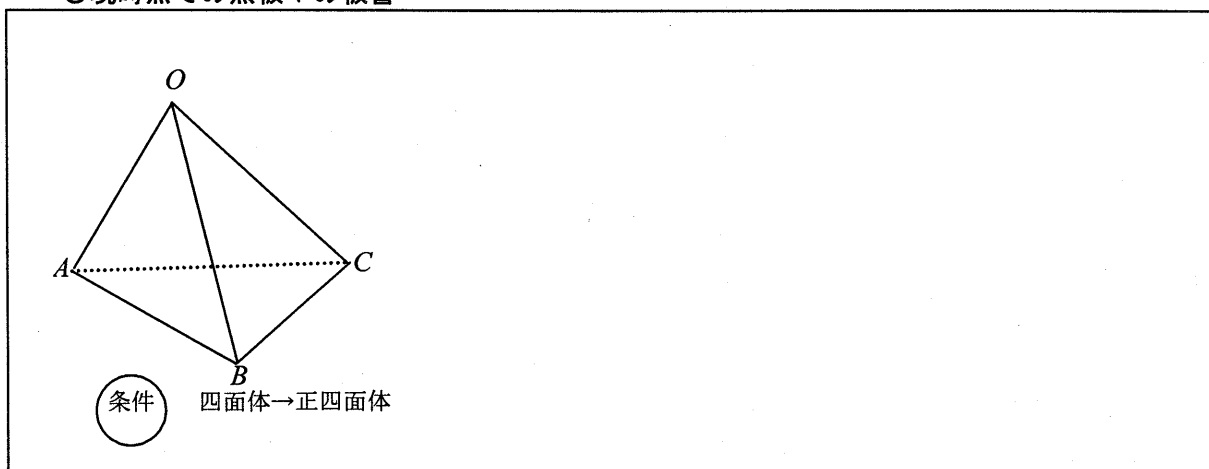
高等学校第2学年授業「空間ベクトルの図形への応用」（喜田英昭先生）のプロトコル

教師： はい。えー，今日は，えー，こういった授業ということになりましたが，あの一，内容としては，えー，前回どういことをやっているかということを確認してから今回の内容に進んでいこうかと思うのですが，昨日，えー，一時間目にやった，えー，ことは…，（黒板1の左側に四面体の図を描く。）

まあこういうふうな，えー，四面体がある。で，その四面体があり，えー，その，まあ，頂点，昨日の場合はこういう風に O, A, B, C と，（先ほど描いた四面体の図の各頂点に「 O, A, B, C 」と書く。），えー，つけていました。そして，ちょっと，もう条件を書かなくて言葉で説明すると，この OA と BC のような（手で示しながら言う），向かい合った辺が垂直でかつ全ての面が等しいときにその四面体が正四面体になる，えー，ということを前回の授業でやったわけです。だから，条件を加えたら条件を加えることにより，えー，四面体が，ま，正四面体，（先ほど描いた四面体の図の下に「条件 四面体→正四面体」と書く。），となりますよ，ということを，えー，ベクトルを使って証明をする，というのを，前回やりました。えー，そこで，えー，今回はそれをちょっと発展した形で少し考えてほしいんですが，えー，ちょっと，頭の中で想像してください。えー，こういうような四面体と，球がある。（立体の四面体と球を取り出して生徒に見せる。）ここからじゃあ図を描かんで頭の中で想像して。

この，四面体のなかに（立体の四面体をかざす。），ぴったりと，球がおさまる（立体の球をかざす。）。つまり，ちょうどこの四面体の中にこの球がぴったり入って接すると（立体の四面体の中に立体の球を入れる仕草をする。）。という状態。起こりえるか，起こりえないか。ちょっと頭の中で想像してくれるかな。この球の半径とか，これ，全然あの，正四面体とか何でもないんよ。（立体の四面体を回しながら言う。）普通の四面体。普通の四面体の中に，ちょうどすっぽり入るような球（立体の四面体の中に立体の球を入れる仕草をする。）があるか，ないか，ちょっと頭の中で想像してみてください。四面体がある（立体の四面体をかざす。）。で，その中にすっぽり入って接するような球（立体の球をかざす。），があるのかないのか。まず頭の中で創造してみてください。

○現時点での黒板1の板書



教師： A君。あると思う？

生徒A： ないと思う
教師： ないと思う。…その隣のB君。
生徒B： ある。
教師： あると思う。…Cさん。
生徒C： ない。
教師： ないと思う。じゃあちょっと、…。あると思う人、ちょっと手をあげてごらん。

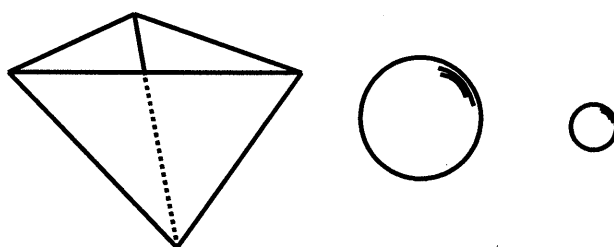
生徒全体： (半数くらいの生徒が手を挙げる。)

教師： 下ろしていいですよ。ないと思う人。

生徒全体： (数人の生徒が手を挙げる。)

教師： 下ろしてください。いろいろ分かれましたね。じゃあまあそれ、ちょっと簡単に、今日はその性質を使っていくので、少し簡単に説明します。実は、そういう風に一般の四面体において(立体の四面体をかざす。), この中にすっぽり、入ってしまう(立体の四面体の中に立体の球を入れる仕草をする。), 接する球は、実は、あります。で、どういう風に、じゃあそれを想像すればいいのか。でも、いろいろな四面体だったら、こういう風に(立体の四面体をかざす。)きれいな形をしてなくて、ちょっとつぶれた形とか、その一、ね、えー、辺の長さが違うものとかいうのがあるかもしれない。で、そこでこれどういう風に考えれば一番頭の中で想像しやすいかという、こういう風にあの、い、いきなり、この、すっぽり(立体の四面体の中に立体の球を入れる仕草をする。)入るものがあるかどうかと考えると結構難しいです。

そこで、どういうものを考えるかという、半径が、ちっさいものを考えます(立体の小球を取り出し、立体の四面体の中に入れる。)。そうすると、この半径がちっさい(立体の四面体の中にある小球を指差しながら言う。)ものは、ちょうどこの球を入れたときに、この三面(立体の四面体の三面を指差しながら言う。)と接しています(立体の四面体と立体の小球が接している部分を指差しながら言う。)。いいでしょうか。状態、見てくださいね。この状態(小球の入った立体の四面体をかざしながら言う。)



立体の四面体と立体の球、小球

教師： で、この状態で、半径を少しずつ小さくしていく(少しずつ小球を大きくしていくジェスチャーをする。)。いいでしょうか。この、三つ(立体の四面体と立体の小球が接している部分を指差しながら言う。), この、さん…三つの面と接している状態で、半径を、少しずつ小さくしていくと(少しずつ小球を大きくしていくジェスチャーをする。), いずれ、上の面と(立体の四面体の上の面を指しながら言う。)接するようになる。でも、この三面と接しているという状態は変わらないから(立体の四面体の三面を指差しな

がら言う。), 少しずつ半径を大きくしていくことで (少しずつ小球を大きくしていくジェスチャーをする), 実は, この, まあ, 実はこれは接するように作ったのですが (立体の四面体の中の小球を球に入れ替えながら言う。), ちょうど, こういう風に, 全部の面, 横の, えー, こういう風にした場合のこの側面と接しながら (立体の四面体と立体の球が接している部分を指しながら言う。), この上の面とも接するように (立体の四面体の上の面を指しながら言う。), 半径を設定することができますよ, と。まあ, その半径が…どうなるか, というのは今日の問題ではないのですが, こういう風に, 正四面体じゃなくても一般の四面体で, こういう風なボールを (立体の四面体の中に入っている球を立体の小球に入れ替えながら言う。) 少しずつ半径を大きくしていけば (少しずつ小球を大きくしていくジェスチャーをする), 必ず, どの四面体にも, こういう風に (立体の四面体の中にある小球を急に入れ替えながら言う。), ゼーんぶの面で接するような (立体の四面体の上の面などを指しながら言う。) 球ができる。いいでしょうか。これは, 別に, 正四面体 (立体の四面体をかざす。) じゃなくてもこういう風に (黒板1に書いた四面体の図を指しながら言う。), 一般の四面体でそれがいえます。いいでしょうか。まず, そういう状態があることを確認して, じゃあ今日やって…ちょっと考えていくのは, じゃあこの球が, こういう風に, 面と, 4つの点で接します (立体の四面体と立体の球が接している点を指しながら言う。)。ちょっと, 接するところに印をつけていきますが, (立体の四面体と立体の球が接している点のうち, 側面の三点にだけ赤いシールによる印をつける。) ま, こういう風に, えー, 接しますね。いいでしょうか (立体の四面体を回転させて, クラス全体がシールによる印を見えるように示す。)。まあ, 上の面と接しますが (立体の四面体の上の面を指しながら言う。), ちょっと上の面, 今, とっているの, あの一, (上の面と球が接している点に赤いシールによる印をつける。),

まあ一応, あの一, こういう形で上の面とも接する点はある (上の面に張ったシールを生徒側に向けながら言う。)。こういう風に, 各面とこういう風に接していきますが (立体の四面体を回して接点に張ったシールを生徒に示しながら言う。), じゃあこの接点, ね, 今日考えて欲しいのは, この接点がどういう風な性質を持ったら, 実は, この四面体が, 制限をされる。今必ずこういう風に, 一点で接するような球ができると (各面の接点を指差しながら言う。), いうことは少し頭の中で想像できたと思いますが, 今度は, この接点 (側面の接点のうち一つの点を指差しながら言う。) が, じゃあこの三角形 (その接点がある面の三角形の辺をなぞりながら言う。), 今, 四面体は三角形からできているので, この三角形の, 三角形にはいろいろなところがある。重心, 内心, 垂心, 外心, ね。いろいろなものがあるんだけど, 今日は, その特別に, ここ, この, 接している点 (接点に「G」と書く。), ちょっと, これは見にくいんですが, 重心。この, 三角形の重心, こちら側も, 重心, 重心, 重心 (それぞれの面にある重心を指差しながら言う。) という風に, 今, ちょっとこっからは少し, この状態を覚えておいて… (立体の四面体と球を教卓の上に置き, 先ほど黒板1の四面体の図の下に書いた, 「条件 四面体→正四面体」と, 四面体の図の各頂点に書いた「A, B, C, D」を消す。) まあ, ちょっと今一般の四面体で考えるね。一般の四面体に内接するような… (先ほど描いた四面体の図の中に, その四面体に内接するような球の図をコンパスを使って描く。) ちょっとこれ, この中にすっぽり入った球を考えてください。

で, えー, 接しているところは, 4つありますが, (各面の三角形の重心に「X」

を描き込む。)この、各面で、重心で接すると、あ、ちょっと、重心で接すると。この面、全て重心ですよと(四面体の図の左側に「重心」と書き込み、各面に描き込んだ「×」と、その「重心」という文字を線でつなぐ。)

各面の重心で、こういう風に、四面体と接する(黒板1に描いた四面体の図を指しながら言う。)。こういう風(黒板1に描いた四面体の図を指しながら言う。))なときに、じゃあ一体この、四面体(黒板1に描いた四面体の図を指しながら言う。))はどういう風に制限が加わるのかと、一般の四面体(黒板1に描いた四面体の図を指しながら言う。))ではなくて、どういう風な四面体になるのかと、というのを少し考えていって欲しいと思います。そこでちょっと今から、えー、プリントを配りますので、えー、そちらをちょっと見てください。(プリントを配布し、その後、黒板1の中央に「<課題>」と書く。)

教師： はい、えー、それでは、えー、ちょっとそこにある課題を、えー、ちょっと書いていきますので、まあみなさん名前を書いて、ちょっと、えー、この、四面体に内接する球という存在、これを少しずつ大きくしていきましたということを書いてますので、ちょっとそちらのほうを読んでいってください。(黒板1の中央に課題の内容、「与えられた四面体に内接する球が各面の重心で接するとき、その四面体はどのような四面体になるだろうか。」を書く。)

はい、さて、ま、もう一度、えー、本日の課題を言います。こういう風に、えー、四面体があると(立体の四面体と球を持ちながら言う。)。そして、その四面体に内接している球が、この球が、各面の重心で接しているとき(各面の重心を指差しながら言う。)、そしたら、この四面体はどういう風な四面体になるか。まず、どういう風な四面体になるのか、ということのを少し考えていこうと思います。ね。そこの課題にも書いてありますが、まずはどういう風な四面体になるのかを予想を立てる。いいでしょうか。皆さん頭の中で想像できてますか。こういう風な状態です(立体の四面体に球を入れた状態でかざす。)。この時に、一体どういう風なまず四面体になるのかを、まず予想する。…D君。予想できました?

生徒D： 正四面体。

教師： になると、そう予想した?

生徒D： はい。

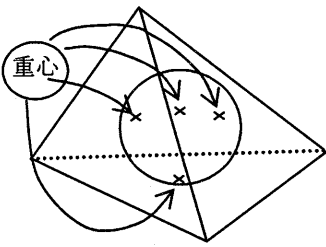
教師： この、どのような四面体になるだろうか。(課題の中にある「どのような四面体になるだろうか。」という部分に黄色のチョークで下線を引き、その下に「↓」を描き、さらにその下に、「◎ 正四面体になりそうだ」と書く。)

まあ、皆さん、あの一、少しちょっと昨日の授業との関わりもありますので、何となく、こういう風に(立体の球を入れた立体の四面体を、回転させながら生徒に示す。)、一般の四面体に必ず、えー、接している球(立体の球を指しながら言う。)は存在するんだけど、こういう風に、重心で接するという条件を加えていったら(立体の四面体の一面の重心を生徒に示しながら言う。)、正四面体になるかもしれない。でもこれは、あくまで“なりそうだ”の段階なんですね、今は。

“なりそうだ”の。だから、この“なりそうだ”，正四面体(立体の四面体を指しながら言う。)になりそうなんだけど、じゃあこの正四面体になることを一体どうやって証明すればいいのか、ということで、今から考えて欲しいのは、この“なりそうだ”というところを(先ほど課題の下に書いた「正四面体になりそうだ」の「なりそうだ」の部分に赤色のチョークで下線を引き、その下に赤色のチョークで「証明」と書く。)、やっぱりしっかりと、証明をしないとけない。さて、

そこで、今から、えー、プリントの右側、右側のほうに、四面体があり、それに、えー、内接しているような球の図を描いています（立体の球の入った立体の四面体をかざしながら言う。）。そこで、自分で、えー、どういう風に、まあ、えー、点を設定し、ベクトルを設定して、まずは、こう四面体になりそうなんだけど（黒板1中央の「なりそうだ」と書いてある部分を指しながら言う。）、まずどういう風に点を設定するか、そして、昨日も言いましたね。何がいえたら最終的に正四面体であることが証明できるのか、これちょっと少し考えて、プリントの右側のほうに（プリントを生徒に示しながら言う。）、えー、何も、図も、何も描いていません。自分で点を設定し、いきなり証明してっていうわけじゃありません。何を証明すれば正四面体であることが証明できるのか、少しちょっと考えてみてください。（時間をとり、その間に立体の四面体を教卓に置き、黒板1の右側にもう一つ、球が内接している四面体の図を描く。）

○現時点での黒板1の板書

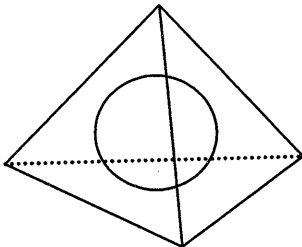


<課題>

与えられた四面体に内接する球が
各面の重心で接するとき、その四面体は
どのような四面体になるだろうか。

↓

◎ 正四面体になりそうだ
証明



教師： いきなり証明へ進まなくても構いません。まずは、何が、証明できれば、正四面体であることを証明できるのか。

もう一回ゆうようだけど、あの一、いきなり証明を進めるんじゃないくて、まずは、何を証明、何が、最終的にいえれば、正四面体であることがいえるか、まずそれを、プリントの右側のところに、自分で点を設定して、何がいえたら、最終的に、その四面体が正四面体であることがいえるか、それを、まず書いてみてください。

はい、ちょっとみなさん、えー、少しちょっと作業をやめて、顔をあげてください。

えー、ある程度は皆さんのを見て回りましたが、えー、どういう風にまず設定をしたのか、この設定、この四面体に球が内接しているときに（黒板1の右側に描いた、球の内接している四面体の図を指しながら言う。）、どういう風に点をおいて、さらに、どういう風にベクトルを設定し、最終的に何がいえれば、正四面体であることが言えるか。少しちょっとこれ、えー、方向性を少し決めておきたいと思います。E君。どういう風に点は決めましたか。

生徒E： はい？

教師： どういう風に、この図形で点とかを決めましたか。

生徒E： 上をOにして、

教師： はい。
 生徒E： 下の三角形の三点を A, B, C とおいて、
 教師： はい。
 生徒E： その位置ベクトルを、 OA を、
 教師： はい。
 生徒E： ベクトル a として、
 教師： はい。
 生徒E： OB をベクトル b として、
 教師： はい。
 生徒E： OC をベクトル c としました。
 教師： はい。こういう風におきました（黒板1の右側に描いた四面体の図の各頂点に「 O, A, B, C 」と書き込み、辺 OA の横に「 \vec{a} 」、辺 OB の横に「 \vec{b} 」、辺 OC の横に「 \vec{c} 」と書き込む。）。で、えー、ま、最終的に何が言えれば正四面体であることがいえるのか、どういう風に考えたか、そこまでは…？
 生徒E： はい。
 教師： えー、ちょっと他の人にも聞いてみようか。F君。君はこういう風に（黒板1の右側の四面体の図を指しながら言う。）設定した？違うように設定した？
 生徒F： 違う。
 教師： 違う方法でやりました？ちょっと描いてみて。（黒板2にもう一つ、球が内接している四面体の図を描く。）はい、どういう風に設定しました？
 生徒F： 球の中心を O として、
 教師： はい。
 生徒F： A, B, C, D （ジェスチャーで位置を示しながら言う。）
 教師： はい。
 生徒F： えーと、 OA を、
 教師： はい。
 生徒F： ベクトル a 、 OB をベクトル b 、 OC をベクトル c 、
 教師： はい。
 生徒F： OD をベクトル d
 教師： （黒板2に描いた四面体の図の各頂点に「 A, B, C, D 」、内接する球の中心に「 O 」と書き込み、 OA の横に「 \vec{a} 」、 OB の横に「 \vec{b} 」、 OC の横に「 \vec{c} 」、 OD の横に「 \vec{d} 」と書き込む。）はい。これで最終的に何がいえればいいっていうのは、考えた？
 生徒F： AB と BC と CD と…6つの辺が全て等しい。
 教師： AB と？
 生徒F： AC
 教師： えっ？ AB と？
 生徒F： えっと、 AB と、
 教師： AB と？
 生徒F： BC 。
 教師： BC 。
 生徒F： 6つの辺が全て等しい。
 教師： （黒板2の四面体の図の右上に、「○ 6つの辺が全て等しい」と板書。）は

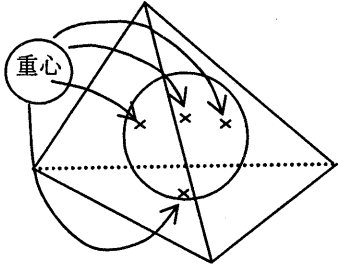
い、えー、はい、えー、ほかにちょっと聞いてみたいんですが、まあ、見ていった限り、このような二つの方法が考えられると思います。

あの、こういう風に(黒板1の右側に描いてある四面体の図を指しながら言う。), えー, 前回からやっているような一つの点を O , そして底面の三角形を ABC とし, その一つの頂点から, えー, を始点とする3点の位置ベクトルを定め, ベクトル a , ベクトル b , ベクトル c とおく方法(それぞれのベクトルを指しながら言う。), それと, こういう風に(黒板2に描いてある四面体の図を指しながら言う。), あの, 内接している球が, この内接している球の中心を O とし, 3つ…えー, 4つの点, を A, B, C, D とし(それぞれの点を指差しながら言う。), その点への, えー, ベクトル, これをベクトル a , ベクトル b , ベクトル c , ベクトル d と考える(それぞれのベクトルを指しながら言う。), という二つの, えー, 方法があると思います。で, それぞれについて, 少し, 後は考えていこうと思うのですが, まずは, えー, 最終的に一体何が言えれば, 例えば, こちらの左側の状態(黒板1の右側にある四面体の図を指しながら言う。), こちらの状態において最終的にどういう状態, どういうことがいえたら正四面体であることがいえる, つまり, この四面体 $AB\cdots$, えー…(黒板1の右側にある四面体の図の右上に, 「正四面体である」と書き, その下に「↑」を描く。) えー, この正四面体であるということを言うために, 最終的に何が言えればいいのか, これは, えー, 少しちょっと前回の授業と関わってきます。前回の授業, 最初に言いました前回の授業では, 向かい合った辺が垂直, かつ, この(黒板1の左側にある四面体の図の面を指しながら言う。), 全ての面の面積が等しいときに, この(黒板1の左側にある四面体の図を指しながら言う。), 四面体は正四面体であることが分かった。で, 最終的にそれが, 正四面体であるということを示したいときに, 何を示せばよかったかという, この(黒板1の左側にある四面体の図の頂点を指しながら言う。), 一つの頂点から平面の, えー, 底面へ, えー, 考えた位置ベクトル, その大きさが全て等しければ, あとは, その始点の取り方, これはすべて対称であるという, あー, 対称性から, 始点はどういう風にとってもよい(黒板1の左側にある四面体の図の各頂点を指しながら言う。), そこで, 最終的に一体何を示せばよかったかという, こちらの, (黒板1の右上にある, 「正四面体である」と「↑」の下に, 「 $|a|=|b|=|c|$ 」と書く。) 状態では, 最終的にこの三つのベクトルが等しければ, この O をここにとってやる(黒板1の右側にある四面体の図の点 A を指しながら), O をここにとってやる(黒板1の右側にある四面体の図の点 B を指しながら), もしくはこの, ベク…, えー, 点 A を始点として, O, B, C へ(各点を指しながら言う。), ベクトル a , ベクトル b , ベクトル c と考えて, 同じように, ベクトル a とベクトル b , ベクトル c の大きさが等しければ, それは正四面体であることがいえるだろう, ということで, この(黒板1の右側の四面体の図を指しながら言う。), 重心で接しているという状態, その条件をいろいろ考えていき, 最終的に, ここの(黒板1の右上にある「 $|a|=|b|=|c|$ 」に, 黄色のチョークで二重下線を引く。), 三つのベクトルの大きさが等しい, ということがいえれば, この四面体が, 正四面体であることがいえる, これは前回の授業からいうことができます。さて, ここからが, えー, その, 証明に入ります。

この, ベクトル a , ベクトル b , ベクトル c の大きさが等しいということを示す

ために（黒板1の右上にある「 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ 」を指しながら言う。）、使っていい条件は、先ほども言いましたが、この四面体に（立体の球を入れた立体の四面体を持ちながら言う。）球が重心で接している（立体の四面体を回転させ、重心を生徒に示しながら言う。）、重心で接している、それは使っていい。接しているという状態はどういうことか、まあちょっと、描いてみますが、あの一、重心を少しちょっとこの図に、皆さんも描き込んでいましたが、（黒板1の右側の四面体の図に重心を「×」で書き込む。）、重心で、接しています。あの一、重心が、この、4つの（立体の四面体をかざしながら言う。）、え一、ちょっとまって、（球に張った印を上に向ける。）4つの面と接して、え一、重心4つあるので、それぞれにちょっと、あの一、番号をつけていきます（黒板1の右側の四面体の図の重心に、それぞれ「 G_1, G_2, G_3, G_4 」と書き込む）。

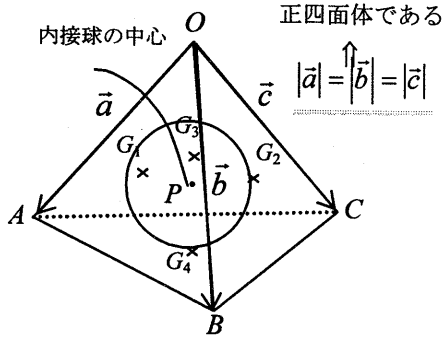
○現時点での黒板1の板書



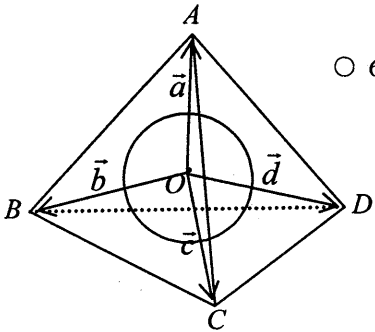
<課題>
与えられた四面体に内接する球が各面の重心で接するとき、その四面体はどのような四面体になるだろうか。

⇓

◎ 正四面体になりそうだ
証明



○現時点での黒板2の板書



○ 6つの辺が全て等しい

OAB , 三角形 OAB の重心を G_1 , OBC の重心を G_2 , そして, OCA の重心を G_3 , 底面の ABC の重心を G_4 とし, で, 右の, あの一, F君が言ってくれた図（黒板2の四面体の図を指しながら言う。）、それと, あの一, こちらE君が言ってくれた

図（黒板1の右側の四面体の図を指しながら言う。）、こちらどっちの方法を使ってもいいんですが、F君が言ってくれた図、それとE君が言ってくれた図、ちょっと、一つだけ左側の方で（黒板1の右側の四面体の図を指しながら言う。）、足りないものがある。それは何かというと、F君は、こういう風に（黒板2の四面体の図を指しながら言う。）、四面体の中心を取って、それから四面体の頂点への位置ベクトルを考えてくれました（立体の球の中心と立体の各頂点を指差しながら言う。）。この場合、こちらの場合も（黒板2の四面体の図を指しながら言う。）、あの一、ベクトルを使って、えー、この6つの辺 AB, BC, CD, DB 、えー、 AD 、（ AC を忘れてる）という、えー、6つの辺、全て、えー、等しいということ、い…、ベクトルを使っても証明すればいい、ということになります。こちらの場合（黒板1の左側の四面体の図を指しながら言う。）で足りないのは、この中心（黒板1の右側の、四面体の図に内接している球の図の中心を描き込む。）、この球の中心が足りない。で、もう球の中心、実はもう O という記号を使っているの、 O を使えない。そこで、ちょっと、えー、特別に、この点に P という風な（黒板1の右側の球の図の中心の横に「 P 」と書き込む。）、この、内接している内接球の中心、 P とします（黒板1の右側の四面体の図の内接球の中心から線を引き、その先に「内接球の中心」と書き込む。）。

さて、そしてですね、こういう風に（立体の球の入った立体の四面体を持ちながら言う。）、4つの重心に、それぞれ記号、えー、その点の、えー、その点に記号をつけていきました。そして、球の中心を P としました。

教師： さて、後は、ちょっと今日、えー、少し、時間があつたら、こちらのほうの（黒板2の四面体の図を指しながら言う。）F君が言ってくれたほうのも少し考えていこうと思うのですが、ちょっと、前回の授業とのつながりも、ちょっと考えて、あの一、ちょっとこちらの方で（黒板2の右側にある四面体の図を指しながら言う。）少し考えていってほしいと思います。F君ごめんなさい。あの一、こちらの方は（黒板2の四面体の図を指しながら言う。）、また、次の機会に少し考えていきたいと思います。

そこで、接しているということ（黒板1の右側にある四面体の図を指しながら言う。）、球、球が、この、えー、正四面…、えー、失礼、四面体と接している（立体の四面体と立体の球が接している点を指差しながら言う。）、ということから、条件を見つけなければいけない。その条件を、後はベクトルで表していき、そして、最終的に、この結論として（黒板1の右上にある「 $|a|=|b|=|c|$ 」を指しながら言う。）、この3つのベクトルの大きさが等しいということがいえたら、これが正四面体であることが言える。

そこで考えてほしいのは、じゃあこういう風に（立体の球の入った立体の四面体を指しながら言う。）、四面体に球が接しているというときの、条件は一体何かと。どういう風なことがいえるのか。ちょっと考えてみてください。こういう風にしたら分かりやすいかな？（頂点を下にして立体の球の入った立体の四面体を持つ。）こういう風に接している。このときに、一体どういうことがいえるのか。接しているということは、どういうことか。

えー、自分の、その、図に書いているものがちょっと平面的なのでよく分からないという人は、前のこの、えー、立体を見てください。接しているということ

はどういうことが言えてるのか。ちょっと（黒板2に描いてある四面体の図を消す。）、少し考えることができますか。ちょっと聞いてみたいと思います。Gさん。接しているということから、どういう条件が発生してくると思う？

生徒G： 重心から、Pまでの…と、Oから重心までが直角。

教師： えーと、ちょっと記号を使っていってくれたら、わかりやすいんだけど。

生徒G： G_1P と OG_1 が直角。

教師： （黒板2に「 $OG_1P \perp OG_1$ 」と書く。）はい。えー、先ほど、こういうことを、えー、Gさんに言ってもらいましたが、この、接しているということから、中心から、G…えー、 G_1 という風な（黒板1の右側の四面体の図に内接している球の中心や重心 G_1 を指差しながら言う。）、その、接している接点、まで、この、 PG_1 という線分、それと、 OG_1 、という線分が垂直になっている（ PG_1 や OG_1 を指しながら言う。）。これは、どういう風なことかということ、こういう風に考えていきます。接している。接しているならば、ちょうど、中心から、半…えーっと、接点、まで結んだ線分、それと、この平面が垂直になる（立体で示しながら言う。）。少しちょっと、えー、わかりやすい図で描いていきますが、（黒板2に、底面 OAB を描き、その底面に垂直な線分 PG_1 を描き込む。）少し、その一、えー、関係だけ抜き出した、ここの、Pと、O、A、B、 G_1 （各点を指差しながら言う。）の関係だけ抜き出したものを、少しちょっと、こちらのほうに（黒板2の図を指しながら言う。）描いてみたんですが、この、 PG_1 というものが（ PG_1 を指しながら言う。）、えー、半径になります。この半径、 PG_1 、線分 PG_1 と、この、三角形 OAB 、この面が、ちょうど垂直に交わる、ちょうど直…垂直ですよ、と、これが、接しているという条件になる。ということは、これは、えー、最初の、空間ベクトルの最初の授業でも言いました。一つの直線が、平面と、垂直に交わっている場合には（黒板2の図を指しながら言う。）、その平面の、全ての直線と、垂直である。そこを、えー、一つ取り出してきて、この PG_1 と OG_1 （ OG_1 の言い間違い）が垂直である（黒板2の図に線分 OG_1 を描き込む。）。この、これは、先ほどもいいましたが、 OG_1 のみならず（黒板2の「 $OG_1P \perp OG_1$ 」の記述の OG_1 の部分指しながら言う。）、 OA 、 AB 、 BO などについても、同じようなことが言えます（それぞれの線分を指しながら言う。）。この、 OG_1 が、 AB でもいえる。えー、 AO 、 BO 、これでも、同じように、（黒板2の「 $OG_1P \perp OG_1$ 」のうち、「 OG_1 」の下に下線を引き、その下に「 (AB, AO, BO) 」と書く。）平面と、垂直であるから、同じようにすることができます。ここは、一つ、条件として出てきますね。もう一つ、条件として出てくるのが、あー、もういくつかありますが、これだけでは少しちょっと、足りないかもしれない。もう少しちょっと考え…えー、少し、条件を見ていきたいと思いますが、えー…、H君。H君。

生徒H： はい。

教師： 他にどういう風な条件を見つけられましたか？

生徒H： 三角形 OBC と、

教師： 三角形 OBC と、

生徒H： さっき言ったことが、三角形 OBC と OAC でもいえる。

教師： でいえる？

生徒H： うん。

教師： はい、えー、この、先ほど言った、これ、あの、この一関係ですね。 G_1P と OG_1 が垂直（黒板2の「 $OG_1P \perp OG_1$ 」を指しながら言う。）、この、 PG （ G_1 の

言い間違え)が、えー、平面 OAB 、つまり三角形 OAB と垂直である、この関係は、えー、無論、この OAB のみならず、 OBC と PG_2 、 PG_3 と OCA (黒板 1 の右側の四面体の図を指しながら言う。)、これについても、全ての面でいえます、というのが、さきほど言ってくれたこと。だからこれが (黒板 1 の右側の四面体の図を指しながら言う。)、全ての面でいえますよ、と。それと、もう少しないですかね。えー、I さん。

教師： こう見たほうがいいのかもしれない (立体の球の入った立体の四面体の頂点 O を上に向ける。)

生徒 I： …

教師： J さんわかる？

生徒 J： (首を傾げる)

教師： K さん

生徒 K： G_1 から P までと、 G_2 から P まで、 G_3 から P まで、の、大きさが等しい。

教師： はい、それもありますね。

この (黒板 1 の右側の四面体の図の中の内接球の中心 P と、 G_1 、 G_2 、 G_3 をそれぞれ線分で結び、それぞれの線分に、長さが等しいことを示す記号「 \parallel 」を描き込む。)、ちょっと少し図が、あの一、たくさん、複雑になってきたんですが、中心から各接点まで、えー、もう一つありますね。(線分 PG_4 を描き込んで、長さが等しいことを示す記号「 \parallel 」を描き込む。) ちょっとこれだけ抜けてしまいましたが、申し訳ありません。ちょうど、えー、この (立体の球が入った立体の四面体をかざす。)、球が接しているということから、全て、 PG_1 、 PG_2 、 PG_3 、 PG_4 、これ全部長さが等しくなるということ。それと、もう一個、実は、この (黒板 1 の右上にある「 $|a|=|b|=|c|$ 」を指しながら言う。)、最終的な結論を言うために必要なものが、もう一つあるんです。誰か気づいた人いませんか？ちょっと、ここが気づければ、後は証明をするだけなんですけど、ちょっとヒントを言います。一点ほど。ヒントは、この頂点と、この、 G 、 G (立体の四面体の各点を指差しながら言う。) を、3つの平面で、3つの点を通る平面でスパッと切ってみて。こう見たらいい？ (立体の四面体の頂点 O を生徒側に向ける。) そうすると見えるものがある。ここを通るんで (立体の四面体の頂点 O を指差しながら言う。)) ここを通過して、この赤い点 (立体の四面体の重心につけた印を指差しながら言う。))、これが重心。

回転させようか。見えるかな。(立体の四面体の頂点 O を生徒側に向けて、立体を約 90° 回転させる。) 見えたかな？上をこうしてもいい？ (立体の四面体の頂点 O を上に向けて立体を約 90° 回転させる。)

みんな実はすぐに気づけてるのは、あの一、証明をまだし、しないでねって言ったのに、証明をすぐ始めてる人は、実は、このベクトル OG_1 、ベクトル OG_2 、ベクトル OG_3 っていうベクトルを求めようとしてたんよ。この、この、 OG_4 もなんだけど (黒板 1 の右側にある四面体の図で、それぞれのベクトルを指で示しながら言う。))、4 点の重心の位置ベクトルを求めようとしていた。で、ちょっとそこを、ちょっと特別に抜き出して考えたいんだけど、(黒板 1 の右側にある四面体の図に、赤のチョークでベクトル OG_1 、ベクトル OG_2 を描き込む。) ちょっと、裏まで描くと、本当に、図が複雑になるので、二つだけにしました。この OG_1 とベクトル OG_2 、ベクトル OG_1 、ベクトル OG_2 ってどういう風な関係かねえ？…い

い？ベクトル OG_1 、ベクトル OG_2 というのは、ちょっと、(立体の球の入った立体の四面体に、直接マジックで OG_1 、 OG_2 を描き込む。) このような二つのベクトル (立体の四面体にマジックで描き込んだベクトルを生徒に示しながら言う。)。この二つのベクトルってどういう風な関係がある？L君。この二つのベクトルは、どんな関係があると思う？こう見たら分かりやすく…

生徒L： 大きさが同じ。

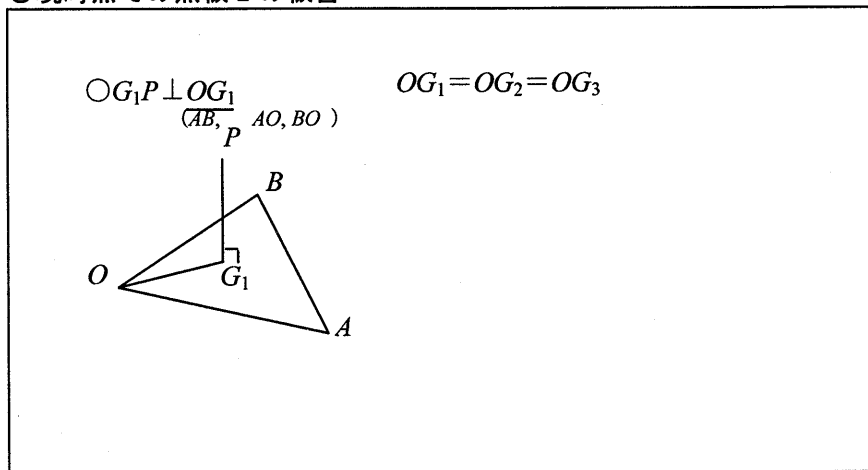
教師： そうだね。大きさが同じという関係があります。これ、実は、ちょうどこの接点のところで (立体の四面体の接点を指差しながら)、ゼーンぶ切っていくと、(黒板1の左上のほうに、3点で切断した場合の断面図を描く。) ちょっとごめんなさい。これ、円に見えるかな。O、 G_1 、 G_2 、(断面図にO、 G_1 、 G_2 をそれぞれ書き込む。) こういう風に、ちょうどこの円、スパァッと切ったら、こことこの球の中心を通るように (手で切断する様子を示しながら言う。) 切ったら、円が出てきました。これは中学校の時にやったと思いますが、円の、接線、円外の点から、円の接線を二本引いて、その接点までの長さは同じですよ、と。(断面図の中の直線 OG_1 と直線 OG_2 に、長さが等しいことを示す記号「 \parallel 」を描き込む。) という風なことになります。つまり、(黒板2の右側に「 $\odot OG_1 = OG_2 = OG_3$ 」と描く。) このような、この頂点Oから (黒板1の右側にある四面体の図のOを指差しながら言う。)、それぞれ、 OBC 、 OAB 、 OCA の重心までの距離が等しくなりますよ、と。実は、これが、一番証明に、証明に行くのに、一番近道な、あ、近道というか、その、ヒントとなることなんです、ここから、ちょっとだけ、こちらに描いたもの (黒板2を指しながら言う。) を少し、ちょっと、こちらに少し描きます。

○現時点での黒板1の板書

教師： (黒板1の左側にある四面体の図を消す。) いいでしょうか。少しちょっとこちらを向いてください。先ほど、(黒板1の左側に、「 $\odot OG_1 = OG_2 = OG_3$ 」と書く。) このように、頂点から3つの点、重心までの長さが等しいということをL君、えー、L君言ってくれました。じゃあこれを少しベクトルを使って考えようと。これベクトルを使って考えたら、線分の長さが等しいということは、ベクトルの大きさが等しいということ。(黒板1の左側にある、「 $\odot OG_1 = OG_2 = OG_3$ 」の下に、「 $\Rightarrow |OG_1| = |OG_2| = |OG_3|$ 」と板書)。これは等しいということになります。

さて、ここからです。皆さんがちょっと、最初の方にやっていたと思うのですが、このベクトル OG_1 , ベクトル OG_2 , ベクトル OG_3 (式「 $\Rightarrow |\overline{OG_1}| = |\overline{OG_2}| = |\overline{OG_3}|$ 」の中にあるそれぞれのベクトルを指しながら言う。), これは、どういう風に表すことができますか。今、こういう風に、えー、最初、えー、つ…、えー、E君が、このように(黒板1の右側にある四面体の図を指す。), O, A, B, C , そして、ベクトル OA をベクトル a , ベクトル OB をベクトル b , ベクトル OC をベクトル c (それぞれのベクトルを指差しながら言う。) という風に、定める。このとき、この3つのベクトル(黒板1の左側にある式, 「 $\Rightarrow |\overline{OG_1}| = |\overline{OG_2}| = |\overline{OG_3}|$ 」を指しながら言う。) はどういう風に表すことができるか。これ、ちょっと、あの一、誰か考…いろいろ考えてくれている人いました。えーと、Mさん。Mさん。

○現時点での黒板2の板書



生徒M: はい。
 教師: この3つのベクトルはどういう風に表されました？
 生徒M: 三分の,
 教師: 三分の,
 生徒M: ベクトル a プラスベクトル b 。うん、それが。
 教師: ベクトル OG_2 は。
 生徒M: 三分の, ベクトル b プラスベクトル c
 教師: ベクトル OG_3 。
 生徒M: 三分の, ベクトル c プラスベクトル a
 教師: (黒板の左側にある「 $\Rightarrow |\overline{OG_1}| = |\overline{OG_2}| = |\overline{OG_3}|$ 」の下に, 「 $\Rightarrow \left| \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{c} + \vec{a}}{3} \right|$ 」

と書く。)

ありがとうございました。こういう風に(「 $\Rightarrow \left| \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{c} + \vec{a}}{3} \right|$ 」を指しながら言う。), この3つのベクトルは、ベクトル a , ベクトル b , ベクトル c を使って、このように(「 $\Rightarrow \left| \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{c} + \vec{a}}{3} \right|$ 」を指しながら言う。) 表すことができます。

そうすると、今から、最終的に示したいのは、この(黒板1の右上にある

「 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ 」を指しながら言う。) ベクトル a , ベクトル b , ベクトル c の大きさが等しいことをいえばいい。だけど, この (「 $OG_1=OG_2=OG_3$ 」を指しながら言う。), 先ほど L 君が言ってくれた条件からみ, 見えてくるのは, このように, 三分の, ベクトル a プラスベクトル b , ベクトル b プラスベクトル c , ベクトル c プラスベクトル a (「 $\Rightarrow \left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|=\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=\left|\frac{\vec{c}+\vec{a}}{3}\right|$ 」を指しながら言う。), この大きさが全て等しいことが分かった。じゃあ, 後, うまーくこれ (「 $\Rightarrow \left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|=\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=\left|\frac{\vec{c}+\vec{a}}{3}\right|$ 」を指しながら言う。) を変形していけば, この, 最終的な結論 (黒板 1 の右上にある「 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ 」を指しながら言う。) が導き出せるかもしれない。で, さらに, じゃあちょっと, それを (「 $\Rightarrow \left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|=\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=\left|\frac{\vec{c}+\vec{a}}{3}\right|$ 」を指しながら言う。), へ…えー, やっていくときに, 何か, この条件があったら, 最終的にそれが言えそうでした。ね。ここから (「 $\Rightarrow \left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|=\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=\left|\frac{\vec{c}+\vec{a}}{3}\right|$ 」を指しながら言う。), 最終的に, こちらの条件 (黒板 1 の右上にある「 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ 」を指しながら言う。) を言いたい, その時に, 一つ残しとかんとね (黒板 2 の右上にある「 $OG_1=OG_2=OG_3$ 」を消す。), この PG_1 (黒板 2 の図を指しながら言う。), つまり, 中心から重心への線分は, この, 平面と垂直である, という条件がありました。さて, ここまでは, いろいろな条件, 接するという条件を, えー, 使って, いろいろ, えー, それから, 式を, えー, いろいろ, 導き出しました。今から先にやることを伝えます。これらの条件を全て活用していき, 最終的に, この (黒板 1 の右上にある「正四面体である」を指しながら言う。), 結論, 正四面体である, ことを言うために, この (黒板 1 の右上にある「 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ 」を指しながら言う。), 結論, このこと, この, ベクトル a , ベクトル b , ベクトル c (「 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ 」のそれぞれのベクトルを指しながら言う。) の大きさが等しいことをいいたい。さて, 発想の時間をとります。これらの, 性質 (黒板 1 の左側にある「 $\Rightarrow \left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|=\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=\left|\frac{\vec{c}+\vec{a}}{3}\right|$ 」や, 「 $OG_1P \perp OG_1$ 」などを指しながら言う。), から出てきた式を, うまくいろいろ変形していき, 最終的な, 結論 (黒板 1 の右上にある「 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ 」を指しながら言う。) を得るために, いろいろ, ちょっと式か…, あの一, 式変形をしていってください。はい, それでは時間をとりますので, ちょっと, えー, 式変形などをしながら, 考えてみてください。

(生徒による作業 3 分)

はい, えー, いろいろ今やっている途中ですが, ちょっと時間のほうが来てしまいました。ある程度気づいている人は, 実は, ここ (黒板 1 の左上にある「 $\left|\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}\right|=\left|\frac{\vec{b}+\vec{c}}{3}\right|=\left|\frac{\vec{c}+\vec{a}}{3}\right|$ 」を指す。) を変形していくと, 最終的な結論 (黒板 1 の右上にある「 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$ 」を指す。) を言うために, 何が必要なのかを, 見えてきたと

思います。これが、実は、昨日の授業と関わってくることなのですが、これ（黒板1の左側にある「 $\left| \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{c} + \vec{a}}{3} \right|$ 」を指す。）を变形していったときに、何か

が必要になります。ここから（黒板1の左側にある「 $\left| \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{c} + \vec{a}}{3} \right|$ 」を指す。），

最終的な結論（黒板1の右上にある「 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ 」を指す。）をいうために、何かが必要になってくる。それを、少し、次の授業までに考えてみてください。で、もしそれが見つかった人、それ、見つかった人は、最終的な証明（黒板1の右上にある「 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ 」を指しながら言う。），ね。えー、しっかりと、形式…えー、あの、論理立って説明した説明を、書いて来てください。

ちょっと時間が足りなくて申し訳ありませんでした。次の時間、この、ことについて、少し、解説を加えていきたいと思います。

次の時間までに少し、考えてみてください。

はい、それでは、終わります。

○黒板1の最終的な板書

$$\begin{aligned} & \circ \frac{OG_1}{OG_1} = \frac{OG_2}{OG_2} = \frac{OG_3}{OG_3} \\ \Rightarrow & \left| \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3} \right| = \left| \frac{\vec{c} + \vec{a}}{3} \right| \end{aligned}$$

<課題>

与えられた四面体に内接する球が各面の重心で接するとき、その四面体はどのような四面体になるだろうか。

↓

◎ 正四面体になりそうだ

証明

正四面体である

○黒板2の最終的な板書

○ $G_1 P \perp OG_1$
(AB, P, AO, BO)

$OG_1 = OG_2 = OG_3$