定常・非定常時系列回帰モデルにおける構造変化のCUSUMテスト*†

逯　　新紅

要　約

本論文の前半では、主としてOLS残差に基づくCUSUMテストに焦点を当てる。そして、定数項を含む定常なAR(1)モデルにおけるOLS残差に基づくCUSUM X(r)テストの漸近分布が標準Brownain Bridgeの最大値の分布に従うことを理論的に証明する。本論文の後半では、共和分関係を含む時系列回帰モデルでは、CUSUM X(r)は漸近的にBrownian Motionに従うことを理論とシミュレーションの両面から示す。

目　次

キーワード（Keywords）：CUSUMテスト、OLS残差、系列相関、共和分

1．はじめに

経済時系列モデルのパラメータは、政府の政策変更、社会的危機などの影響を受けて変化すると考えられるので、モデルのパラメータの安定性の検定、変化時点の検出は計量経済学の重要な研究課題の１つである。構造変化ないしはパラメータの安定性を検定する意義は次の２点である。第１点は、構造変化が政策の変化の効果を表すとすれば、構造変化の検定は、政策の有効性の検定でもあるという点である。第２点は、計量経済学的方法論に関わる問題であるが、よく知られるように構造変化を無視して統計分析を行うと、誤った結論を招くという点である。この点は、想定誤差の問題と捉えることができる。以上の理由によって、経済モデルの構造変化ないしはパラメータの安定性の問題は古くから重要な問題として研究されており、大量な文献が存在している（例えばPage（1975）を見よ）。本論文の目的は、CUSUMテストを中心に、経済時系列における構造変化の検定問題について検討することである。

CUSUMテストには大別して２つの種類がある。１つはBrown, Durbin and Evans（1975）によっ

* 本論文は著者の修士論文「経済時系列における構造変化の検定－CUSUMテストを中心にして－」の第１、２章を中心にまとめたものである。

† 本稿の作成に当たり、広島大学の前川功一先生、宜名真勇先生、山田宏先生に大変丁寧なご指導を頂いた。元社会科学研究科博士課程後期の河合研一さん、森本孝之さんを初め、同じ計量経済学専攻の方々にも、日頃からご指導・ご協力頂いた。この場をお借りして、皆様に感謝の意を表わします。

て提案された、逐次残差を用いる方法である。しかし逐次残差を用いるCUSUMテストは、統計的特性を解析的に導出することが困難である。そこで代替的方法として、解析的扱いが容易な最小２乗（OLS）残差に基づくCUSUMテストがしばしば用いられる。本論文の前半では、主としてOLS残差に基づくCUSUMテストに焦点を当てる。定数項を含む定常なAR(1)モデルにおけるOLS残差にもとづくCUSUMテストの漸近分布が標準Brownain Bridgeの最大値の分布に従うことを理論的に証明する。本論文の後半では、共和分関係を含むモデルでは、CUSUM統計量X(r)は漸近的にBrownian Motionに従うことを理論とシミュレーションの両面から考察する。

本論文の構成は次の通りである。第２節では、経済時系列分析によく用いられる代表的なモデルごとにOLS残差に基づくCUSUMテスト統計量X(r)について、先行研究を踏えながら理論的考察を行う。そして定数項を含む定常なAR(1)モデルの場合について、独自にX(r)の漸近分布を導出する。その結果、ある場合には、X(r)の漸近分布が標準Brownain Bridgeの最大値の分布に従うことを証明する。第３節では、共和分関係にある系列におけるX(r)は漸近的にBrownian Motionに従うことを理論とシミュレーションの両面から考察する。終わりに結果を述べる。

2．CUSUMテスト

回帰モデルの係数の安定性あるいは構造変化の検定法に関しては、大きく分けて２つのアプローチがある。１つは、構造変化が起こったのではないかと考えられるある特定の１時点を境に、その前後で構造変化が本当にあったかどうかを検定する立場である、この場合の代表的なテストとして、計量経済の分野でChowテストと呼ばれるテストがある。これは統計学的にはＦ－検定に他ならない。第２のアプローチは、構造変化の時点を想定することなく、データ期間のどこかの時点で、構造変化があったかどうかをテストする立場である。この立場の代表的なテストはBrown-Durbin-Evans（1975）によるCUSUMテストである（以下、BDEテスト）。BDEテストは、逐次残差（recursive residuals）を用いて行われる。第１のアプローチは、経済学的あるいは経験的に構造変化点の候補に関して、事前情報が得られる場合には有効な方法である。しかし多くの実際の場合にはそのような確かな事前情報が得られる場合は少ないと考えられるので、第２のアプローチのほうがより自然な方法であろう。またこの２つのアプローチにはデータに対する考え方も少し違うと思われる。後者は回帰構造の構造変化の検定というより、回帰モデルの係数の安定性の検定を捕らえようとするものである。本論文では後者の立場に立って、計量経済学でしばしば扱われる様々回帰モデルにおける係数の安定性について論じる。

CUSUMテストの説明に入る前に本稿で用いる標準線形回帰モデルとその表記法を導入しておく。標準線形回帰モデルを次のように行列によって表現する。

$$y = X\beta + u.$$

ただし、

$$y' = (y_1, y_2, \ldots, y_T), u' = (u_1, u_2, \ldots, u_T),$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{K1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \ldots & x_{K2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1t} & x_{2t} & \ldots & x_{Kt} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1T} & x_{2T} & \ldots & x_{KT} \end{pmatrix},$$

$$\beta' = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_K).$$

ここで、撹乱項uに関して以下の仮定を置く、

$$u_t \sim iidN(0, \sigma^2).$$

この標準モデルでは、回帰係数ベクトルβは、データ期間$t = 1,2,\ldots,T$の間を通して一定と仮定されている。以下本論文において、説明変数が確率的である場合、撹乱項u_tに系列相関がある場合、yとXの間に共和分関係がある場合などの非標準的な場合も考察する。そして、いずれの場合にも主たる関心事は係数ベクトルβの時間を通しての安定性である。

2．1　いくつかの代表的な時系列モデルの場合

回帰分析におけるOLS残差にもとづくCUSUMテストとしてはMcCabe and Harrison（1980）によるCUSUM Squareテスト、及びPloberger and Krämer（1992）（PK）による、CUSUMテストがある。しかしこれらの研究においては回帰の説明変数に$X'X = O_p(T)$という制約があった。これに対し、Wright（1993）はXが非定常の場合のCUSUMテストを提案し、その漸近分布を求めた。

この節では以下の比較的単純な代表的な時系列のもとでWrightの枠組を少し拡張しつつ、OLS残差にもとづくCUSUMテストの漸近分布を求める。

モデル１.

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t,$$

モデル２.

$$y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + u_t, \qquad \beta = 1,$$

モデル３．

$$y_t = \alpha + \beta t + u_t,$$

モデル４．

$$y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + u_t, \qquad |\beta| < 1.$$

以上のモデルにおいて、確率変数u_t $(t=1,2,\dots,T)$に関して共通の仮定

$$u_t \sim iidN(0, \sigma^2)$$

を置く。このときFCLT（Functional Central Limit Theorem）より、次式が成立する。

$$T^{-1/2} \sum_{t=1}^{[Tr]} u_t \xrightarrow{d} \sigma B(r) \tag{2.1}$$

ただし、$B(r)$はスカラー標準ブラウン運動を表し、 $\sigma > 0$, $0 \leq r \leq 1$, $[\cdot]$ はガウス記号、$\xrightarrow{d}$ は弱収束を示すものとする。今後これらのモデルのOLS残差を $\hat{u}_t$ と記す。$\hat{u}_t$ の標準化された累積和、すなわち、CUSUMを区間［0 1］の関数として

$$X(r) = \frac{T^{-1/2}}{\hat{\sigma}} \sum_{t=1}^{[Tr]} \hat{u}_t$$

によって表す。ここに $\hat{\sigma}$ はモデルの自由度T-kを使って、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{[Tr]} \hat{u}_t^2}{T-k}$$

(kは説明変数の数）によって定義する。以下において次の記号を用いる：$\xrightarrow{p}$ は確率収束を表し、≡は定義を表し、$diag(A,B)$はブロック対角行列

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

を表す。ここで、$W_0(\mathrm{r}) \equiv B(\mathrm{r}) - \mathrm{r}B(1)$と置く。このとき、$W_0(0) \equiv W_0(1) = 0$である。$W_0$はStandard Brownian Bridge、あるいは、'tied−down' Brownian Motionと呼ばれる。さらに、ブラウン運動B（・）の汎関数$W_1(\mathrm{r})$を

$$W_1(r) = B(r) + (3r^2 - 4r)B(1) + 6r(1-r)\int_0^1 zdB(z) \tag{2.2}$$

によって定義する。ただし単純化のためにモデル１～４は１変数回帰モデルを考える。

以下の分析においてしばしば用いられる公式を補題としてまとめておく［Hamilton (1994, Proposition 17.1)を参照]。

補題　ξ_t が次のようなドリフト項のないランダム・ウォークに従うと仮定する。

$$\xi_t = \xi_{t-1} + u_t.$$

ただし、$\xi_0 = 0,\ u_t \sim iid(0, \sigma^2)$ 。この時、次のことが成り立つ。

(a) $T^{-1/2}\sum_{t=1}^{T} u_t \xrightarrow{d} \sigma \cdot W(1)$

(b) $T^{-1}\sum_{t=1}^{T} \xi_{t-1}u_t \xrightarrow{d} (1/2)\sigma^2\{[W(1)]^2 - 1\}$

(c) $T^{-3/2}\sum_{t=1}^{T} tu_t \xrightarrow{d} \sigma \cdot W(1) - \sigma \cdot \int_0^1 W(r)dr$

(d) $T^{-3/2}\sum_{t=1}^{T} \xi_{t-1} \xrightarrow{d} \sigma \cdot \int_0^1 W(r)dr$

(e) $T^{-2}\sum_{t=1}^{T} \xi_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \sigma^2 \int_0^1 [W(r)]^2 dr$

(f) $T^{-5/2}\sum_{t=1}^{T} t\xi_{t-1} \xrightarrow{d} \sigma \cdot \int_0^1 rW(r)dr$

(g) $T^{-3}\sum_{t=1}^{T} t\xi_{t-1}^2 \xrightarrow{d} \sigma^2 \cdot \int_0^1 r[W(r)]^2 dr$

(h) $T^{-(v+1)}\sum_{t=1}^{T} t^v \xrightarrow{d} 1/(v+1) \qquad for\ v = 0, 1, \ldots.$

以上の記号と条件の下で、モデル１～４を考える。

２．１．１　モデル１～３の場合

Wright（1993）はモデル１～３について以下の結果を示した。ただし、モデル１では$z'_t=(1 \quad x_t)$とし、z_tは次の条件を満たす非確率的変数であると仮定される。

$$\lim_{T\to\infty} \sup T^{-1}\sum_{t=1}^{T} ||z_t||^{2+\delta} < \infty, \tag{2.3}$$

$$\lim_{T\to\infty} T^{-1}\sum_{t=1}^{T} z_t z'_t = R. \tag{2.4}$$

ただし、$||\cdot||$は、ユークリッド・ノルム、Rは非特異・非確率行列である。

Wright（1993）はモデル１～３のCUSUMテストX(r)の漸近分布を求めた。その結果を以下に示す。

定理2.1　モデル１における$X(r)$の漸近分布は $X(r) \xrightarrow{d} W_0(r)$ である。

定理2.2　モデル２における$X(r)$の漸近分布は $X(r) \xrightarrow{d} W_1(r)$ である。

定理2.3　モデル３における$X(r)$の漸近分布は $X(r) \xrightarrow{d} W_1(r)$ である。

モデル４における$X(r)$の漸近分布の証明はWright（1993）の論文で扱っていないので、ここに詳しい証明を示す。

2．1．2　モデル4の場合

モデル4

$$y_t = \alpha + \beta y_{t-1} + u_t \quad |\beta| < 1; \alpha \neq 0;\ t = 1, 2, \ldots, T \tag{2.5}$$

のX(r)の漸近分布に関して次の定理が成立する。

定理2.4 $X(r) \xrightarrow{d} W_0(r)$

証明：

(2.5) 式は次々過去に逆のぼって代入を繰り返すと、

$$\begin{aligned}
y_t &= \alpha + \beta y_{t-1} + u_t \\
&= \alpha + \beta(\alpha + \beta y_{t-2} + u_{t-1}) + u_t \\
&\vdots \\
&= \alpha + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \cdots + u_t + \beta u_{t-1} + \beta^2 u_{t-2} + \ldots \\
&= \alpha/(1-\beta) + \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u_{t-j}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

ここで $c = \alpha/(1-\beta)$, $v_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u_{t-j}$ とする。(2.5) 式を書き直すと、

$$y_t = c + v_t \tag{2.7}$$

になる。

v_t の平均と分散は、

$$E(v_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j E(u_{t-j}) = 0,$$

$$Var(v_t) = E(\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u_{t-j} - 0)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^{2j} E(u_{t-j})^2 = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \beta^{2j} = \sigma^2(1+\beta^2+\beta^4+\ldots) = \sigma^2/(1-\beta^2)$$

である。

(2.7) 式をTで割ると、

$$\frac{1}{T} y_t = \frac{1}{T} c + \frac{1}{T} v_t \tag{2.8}$$

になる。

モデル1において、定理2.1 $X(r) \xrightarrow{d} W_0(r)$、すなわち、X(r)がBrownian Bridgeに分布収束することの証明過程は、次のようにモデル4にも応用することができる。モデル1で、$\frac{X'X}{T} \Rightarrow R$（定数行列）と仮定されているので、モデル4でも

$$\frac{X'X}{T} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} T & \sum_{t=2}^{T} y_{t-1} \\ \sum_{t=2}^{T} y_{t-1} & \sum_{t=2}^{T} y_{t-1}^2 \end{pmatrix} \Rightarrow R \text{（定数行列）} \tag{2.9}$$

が成立すれば、モデル１の証明がそのまま適用される。そのためには (2.9) 式の $\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}$ と $\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}^2$ の項のオーダーが$O_p(T)$であることを証明すれば良い。この証明は、$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$ と $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2$ の項のオーダーの証明と同じである。

次に $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$ のオーダーを証明する。

まず、$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$ の分散を求める[1]。

$$
\begin{aligned}
Var(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t) &= \frac{1}{T^2}\left(E(\sum_{t=1}^{T} y_t)^2 - [E(\sum_{t=1}^{T} y_t)]^2\right) \\
&= \frac{1}{T^2}E(\sum_{t=1}^{T} y_t)^2 - c^2.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

(2.10) の中の $E(\sum_{t=1}^{T} y_t)^2$ は

$$
\begin{aligned}
E(\sum_{t=1}^{T} y_t)^2 &= E\left[\sum_{t=1}^{T}(c+v_t)\right]^2 \\
&= E\left[T^2c^2 + 2Tc\sum_{t=1}^{T} v_t + (\sum_{t=1}^{T} v_t)^2\right] \\
&= T^2c^2 + E\left[\left(\sum_{t=1}^{T} v_t\right)^2\right] \\
&= T^2c^2 + E(v_1 + v_2 + \cdots + v_t)^2 \\
&= T^2c^2 + E\left[\sum_{t=1}^{T}(v_t)^2 + \sum_{i\neq j} v_i v_j\right].
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

(2.11) の中の $E\left(\sum_{i\neq j} v_i v_j\right) = \sum_{i\neq j} E\left(v_i v_j\right)$ の値は次のように求められる。

---

[1]ここで次の公式を用いた。

$$
\begin{aligned}
&Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \\
&X \sim N(0,\sigma^2), E(X^4) = 3\sigma^4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(v_i v_j) &= E\left[\left(\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j u_{t-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j u_{t+s-j}\right)\right] \\
&= E\left(u_t + \beta u_{t-1} + \beta^2 u_{t-2} + \beta^3 u_{t-3} + \cdots + \beta^s u_{t-s} + \beta^{s+1} u_{t-s-1} + \dots\right) \\
&\quad * \left(u_{t+s} + \beta u_{t+s-1} + \beta^2 u_{t+s-2} + \cdots + \beta^s u_t + \beta^{s+1} u_{t-1} + \beta^{s+2} u_{t-2} + \dots\right) \\
&= \beta^s\sigma^2 + \beta^{s+2}\sigma^2 + \beta^{s+4}\sigma^2 + \dots \\
&= \beta^s\sigma^2(1 + \beta^2 + \beta^4 + \dots) \\
&= \frac{\beta^s\sigma^2}{1-\beta^2}.
\end{aligned} \tag{2.12}
$$

(2.12) の結果を使って、

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{i\neq j} v_i v_j\right) &= \sum_{i\neq j} E\left(v_i v_j\right) \\
&= \frac{2\beta\sigma^2}{1-\beta^2}(1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \dots) \\
&= \frac{2\beta\sigma^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)}
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

という結果が得られる。

故に、(2.13) の結果を使って (2.10) の $E(\sum_{t=1}^{T} y_t)^2$ 項は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
E(\sum_{t=1}^{T} y_t)^2 &= T^2c^2 + E\left(\sum_{t=1}^{T}(v_t)^2\right) + E\left(\sum_{i\neq j} v_i v_j\right) \\
&= T^2c^2 + \frac{T\sigma^2}{1-\beta^2} + \frac{2\beta\sigma^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)}.
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

(2.10)、(2.14) の結果を合わせて、

$$
\begin{aligned}
Var(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t) &= \frac{1}{T} * \frac{\sigma^2}{1-\beta^2} + \frac{1}{T^2}\frac{2\beta\sigma^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)} \\
&= 0 \quad (T \to \infty)
\end{aligned} \tag{2.15}
$$

になる。$Var(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t) \to 0$ なので、$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$ のオーダーは

$$
\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t = O_p(T) \tag{2.16}
$$

である。

次に $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2$ のオーダーを考える。$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2$ を展開すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2 &= \sum_{t=1}^{T}[(c^2+2cv_t+v_t^2)/T] \\ &= c^2+\frac{2c}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t+\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t^2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

になる。その平均と分散は、

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2\right) &= E\left(c^2+\frac{2c}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t+\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t^2\right) \\ &= c^2+\frac{\sigma^2}{1-\beta^2}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2\right) = E\left[\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2\right)^2\right] - \left[E\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2\right)\right]^2 \tag{2.19}$$

である。(2.19) 式の $E\left[\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2\right)^2\right]$ 項を展開すると、

$$\begin{aligned} E\left[\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2\right)^2\right] &= \frac{1}{T^2}E[(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_T^2)^2] \\ &= \frac{1}{T^2}E\left(\sum_{t=1}^{T} y_t^4+\sum_{i\neq j} y_i^2 y_j^2\right) \end{aligned} \tag{2.20}$$

になる

(2.20) 式の $E\left(\sum_{t=1}^{T} y_t^4\right)$ 項と $E\left(\sum_{i\neq j} y_i^2 y_j^2\right)$ 項の展開は次のようになる。

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{t=1}^{T} y_t^4\right) &= E\left[\sum_{t=1}^{T}(c+v_t)^4\right] \\ &= \sum_{t=1}^{T}\left[E(c^4+6c^2v_t^2+v_t^4+4c^3v_t+4cv_t^3)\right] \\ &= Tc^4+6c^2\sum_{t=1}^{T}\left[E(v_t^2)\right]+\sum_{t=1}^{T}\left[E(v_t^4)\right]+4c\sum_{t=1}^{T}\left[E(v_t^3)\right]. \end{aligned} \tag{2.21}$$

正規分布に従う確率変数の奇数次項のモーメントがゼロなので、(2.21) のなかの $E(v_t^3)=0$ である。2次の項は

$$\sum_{t=1}^{T}\left[E(v_t^2)\right]=\frac{T\sigma^2}{1-\beta^2} \tag{2.22}$$

になる。4次の項は、

$$E(v_t^4)=3(\frac{\sigma^2}{1-\beta^2})^2 \tag{2.23}$$

になる。

(2.21) 式、(2.22) 式、(2.23) 式を合わせて、(2.21) 式は、

$$E\left(\sum_{t=1}^{T}y_t^4\right)=Tc^4+6c^2T\frac{\sigma^2}{1-\beta^2}+3T(\frac{\sigma^2}{1-\beta^2})^2 \tag{2.24}$$

となる。従って、$T\to\infty$の時、

$$\frac{1}{T^2}E\left(\sum_{t=1}^{T}y_t^4\right)\xrightarrow{p}0 \tag{2.25}$$

になる。

次に、(2.20) 式の $E\left(\sum_{i\neq j}y_i^2y_j^2\right)$ 項の展開は次のようである。

$$\begin{aligned}E\left(\sum_{i\neq j}y_i^2y_j^2\right)&=E\left[\sum_{i\neq j}(c+v_i)^2(c+v_j)^2\right]\\&=\sum_{i\neq j}E[(c^4+2c^3v_j+c^2v_j^2+2c^3v_i+4c^2v_iv_j+2cv_iv_j^2+v_i^2c^2+2cv_i^2v_j+v_i^2v_j^2)].\end{aligned} \tag{2.26}$$

(2.26) 式の第2等号の各項の期待値を取ると、

定数項 $E(c^4)=c^4$；

1次項 $E(2c^3v_j)=0,E(2c^3v_i)=0$；

3次の項 $E(2cv_iv_j^2)=0$；$E(2cv_i^2v_j)=0$；

2次の項 $E(c^2v_j^2)=c^2\frac{\sigma^2}{1-\beta^2},E(c^2v_i^2)=c^2\frac{\sigma^2}{1-\beta^2}$；

(2.13) 式によって、 $\sum_{i\neq j}E(4c^2v_iv_j)=4c^2\frac{2\beta\sigma^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)}$ $(i\neq j)$ である。したがってここでは、残りの $E(v_i^2v_j^2)$ $(i\neq j)$ を求めれば良い。そのために $\sum_{i\neq j}x_ix_j=2\sum_{i<j}x_ix_j$ であるので、 $E\left(\sum_{i\neq j}v_i^2v_j^2\right)=E\left(2\sum_{t=1,s>0}^{n}v_t^2v_{t+s}^2\right)$ で考えればよい。

ここで (2.6) 式で定義された v_t を次のように書き直しておく。

$$v_t = u_t + \beta u_{t-1} + \beta^2 u_{t-2} + \ldots,$$

$$v_{t+s} = u_{t+s} + \beta u_{t+s-1} + \beta^2 u_{t+s-2} + \cdots + \beta^{s-1} u_{t+1} + \beta^s u_t + \beta^{s+1} u_{t-1} + \beta^{s+2} u_{t-2} + \ldots,$$

$$v_{t+s} = v^* + \beta^s v_t.$$

ただし、 $v^* = u_{t+s} + \beta u_{t+s-1} + \beta^2 u_{t+s-2} + \cdots + \beta^{s-1} u_{t+1}$, $\beta^s v_t = \beta^s u_t + \beta^{s+1} u_{t-1} + \beta^{s+2} u_{t-2} + \ldots$。$v_t$ と v^* が独立であるので、 $E(v_t v^*) = E(v_t)E(v^*) = 0$。以上の結果を使えば、

$$\begin{aligned} E(v_t^2 v_{t+s}^2) &= E[v_t^2 (v^* + \beta^s v_t)^2] \\ &= E(v_t^2 v^{*2}) + 2\beta^s E(v^* v_t^3) + \beta^{2s} E(v_t^4) \\ &= E(v_t^2) E(v^{*2}) + 2\beta^s E(v^*) E(v_t^3) + \beta^{2s} E(v_t^4) \\ &= \frac{\sigma^2}{1-\beta^2} E(v^{*2}) + 3\beta^{2s} (\frac{\sigma^2}{1-\beta^2})^2 \end{aligned} \tag{2.27}$$

と書き直すことが出来る。ただし、3 次の項 $E(v_t^3) = 0$, 及び 4 次の項 $E(v_t^4) = 3(\frac{\sigma^2}{1-\beta^2})^2$. (2.27)

式の残りの $E(v^{*2})$ を求めれば良い。$t+s=t'$とすると、

$$\begin{aligned} E(v^{*2}) &= E[u_{t+s} + \beta u_{t+s-1} + \beta^2 u_{t+s-2} + \cdots + \beta^{s-1} u_{t+1}]^2 \\ &= E[u_{t'} + \beta u_{t'-1} + \beta^2 u_{t'-2} + \cdots + \beta^{s-1} u_{t'-(s-1)}]^2 \\ &= E[u_{t'}^2 + \beta^2 u_{t'-1}^2 + \beta^4 u_{t'-2}^2 + \cdots + \beta^{2(s-1)} u_{t'-(s-1)}^2] + \ldots E[u_i u_j (i \neq j)] \ldots \\ &= \sigma^2 + \beta^2 \sigma^2 + \beta^4 \sigma^2 + \cdots + \beta^{2(s-1)} \sigma^2 \\ &= \sigma^2 \frac{1-\beta^{2s}}{1-\beta^2}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

すなわち、 $E(v^{*2})$ は定数となる。この (2.28) 式の結果を (2.27) 式に代入すると、結局

$$\begin{aligned} E(v_t^2 v_{t+s}^2) &= \frac{\sigma^2}{1-\beta^2} \ (\sigma^2 \frac{1-\beta^{2s}}{1-\beta^2}) + 3\beta^{2s} (\frac{\sigma^2}{1-\beta^2})^2 \\ &= (1 + 2\beta^{2s}) (\frac{\sigma^2}{1-\beta^2})^2 \end{aligned} \tag{2.29}$$

となる。また、 $E\left(\sum_{i \neq j} v_i^2 v_j^2\right) = E\left(2 \sum_{t=1,s>0}^{n} v_t^2 v_{t+s}^2\right)$ の関係の下で、 $E\left(\sum_{i \neq j} v_i^2 v_j^2\right)$ は、

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i \neq j} v_i^2 v_j^2\right) &= 2 \sum_{i \neq j, t=1, s>0}^{n} \quad E(v_t^2 \, v_{t+s}^2) \\ &= 2T(T-1)(1 + 2\beta^{2s}) (\frac{\sigma^2}{1-\beta^2})^2 \end{aligned} \tag{2.30}$$

となる。結局（2.26）式は、

$$E\left(\sum_{i\neq j} y_i^2 y_j^2\right) = T(T-1)c^4 + T(T-1)2c^2\frac{\sigma^2}{1-\beta^2} + 4c^2\frac{2\beta\sigma^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)} + 2T(T-1)(1+2\beta^{2s})(\frac{\sigma^2}{1-\beta^2})^2 = A \tag{2.31}$$

になる。ただしここで、

$A = T(T-1)c^4 + T(T-1)2c^2\frac{\sigma^2}{1-\beta^2} + 4c^2\frac{2\beta\sigma^2}{(1-\beta^2)(1-\beta)} + 2T(T-1)(1+2\beta^{2s})(\frac{\sigma^2}{1-\beta^2})^2$。

ゆえに、

$$\frac{1}{T^2}E\left(\sum_{i\neq j} y_i^2 y_j^2\right) = 0,\ (T\to\infty). \tag{2.32}$$

（2.25）式と（2.32）式を合わせて、（2.20）式は、

$$E\left[\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2\right)^2\right] = 0,\ (T\to\infty). \tag{2.33}$$

最後に、（2.33）式と（2.18）式を合わせて、（2.19）式は結局

$$Var\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2\right) = c^2 + \frac{\sigma^2}{1-\beta^2} \tag{2.34}$$

という定数になる。ゆえに、$\frac{1}{T}\sum_{t-1}^{T} y_t^2 = O_p(T)$ である。

以上で、（2.9）式の $\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}$ と $\frac{1}{T}\sum_{t=2}^{T} y_{t-1}^2$ の項のオーダーが$O_p(T)$であることが証明された。モデル 4 においても $\frac{X'X}{T} \Rightarrow R$（定数行列）が証明された。したがって定理2.4の証明においても、定理 2.1 $X(r) \xrightarrow{d} W_0(r)$ の証明がそのまま成立するので、定理2.4が成立する（定理2.4の証明終わり）。

3．共和分とCUSUMテスト

3．1　共和分関係を含むモデル

次のようなモデルを考える。

モデル５－１

$$y_t = c + \alpha y_{t-1} + \beta z_t + u_t. \tag{3.1}$$

モデル５－２

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \beta z_t + u_t. \tag{3.2}$$

ただし、モデル５－１とモデル５－２は次の条件を満たすものとする。

$|\alpha|<1$,
$u_t \sim N(0, \sigma_u^2)$,
$z_t = z_{t-1} + v_t, v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$,

u_t と v_t は独立である。

モデル５－３

$$y_t = c + \alpha y_{t-1} + \beta z_t + u_t. \tag{3.3}$$

ここで、u_t は $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t, |\rho|<1, \epsilon_t \sim N(0, \sigma_\epsilon^2)$ 、と仮定する。ただし、v_t と ϵ_t は独立である。他の条件は全て同じである。

モデル５－１において、右辺に表われる説明変数 y_{t-1} と z_t は実は共和分関係にある(Maekawa et.al 1996及びMaekawa et.al 2003)。モデル５－１とモデル５－２は残差 u_t が自己相関がない（AR(1)ではない）、$iidN(0, \sigma_u^2)$ である。ここでモデル５－１を例として、説明する。

Zhonglu He, K.Maekawa(2003)は（3.1）式の係数 c, α, β の最小２乗推定量 $\hat{c}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ は、ρ=0のとき一致推定量であることを示した。すなわち ρ=0のとき

$$plim\hat{\alpha} = \alpha,$$

$$plim\hat{\beta} = \beta,$$

$$plim\hat{c} = c,$$

$$plim\hat{\sigma}^2 = \sigma^2.$$

ただし、ここに、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}{T-k}$$

である。OLS残差は

$$\hat{u}_t = y_t - \hat{y}_t = y_t - \hat{c} - \hat{\alpha} y_{t-1} - \hat{\beta} z_t,$$

モデルの誤差項は

$$u_t = y_t - c - \alpha y_{t-1} - \beta z_t$$

である。ここで$T \to \infty$の時、 $\hat{c}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\sigma}$ が c, α, β, σ の一致推定量だから、 $\hat{u}_t$ を u_t の推定値と見なして近似的に

$$X(r) = \frac{T^{-1/2}}{\hat{\sigma}} \sum_{t=1}^{[Tr]} \hat{u}_t \simeq \frac{T^{-1/2}}{\hat{\sigma}} \sum_{t=1}^{[Tr]} u_t$$

として扱ってみよう。$X(r)$は漸近的にBrownian Motionに従う。このような近似が成立すればモデル５－１もモデル１と同様にCUSUMテストが漸近的には適用できる。

モデル５－３では誤差項に自己相関があるので、モデル５－３を以下に示すように変形して、誤差項の自己相関を消去し、モデル１に帰着させることができる。その後の証明はモデル１と同じになる。具体的な過程は次のようである。

(3.3) 式において時点tをt-1に変えた式の両辺に ρ をかければ、

$$\rho y_{t-1} = \rho c + \rho\alpha y_{t-2} + \rho\beta z_{t-1} + \rho u_{t-1} \tag{3.4}$$

が得られる。(3.3) 式から (3.4) 式の辺々を引けば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} y_t &= c(1-\rho) + (\alpha+\rho) y_{t-1} - \rho\alpha y_{t-2} + \beta z_t - \rho\beta z_{t-1} + \epsilon_t \\ &= a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 z_t + a_4 z_{t-1} + \epsilon_t. \end{aligned}$$

ただし、 $\epsilon_t = u_t - \rho u_{t-1}$. (3.4) 式の最小２乗推定量 $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \hat{a}_4$ を求めた上で、

$\hat{\rho} = -\hat{a}_4/\hat{a}_3$ によって ρ が推定できる。次に、上と同様の変形を行えば、次の式が得られる。

$$y_t - \hat{\rho} y_{t-1} = c(1-\hat{\rho}) + \alpha(y_{t-1} - \hat{\rho} y_{t-2}) + \beta(z_t - \hat{\rho} z_{t-1}) + u_t - \hat{\rho} u_{t-1}. \tag{3.6}$$

(3.6) 式を書き直すと、

$$Y_t = b + \alpha Y_{t-1} + \beta Z_t + \epsilon_t. \tag{3.7}$$

ここで、 $Y_t = y_t - \hat{\rho} y_{t-1}$, $Z_t = z_t - \hat{\rho} z_{t-1}$, $\epsilon_t = u_t - \hat{\rho} u_{t-1}$. $T \to \infty$ の時、 $\hat{\rho} \xrightarrow{p} \rho$ なので、$u_t - \hat{\rho} u_{t-1} \xrightarrow{p} u_t - \rho u_{t-1} = \epsilon_t$.

このようにモデル５－３を (3.7) 式の形に変形できた。このような変形によって調整した後の誤差項からは自己相関が除去されるので、調整後の (3.7) 式はモデル５－１に帰着させられる。したがって、モデル５－３において、OLS残差 $\hat{\epsilon}_t$ に基づく検定統計量

$$sup_{0 \le r \le 1} |X(r)|$$

の分布はモデル５－１の場合と同じになるであろうと推論 (Conjecture) される。

3．2　Cojectureのシミュレーションによる検証

このConjectureを検証するために、Matlabでシミュレーションを行ってみたら、以下に示すようにある程度conjectureを裏付ける結果が得られた。しかし、十分に漸近的な一致が得られたとはいえない。その原因として、前節で用いた近似法の精度が低いという可能性が考えられる。今後さらに近似の正当性に関する理論的検討が必要ある。

まず、始めにシミュレーションによって検定の臨界値をチェックした。
$W_0(r) = B(r) - rB(1)$, $W_0(r)$ の分布はStandard Brownian Bridgeである。Ploberger and Krämer（1992）（P.K.）の論文によって、$sup|W_0(r)|$ の分布の95％点は1.358である。本論文のシミュレーションによって求めた値は1.34で、ほぼ一致している。

次にシミュレーションによって以下のような比較を行った。

（1）調整前のモデル5－3で、$X_2(r) = \frac{T^{-1/2}}{\hat{\sigma}} \sum_{t=1}^{[Tr]} \hat{u}_t$, $u_t \sim iidN(0, \frac{1}{1-\rho})$, $u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t$, $\rho = 0.8$, $\rho = 0.2$ でグラフを描く。

（2）調整後のモデル5－3で、$X_2(r) = \frac{T^{-1/2}}{\hat{\sigma}} \sum_{t=1}^{[Tr]} \hat{\epsilon}_t$, $\epsilon_t \sim iidN(0, \sigma_\epsilon^2)$, $\rho = 0.8$ でグラフを描いてみて、それを調整前のモデル5－3と比較する。

シミュレーションの結果は次のようである。

図3.1はStandard Brownian Bridgeの最大値の絶対値の分布を示している。ここで繰り返し回数はT=1000である。

図3.2はρ=0.8、ρ=0.2、繰り返し回数T=1000の調整前のモデル5－3のXrの最大値の分布と、Standard Brownian Bridgeの最大値の絶対値の分布（'BB'で記す）の三つのグラフを比較したものである。ρが大きくなると、XrとBBとの差が大きくなることが分かる。

図3.3はρ=0.8、繰り返し回数T=3000、モデル5－3の調整前と、調整後のグラフ、およびStandard Brownian Bridgeの最大値の絶対値の分布の三つのグラフを重ねて比較したものである。調整後のモデルは調整前のモデルよりStandard Brownian Bridgeの最大値の絶対値の分布に接近し、効果が良いことが分かる。

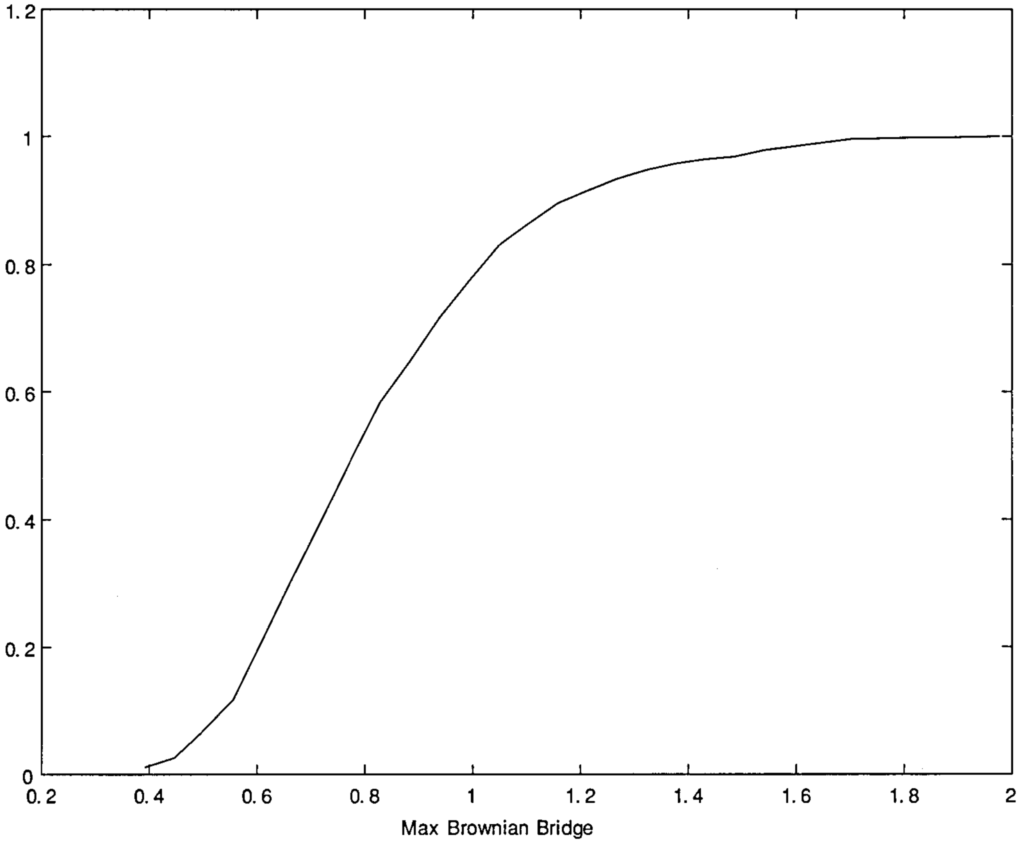

図３.１　Standard Brownian Bridgeの最大値の絶対値の分布

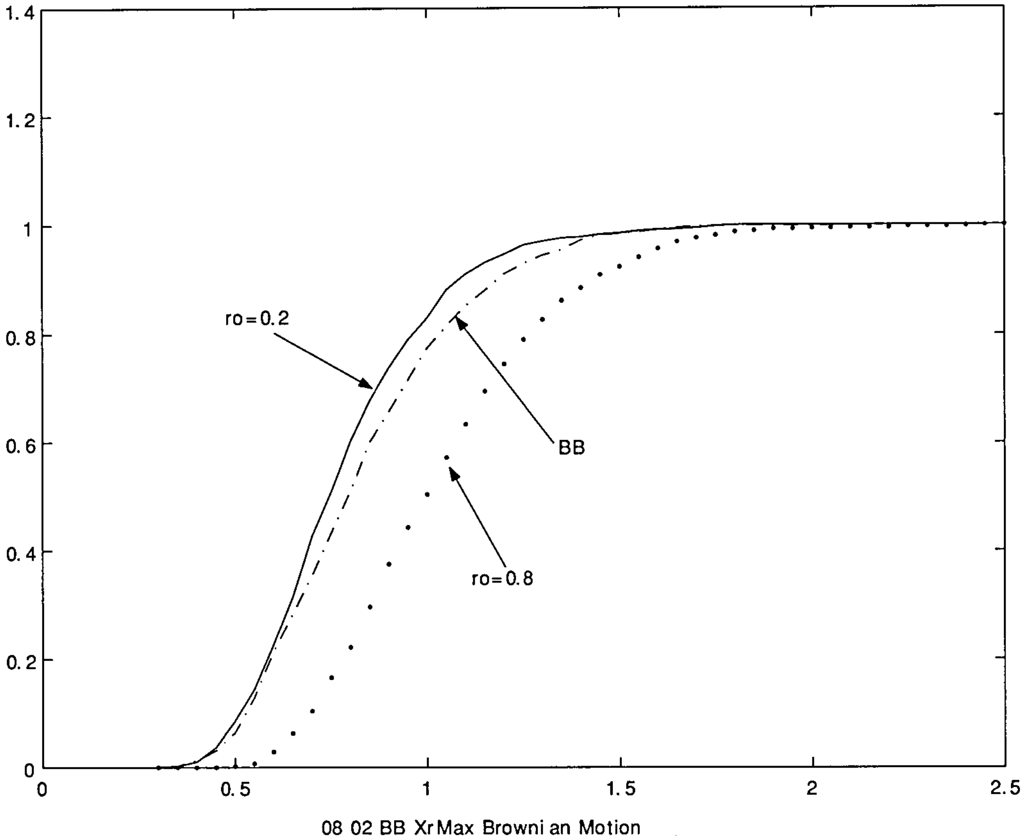
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
ro=0.2
BB
ro=0.8
08 02 BB XrMax Browni an Motion

図3.2　ρの影響

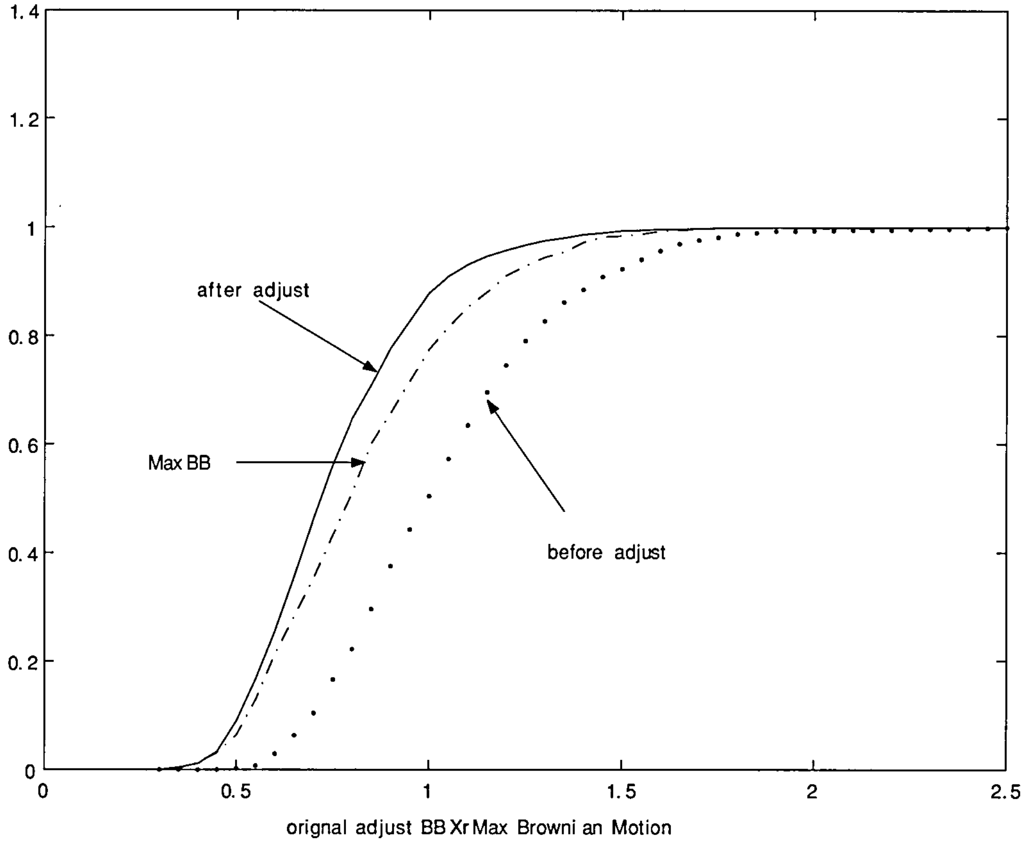

図３．３　調整効果

MaxBB：Standard Brownian Bridgeの最大値の絶対値の分布；
before adjust：モデル５－３；
after adjust：調整後のモデル５－３。

4・終わりに

この論文で、計量経済分析によく現われる代表的な定常・非定常時系列モデルのOLS残差に基づくCUSUM X(r)を考察した。そして、特に本論文において定数項を含む定常なAR(1)モデルにおけるX(r)の漸近分布が標準Brownain Bridgeの最大値の分布に従うことを理論的に証明した。さらに共和分回帰モデルのOLS残差に基づくCUSUMテストを検討し、共和分関係を含むモデルでは、X(r)は漸近的にBrownian Motionに従うことを理論とシミュレーションの両面から示した。

References

1. J. H. Wright, 1993, The CUSUM test based on least squares residuals in regressions with integrated variables, *Economics Letters* 41, 353-358.
2. B. E. Hansen, 1992, Tests for Parameter Instability in Regressions With I (1) Peocesses, *Journal of Business & Economic Statistics* 10, NO.3.
3. K. Hao, and B. Inder, 1996, Diagnostic test for structure change in cointegrated regression models, *Economics Letters* 50,179-187.
4. J. D. Hamilton, 1994, *Time Series Analysis*
5. Z. L. He, and K. Maekawa, 2003, Asymptotic properties of the estimator of the long-run coeffcient in a dynamic model with the integrated refressors and seri-ally correlated errors, *The jouranl of Japanese Economic Association* 54, No.4.
6. K. Maekawa, 1993, Estimation in dynamic regression with an integrated process, *Joural of statistical plannaing and inference.*
7. Z. J. Xiao, and Peter C. B. Phillips, 2002, A CUSUM test for cointegration using regression residuals, *Journal of Econometrics* 108,43-61.
8. Philip A. Shively, 2001, A test of long-run purchasing power parity, *Economics Letters* 73, 201-205.
9. Inclán, C. and Tiao, G. C. 1994, Use of cumulative sums of squares for retro-spective detection of changes of variances, *J. Amer. Statist. Assoc.* 89, 913-923.
10. Lee, S., Ha, J., Na, O. and Na, S. 2003, The Cusum test for Parameter Change in Time Series Models, To appear in *Scand. J. Statist.*
11. Page, E. S. 1995, A test for change in a parameter occurring at an unknown point. *Biometrika* 42, 523-527.
12. McCabe, B. P. M. and M. J. Harrison, 1980, Testing the constancy of regression relationships of over time using least squares residuals. *Journal of the Royal Statistical Society Series* C 29, 142-148.
13. Ploberger, W. and W. Krämer, 992, The CUSUM test with OLS residuals, *Econometrica* 60, 271-285.
14. Picard, D. 1985, Testing and estimating change-points in time series. *Adv. Appl. Prob.* 17,841-867.
15. Wichern, D. W., Miller, R. B. and Hsu, D. A. 1976, Changes of variance in first-order autoregressive time series models with an application. *Appl. Statist.* 25, 248-256.
16. Zacks, S. 1983, Survey of classical and Bayesian approaches to the change point problem : fixed sample and sequential procedures of testing and estimation, in *Recent Advances in Statistics,* M. H. Rivzi et al. eds. 245-269, Academic Press, NewYork.

17. W. Enders, 1995, Applied Econometric Time Series.
18. Quantitative Micro Software, 2000, Eviews 4 User's Guide.
19. 川崎能典、1992,「Johansenの共和分検定について」、『日本銀行金融研究所金融研究11』, NO. 2 .
20. 松浦克己、C. MaKenzie, 2001,『EViews による計量経済分析』東洋経済新報社。
21. 箕谷千凰彦、1998、『計量経済学』東洋経済新報社。
22. 田中勝人、1998、『計量経済学』岩波書店。
23. 伊藤元重、2002、『ゼミナール　国際経済入門』日本経済新聞社。
24. P.R. クルグマン、M. オブズフェルド共著、石井菜穂子訳、1990、『国際経済：理論と政策』東京新世社。