3. 物体の速度と物質波の速度

－ $\boldsymbol{E = h\nu}$ の本質の理解 －

物体の速度と物質波の速度

―$E = h\nu$ の本質の理解―

§0 はじめに

$E = h\nu$ と聞くと光のエネルギーと振動数を結びつける式であると思うのが普通ではないだろうか。この式は，通常，物理化学の教科書の分光学の章に登場し，「Planck-Einstein の式」あるいは「Planck の関係」という名前で呼ばれている。つまり，ほとんどの場合，光を対象とする式として書かれている(ようである)。Planck の名が付くのは，Planck が黒体輻射の理論式において導入した $h\nu$ というエネルギー“量子”の概念がその後の物理学を決定付けたことによる影響が大きい。しかし，この式は光に対してだけ適用される式ではなく，あらゆる物質(波)に対して適用しうる非常に重要な一般式ということを忘れてはならない。de Broglie が提案した物質波(波長：$\lambda = h/p$)は，物体の運動にともなう波動であり，前期量子論の Bohr の原子模型の理論的弱点を克服し，電子による回折現象を予測した画期的な概念であるが，その物質波の概念と $E = h\nu$ を同時に議論している教科書があまりにも少ないために，$E = h\nu$ の本質的な意味が示されないまま，単に光のエネルギーを表す式と認識されていることが多いのではないかと思える。あるいは $E = h\nu$ と $\lambda = h/p$ が同時に扱われたとしても，光への適用のみが示され，$E = h\nu$ を物体(粒子)の運動と結びつけることはほとんど行われていないようである。de Broglie の式を光に適用すると，$p = h/\lambda = h\nu/c$ となり，光の運動量が $h\nu/c$ であることが簡単に導き出せる。しかし，この式が(運動量) = (エネルギー/速度)という形を取っていることを物体(粒子)の運動に適用して，$E = (1/2)mv^2$ を代入すると $p = (1/2)mv$ になってしまい，おなじみの $p = mv$ と一致しないという問題が生じることに(初学者は)混乱する(筆者も昔，混乱した)。

光のもつ粒子と波動の二重性の理論を展開し，光子の運動量が $h\nu/c$ であることを導出したのは Einstein であるという事実からすれば，$E = h\nu$ は物体の運動の波動性を表す de Broglie の式 $\lambda = h/p$ と合わせて，「Einstein-de Broglie の式」と呼ばれるべきものである[1]。しかし，いつからか Einstein の名が落ちて「de Broglie の式」と呼ばれるようになったために，$E = h\nu$ と同時に解説されることがなくなったのではないだろうか。いずれにしても，$E = h\nu$ と $h/p = \lambda$ はそれぞれの左辺が粒子性，右辺が波動性を表している式として同時に扱われるべきものであり，前者を光の式，後者を物質波の式，というように区別してしまうことは避けるべきである。以下では，物体の運動を表現する根本式としての $E = h\nu$ と $\lambda = h/p$ の意味を考えてみる。

§1 物体の速度と物質波の速度の混乱

Einstein-de Broglie の式は，

[1] 事実，物理学辞典編集委員会編「物理学辞典」(培風館，1989年，初版第3刷 (第1刷は1986年))ではこの呼び名で掲載されている。

$$E = h\nu \tag{1}$$

と

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{2}$$

である。これらの式による議論にありがちな誤解例を以下に示す。

波の速度は(高等学校の教科書にも出ているように)

$$\upsilon = \nu\lambda \tag{3}$$

で与えられる。これに，式(1)と式(2)から得られるνとλを代入すると，

$$\upsilon = \nu\lambda = \frac{E}{h}\frac{h}{p} = \frac{E}{p} \tag{4}$$

となる。一方, 質量mの物体(粒子)が真空中を運動量pで運動しているときのエネルギーは,

$$E = \frac{p^2}{2m} \tag{5}$$

で与えられる。式(5)を式(4)に代入すると，

$$\upsilon = \frac{E}{p} = \frac{p^2}{2mp} = \frac{p}{2m} \tag{6}$$

となるが，これは力学でなじみ深い式$p = m\upsilon$つまり$\upsilon = p/m$に一致しない。同様に，運動エネルギーの式$E = (1/2)m\upsilon^2$と運動量の式$p = m\upsilon$を式(4)に代入すると，

$$\upsilon = \frac{1}{2}\frac{m\upsilon^2}{m\upsilon} = \frac{\upsilon}{2} \tag{7}$$

となり，これまた不自然な(不可解な)状態になってしまう。この議論のどこがおかしいのかを以下で考えてみよう。

§2 物体の運動速度と物質波の速度の相違点

光については,

$$E = h\nu = \hbar\omega \tag{8}$$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi}\frac{2\pi}{\lambda} = \hbar k \tag{9}$$

が成り立つ。ここで，$\omega = 2\pi\nu$は角振動数，$k = 2\pi/\lambda$は波数ベクトルの大きさである。式(4)に式(8), (9)を代入すると，

$$\upsilon = \frac{E}{p} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{\omega}{k} = 2\pi\nu\frac{\lambda}{2\pi} = \nu\lambda \tag{10}$$

となり，真空中では光の速度は波長によらず一定であるから，式(10)は常に一定値となり，ω

と k の比(ν と λ の積)が一定に保たれている。言い換えれば，常に $\omega = vk$ (v：一定)である。ところが，この議論を物質波に適用しようとすると，式(6)や式(7)で見たように，“通常の”力学の式とは矛盾する式が出てきてしまうから，この問題を解決しなくてはならない。つまり，式(4)で表される速度 v と通常の力学での速度 v の違いを明らかにする必要がある[式(7)の左辺と右辺の v の意味の相違という言い方もできる]。

式(4)で示した速度は，波の速度，つまり，波の同位相の点が進行する速度であり，正確には「位相速度(phase velocity)」と呼ばれるものである。この意味で添字 $_{\mathrm{p}}$ を付けると，式(4)は，

$$\boxed{v_{\mathrm{p}} = \frac{E}{p}} \tag{11}$$

と書ける。波は1周期あたりに1波長分進行するから，位相速度が波長と振動数の積で与えられること[式(4)]は当然のことである。となると，式(7)で生じた矛盾は，「物体の速度」と「物質波の速度(位相速度)」が異なるということが原因であることになる。では， $p = mv$ や $E = (1/2)mv^2$ という式に現れる物体の速度 v とは一体どういう速度なのであろうか。

ここで，真空中(自由空間中)での de Broglie 波を考えてみる。言い換えると，真空中(自由空間)を伝わる物質波である。外力がない場合の Hamiltonian の固有関数 $\psi(\boldsymbol{r})$ は，次の Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\boldsymbol{r}) = E\psi(\boldsymbol{r}) \tag{12}$$

を満たす。平面波を表す関数 $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$ はこの方程式の解(つまり固有関数)であるから，

$$\nabla e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \equiv \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = i\boldsymbol{k}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} \tag{13}$$

の関係を利用すれば，固有値 E が

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{14}$$

であることがわかる。ここで， $E = \hbar\omega$ であるから，

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{15}$$

となり，

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \tag{16}$$

が成立する。 ω と k の関係が得られたので，「群速度(group velocity)」の定義

$$\boxed{v_{\mathrm{g}} \equiv \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}} \tag{17}$$

に代入すると，

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{\hbar k}{m} \tag{18}$$

が得られる。運動量演算子($\hat{p} = -i\hbar\nabla$)を固有関数 $\psi(\boldsymbol{r}) = e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$ に作用させると，

$$\hat{p}\psi(\boldsymbol{r}) = -i\hbar\nabla\psi(\boldsymbol{r}) = -i\hbar\nabla e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = \hbar\boldsymbol{k}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})} = \hbar\boldsymbol{k}\psi(\boldsymbol{r}) \tag{19}$$

より運動量固有値が $\hbar k$ であることがわかる。そこで，式(18)に $\hbar k = p$ を代入して

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{p}{m} = \frac{mv}{m} = v \tag{20}$$

を得る。以上より， $p = mv$ や $E = (1/2)mv^2$ という式に現れた<u>物体の速度 v は物質波の位相速度ではなく群速度に等しい</u>ことがわかる。つまり，矛盾があると思われた式(7)も，

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\frac{mv_{\mathrm{g}}^2}{mv_{\mathrm{g}}} = \frac{v_{\mathrm{g}}}{2} \tag{21}$$

と書けば矛盾はなく，また，式(6)も，

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{p}{2m} \tag{22}$$

とすれば問題がないのである。従って， $E = h\nu$ という式は「ある物体(粒子)の運動を波動(de Broglie 波)としてとらえるとき，その波動の振動数と Planck 定数の積でその物体の運動エネルギーが得られる」ということを示しているのである。式的には,

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv_{\mathrm{g}}} \to \nu = \frac{v_{\mathrm{p}}}{\lambda} \to E = h\nu} \tag{23}$$

というつながりになる。ここで注意すべきことは以下の2点である。

・de Broglie 波長と結びつく物体の運動速度は群速度である。
・de Broglie 波長と物質波の振動数を結びつける速度は，物体自身の運動速度(＝群速度)ではなく，物質波の位相速度である。

運動する物体の de Broglie 波長

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv_{\mathrm{g}}} \tag{24}$$

と式(21)を式(23)の中辺に代入すると，

$$\nu = \frac{v_\mathrm{g}}{2}\frac{mv_\mathrm{g}}{h} = \frac{1}{2}\frac{mv_\mathrm{g}^2}{h} \tag{25}$$

となり，これより，力学の常識ともいえる

$$E = h\nu = \frac{1}{2}mv_\mathrm{g}^2 \tag{26}$$

が成立することがわかる。

式(11)は，波の位相速度として常に成立する式であり，例えば，平面波 $e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ の位相速度 v_p は，

$$v_\mathrm{p} = \frac{\omega}{k} \tag{27}$$

で与えられるが，これは同時に

$$v_\mathrm{p} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} \tag{28}$$

と書けるから，確かに式(11)が成立している。一方，式(17)で定義した群速度の式を少し変形すれば，

$$v_\mathrm{g} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}(\hbar\omega)}{\mathrm{d}(\hbar k)} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p} \tag{29}$$

となるから，位相速度の式(11)に対応する表記として，群速度を

$$\boxed{v_\mathrm{g} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}} \tag{30}$$

と書くことができる(位相速度の式(27)と群速度の式(17)の対応と同じ関係である)。

§3 群速度の直観的理解[2]

まず，x 方向に進行する2つの波を考える。2つの波の波数ベクトルの大きさ[3]の平均値を k, 角振動数の平均値を ω とし，それぞれの波の波数ベクトルと角振動数が平均値から Δk および $\Delta\omega$ だけずれている状況を考える。このとき，2つの波は次の2式で表される。

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sin[(k+\Delta k)x - (\omega+\Delta\omega)t] \\ \psi_2 &= \sin[(k-\Delta k)x - (\omega-\Delta\omega)t]\end{aligned} \tag{31}$$

ただし，波数ベクトルと角振動数のずれは平均値に比べて非常に小さく，$k >> \Delta k$，$\omega >> \Delta\omega$

2 本節は E. Hecht, *Optics*, 3rd ed., Addison Wesley, Reading, 1998. 第7章，7.2.2節「Group Velocity」を参考にしている。

3 以下で波数ベクトル k と記した場合，k は波数ベクトルの大きさを意味する。

であるとする。この2つの波が重なって進行するとき，全体の波の振幅は，三角関数の公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \tag{32}$$

より[4],

$$\psi_1 + \psi_2 = 2\sin(kx - \omega t)\cos(\Delta kx - \Delta\omega t) \tag{33}$$

と表される。構成員である2つの波はいずれも振幅が1の波であるが，重なり合ってできた波

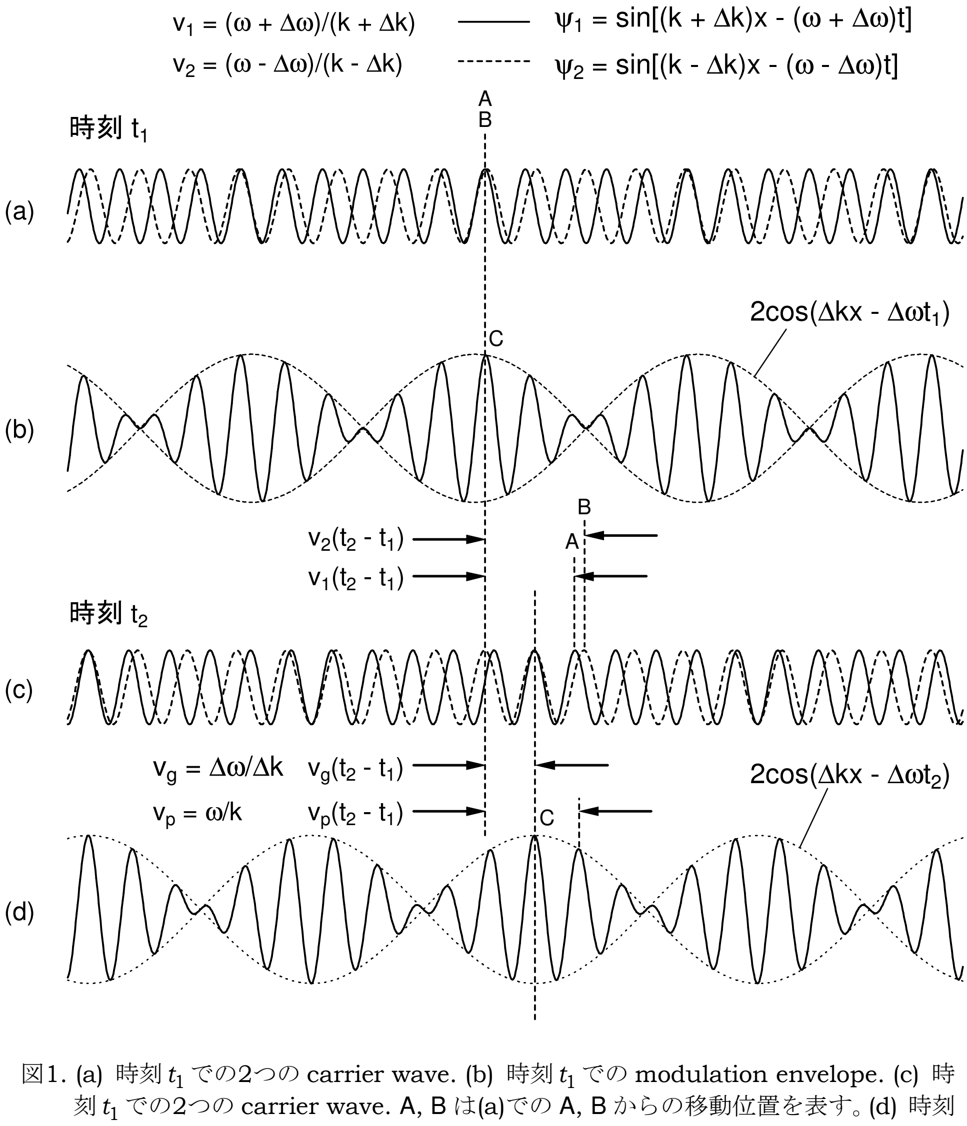

図1. (a) 時刻 t_1 での2つの carrier wave. (b) 時刻 t_1 での modulation envelope. (c) 時刻 t_1 での2つの carrier wave. A, B は(a)での A, B からの移動位置を表す。(d) 時刻 t_1 での modulation envelope. C は(b)での C からの移動位置を表す。
(E. Hecht, *Optics*, 3rd ed., Addison Wesley, Reading, 1998, p.298, Fig. 7.15を参考に作成。)

[4] これを「sin たす sin は2sincos＝にしんのこ(＝鰊の子)」と語呂合わせで覚えたりする。出典：安富龍平「試験にでる数学公式集」(青春新書，1974年，第40刷 (第1刷は1972年))。

は，振幅が時間とともに変化する波，つまり modulated wave であり，$2\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)$ で表される振幅の中に $\sin(kx - \omega t)$ で変化する波が埋め込まれたものになる(図1参照)。このとき，$\sin(kx - \omega t)$ を carrier wave，$2\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)$ を modulation envelope と呼ぶ。構成波それぞれの速度は，

$$v_1 = \frac{\omega + \Delta\omega}{k + \Delta k}, \qquad v_2 = \frac{\omega - \Delta\omega}{k - \Delta k} \tag{34}$$

であるが，carrier wave はその式から明らかなように，平均波数 k と平均角速度 ω により与えられる速度 ω/k で進行し，この速度が位相速度 v_p である。

$$v_\mathrm{p} = \frac{\omega}{k} \tag{35}$$

一方の modulation envelope が進行する速度 $\Delta\omega/\Delta k$ が群速度

$$v_\mathrm{g} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \tag{36}$$

である。当然のことながら，両者は常に一致するとは限らないし，大小関係も条件に依存し一義的には決まらない。例えば，図1の例では，時刻 t_1 に同じ位置[図1(a)の A, B]にある2つの carrier wave は，時刻 t_2 には図1(c)の A, B の位置まで移動するが，時刻 t_1 に図1(a)の A, B と同じ位置にある図1(b)の modulation envelope の C は，時刻 t_2 には図1(d)の C の位置までしか進んでいない。従って，この例の場合は $v_\mathrm{g} < v_\mathrm{p}$ の関係にある。
角振動数と波数のばらつきが十分小さい場合には，v_g は[式(36)で $\Delta k \to 0$ として]

$$v_\mathrm{g} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{37}$$

により定義される。

$$\omega = k v_\mathrm{p} \tag{38}$$

であるから，これを式(37)に代入すると，

$$v_\mathrm{g} = v_\mathrm{p} + k\frac{\mathrm{d}v_\mathrm{p}}{\mathrm{d}k} \tag{39}$$

が得られる。もし，$(\mathrm{d}v_\mathrm{p}/\mathrm{d}k) = 0$ であれば，$v_\mathrm{g} = v_\mathrm{p}$ となるので群速度が位相速度に等しくなる。こういう場合を“分散がない”と表現する。言い換えると，波数(同時に波長)が変わっても位相速度が変わらない場合には，群速度は位相速度に等しくなるのである[5]。真空中の光は，波長によらず速度が一定であり，群速度と位相速度が等しい。従って，

$$v_1\left(= \frac{\omega + \Delta\omega}{k + \Delta k}\right) = v_2\left(= \frac{\omega - \Delta\omega}{k - \Delta k}\right) = v_\mathrm{p} = v_\mathrm{g} = c \tag{40}$$

が成立する。先に議論した真空中(自由空間中)での物体の運動に関して，$v_\mathrm{g} \neq v_\mathrm{p}$ ($v_\mathrm{g} = 2v_\mathrm{p}$)

[5] “分散”という言葉は，物質中の光の速度が波長によって異なることにもとづいて，プリズムなどで光を分けることができる事実に由来している。

であるから真空中でも分散があることになる。
　媒体中の光については，屈折率をnとすると，

$$v_{\mathrm{p}} = \frac{c}{n} \tag{41}$$

であるから，式(41)を式(39)に代入して，

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{g}} &= \frac{c}{n} - \frac{kc}{n^2}\frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{d}k} \\ &= v_{\mathrm{p}}\left(1 - \frac{k}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}k}\right) \end{aligned} \tag{42}$$

を得る。通常の媒体による分散では，波長が短い(波数が大きい)ほど屈折率が大きいから(正常分散)$\mathrm{d}n/\mathrm{d}k > 0$であり$v_{\mathrm{g}} < v_{\mathrm{p}}$となる(図1の場合がこれに該当する)。単色ではない光が媒体中を進行する際に，群速度で定義される屈折率として次式で与えられる群屈折率(group index)がある。

$$n_{\mathrm{g}} = \frac{c}{v_{\mathrm{g}}} \tag{43}$$

$k = 2\pi/\lambda$より

$$\mathrm{d}k = -\frac{2\pi}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda \tag{44}$$

であるから，式(42)は

$$v_{\mathrm{g}} = v_{\mathrm{p}}\left(1 - \frac{k}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}k}\right) = v_{\mathrm{p}}\left(1 + \frac{1}{n}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda^2}{2\pi}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right) = v_{\mathrm{p}}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right) \tag{45}$$

と変形でき，通常の(位相速度に基づく)屈折率と群屈折率の関係として，

$$n_{\mathrm{g}} = \frac{c}{v_{\mathrm{g}}} = \frac{c}{v_{\mathrm{p}}\left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)} = \frac{n}{1 + \frac{\lambda}{n}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}} \tag{46}$$

が得られる。成書によっては，群屈折率を

$$n_{\mathrm{g}} = n - \lambda_0\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0} \tag{47}$$

と記しているものがあるが(λ_0は真空中の波長)，これは，次のように導出される。
　群速度の定義式

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \tag{48}$$

を，

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{c}{\lambda_0} \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda_0^2}\mathrm{d}\lambda_0 \tag{49}$$

および

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}k = -\frac{2\pi}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda = -\frac{2\pi n^2}{\lambda_0^2}\mathrm{d}\lambda \tag{50}$$

から得られる $\mathrm{d}\omega$, $\mathrm{d}k$ を用いて変形すると(真空中の波長λ_0と媒質中の波長λの間の関係$\lambda = \lambda_0/n$を用いた),

$$v_\mathrm{g} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c}{n^2}\frac{\mathrm{d}\lambda_0}{\mathrm{d}\lambda} \tag{51}$$

となる。群屈折率は式(43)で定義されるから,

$$n_\mathrm{g} = \frac{c}{v_\mathrm{g}} = n^2\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda_0} \tag{52}$$

と表すことができ，$\lambda = \lambda_0/n$ から得られる

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\lambda_0} = \frac{n - \lambda_0(\mathrm{d}n/\mathrm{d}\lambda_0)}{n^2} \tag{53}$$

を式(52)に代入すれば式(47)となる。

最後に，原稿をお読みいただき，貴重な御助言をいただいた片山郁文 氏に深く感謝いたします。

物体の速度と物質波の速度

2000年　6月 20日　初版第1刷
2004年　2月 15日　第2版第2刷
2006年　9月 30日　第3版第1刷
2015年 10月　4日　第4版第4刷

著者　山﨑 勝義
発行　漁火書店　　検印 山﨑

印刷　ブルーコピー
製本　ホッチキス