負の余りを利用した倍数の見分け方

広島大学附属東雲中学校数学科

広島大学共同研究プロジェクト

Version 4

はじめに

この教材は，負の整数と文字式を学習した中学 1 年生が自学できることを前提に書かれています．たくさんの練習問題があり，簡単なものから，結構，時間のかかるものまであります．（レベルが少し高い問題には，♠ 印がついています.）多くの問題には簡単な解答をつけてありますが，まずは頭や手を動かして自分で考えることが大切です．

♡

今年は 2005 年です．さて，2005 は何の倍数でしょうか．もちろん，5 の倍数です．いいかえれば，5 を約数にもちます．5 でわり切れるといっても同じことです．$2005 \div 5 = 401$，つまり，$401 \times 5 = 2005$ ですから，401 の倍数であることもわかります．それでは，2005 は他にどんな整数の倍数でしょうか．答えは，このテキストの最後に書いておきます．

♡♡

この教材では，倍数に焦点をあてて，教科書には書かれていない数学を探求します．小学校入学以来（あるいはそれ以前から）慣れ親しんでいる $0, 1, 2, 3, \cdots$ という整数だけを題材にして，楽しい数学ができあがる様子を味わってください．

目次

1. 9 の倍数

9 の倍数とは，9 に整数をかけて得られる整数のことです．

$$\boxed{9\text{ の倍数とは，}9 \times (\text{整数})}$$

たとえば，$-27, -18, -9, 0, 9, 18, 27, 36, 45$ などです．文字式を使って，

$$\boxed{9n \quad (\text{ただし，}n\text{ は整数})}$$

という形で表すこともできました．（小学校では正の倍数 9, 18, 27, 36, $\cdots$ しか考えませんでしたけれど.）9 の倍数とは，9 でわり切れる整数といっても同じです．

整数が 9 の倍数かどうかであることに，符号は関係ありません．つまり，ある整数が 9 の倍数ならば，符号をかえたものも 9 の倍数です．ある整数が 9 の倍数でないならば，符号をかえたものも 9 の倍数ではありません．よって，以下では正の整数だけを考えます．

それでは何か整数を一つ心に浮かべてください．あなたの考えている整数が 9 の倍数かどうか，すぐにわかりますか．この単元では，9 の倍数のおもしろい見分け方を紹介します．

♡

まずは，9 の倍数を作るウォーミングアップから始めましょう．

問題 1 一の位がそれぞれ $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ であるような，二桁の 9 の倍数をいってください．（ノートに書く必要はありません．声に出していってください．）

次の問題は少しだけ難しいかもしれません．

問題 2 二桁の数を何か決めてください．そして，それを下二桁とする三桁の 9 の倍数をみつけてください．

問題 3 問題 1 と 2 から，気がついたことをいってください．

♡♡

対象とする整数に対して，各桁に登場する数をすべてたすという操作（この操作に，あなたが好きな名前をつけてください！）を行います．たとえば，

$$513 \to 5 + 1 + 3 = 9$$
$$52074 \to 5 + 2 + 0 + 7 + 4 = 18$$

となります．

整数 n に対して，上の操作で得られる整数を $A(n)$ と書くことにします．（なぜ文字 A を使用することにしたのか考えてください．）上の例を書き直せば，

$$A(513) = 9, \quad A(52074) = 18$$

と表すことができます．なお，一桁の整数 n に対しては，$A(n) = n$ となります．

上の問題でみたように，513 も 52074 も 9 の倍数でした．そして，$A(513)$ も $A(52074)$ も 9 の倍数です．これは偶然でしょうか．つまり，「**整数 n が 9 の倍数ならば，$A(n)$ も 9 の倍数**」なのでしょうか．

正解を述べる前に，別の整数 107 と 2301 を考えてみましょう．

$$A(107) = 1 + 0 + 7 = 8, \quad A(2301) = 2 + 3 + 0 + 1 = 6$$

となります．107 も 2301 も 9 でわり切れませんから，9 の倍数ではなく，そして $A(107)$ も $A(2301)$ も 9 の倍数ではありません．つまり，「**整数 n が 9 の倍数でなければ，$A(n)$ も 9 の倍数でない**」と推理できます．

♡♡♡

まずは具体例で考えてみます．52074 を使います．

$$52074 = 10000 \times 5 + 1000 \times 2 + 100 \times 0 + 10 \times 7 + 4$$

と書き直せます．さらに無理やり

$$52074 = (9999 + 1) \times 5 + (999 + 1) \times 2 + (99 + 1) \times 0 + (9 + 1) \times 7 + 4$$

と直します．分配法則を使い，たす順序をかえて，

$$52074 = (9999 \times 5 + 999 \times 2 + 99 \times 0 + 9 \times 7) + (5 + 2 + 0 + 7 + 4)$$

とします．これをよくみると

$$52074 = (9 \text{ の倍数}) + A(52074)$$

の形をしていることがわかります．今，$A(52074) = 18$ であり，18 は 9 の倍数なので，52074 も 9 の倍数であることがわかりました．（上の説明の中で，9 の倍数と 9 の倍数の和が 9 の倍数であることを，どこで使ったでしょうか.）

いよいよ，文字式を使って説明します．整数 n が何桁であろうと同じなので，ここでは六桁で説明します．上の位から順に各位の数を a, b, c, d, e, f とします．すると，

$$n = 100000a + 10000b + 1000c + 100d + 10e + f$$

と表せます．これを先ほどの 52074 のときと同じように

$$\begin{aligned} n &= (99999+1)a + (9999+1)b + (999+1)c + (99+1)d + (9+1)e + f \\ &= (99999a + 9999b + 999c + 99d + 9e) + (a+b+c+d+e+f) \\ &= (99999a + 9999b + 999c + 99d + 9e) + A(n) \end{aligned}$$

と書き直します．こうして，$A(n)$ が 9 の倍数であれば，n も 9 の倍数であるし，$A(n)$ が 9 の倍数でなければ，n もまた 9 の倍数ではないことがわかります．さらに，$A(n)$ を 9 でわったときの余りと，n を 9 でわったときの余りが等しいこともわかります．

これまでのことをまとめておきます．

9 の倍数の見分け方

$A(n)$ が 9 の倍数ならば，n は 9 の倍数．

$A(n)$ が 9 の倍数でないならば，n も 9 の倍数ではない．

さっそく，この判定法を使ってみましょう．

問題 4 次の指令を，整数を変えて 3 回実行してください.

1. 三桁の整数 n を決めてください.
2. $A(n)$ を計算してください.
3. n と $A(n)$ をそれぞれ 9 でわったときの余りを求めてください.

また，9 の倍数を見分けるだけでなく，$A(n)$ には次の性質があることもわかりました.

$A(n)$ の性質

整数 n を 9 でわったときの余りは，$A(n)$ を 9 でわったときの余りに等しい.

問題 5 次の整数を 9 でわったときの余りを，声に出していってください.（できれば，暗算で求めてください.）

(1) 12　(2) 123　(3) 1234　(4) 12345　(5) 123456789

問題 6♠ 5 だけを並べてできる整数で，9 の倍数となるものを小さい順に 3 つ見つけてください.

♡♡♡♡

各位の数をたすという操作（あなたはどんな名前をつけましたか？）は，繰り返すことができるという性質をもっています．つまり，52074 に対して

$A(52074)=18$ でしたが，さらに，$A(18)=9$ と計算することができます．先ほど述べた 9 の倍数の判定法によれば，整数 n が 9 の倍数であるかどうかは $A(n)$ で決まるのですから，52074 が 9 の倍数かどうかは，$A(52074)$ が 9 の倍数になるかどうかで定まっています．$A(52074)=18$ なので，すぐに 9 の倍数だとわかってしまいますが，18 が 9 の倍数であるかどうかは，$A(18)$ をみてもわかるのです．まとめると，

$A(18)$ が 9 の倍数なので，18 は 9 の倍数.

$A(52074)$ が 9 の倍数なので，52074 は 9 の倍数.

たとえば，87887568788685576 を考えます．（あなたはこの数字を読めますか？）$A(87887568788685576)=117$，さらに $A(117)=9$ ですから，87887568788685576 が 9 の倍数であることを，一度のわり算も行わずに判定できます．もちろん，一桁の数のたし算も数が多くなると大変ですが，わり算をするよりは楽です.

問題 7 20 桁の整数を一つ決めて，わり算をせずに，その整数を 9 でわったときの余りを求めてください.

$\diamondsuit$

これまで説明してきたように，整数 n が 9 の倍数かどうかは，整数 $A(n)$ が 9 の倍数かどうかで決定されました．$A(n)$ という操作は，各位の数をたすものですから，次のことがわかります.

9 の倍数から逃れられない！

整数 n が 9 の倍数ならば，各位の数を入れ替えても，いつも 9 の倍数になる．

たとえば，何度も登場した 52074 ですが，これは 9 の倍数なので，数字の順序をいれかえた 25074 や 47025 など（もとの 52074 もふくめて，ちょうど 120 個の整数を作れます．気になる人はすべて書いてみましょう．)，すべて 9 の倍数になってしまうのです．これは，2，4，5 の倍数などには見られないおもしろい性質です．

有名なトリビアですが，日本の AM ラジオ局の周波数はすべて 9 の倍数になっています．（1978 年までは 10 の倍数でしたが，混信の緩和と設置局数増加のため，変更されました．）NHK 広島第一 1071 キロヘルツ，中国放送 1350 キロヘルツ，山陽放送 1494 キロヘルツですが，わり算をしなくても暗算で，9 の倍数であることがわかります．

◇◇

9 の倍数は 3 の倍数ですが，逆は必ずしも正しくありません．たとえば，15 は 3 の倍数ですが 9 の倍数ではありません．しかし，3 の倍数の見分け方は，9 の倍数の見分け方とまったく同じになるのです．

3 の倍数の見分け方

$A(n)$ が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数であり，$A(n)$ が 3 の倍数でないならば，n も 3 の倍数ではない．

その理由を考えることは宿題とします．（9 の倍数のときの説明を，少しだけ修正すればできます．）

2.　2 つの整数の和・差・積

問題 8　9 でわったときの余りが 4 と 3 になる 2 つの整数 m，n に対して，それらの和 $m+n$ を 9 でわったときの余りはいくらになるでしょうか．

答えは，余りの和 $4+3$ に等しく，7 になります．

文字式を使って説明しましょう．m と n について，整数 a, b を用いて

$$m = 9a + 4$$
$$n = 9b + 3$$

と表すことができます．よって，

$$\begin{aligned} m + n &= (9a+4) + (9b+3) \\ &= (9a+9b) + (4+3) \\ &= 9(a+b) + (4+3) \end{aligned}$$

となり，和 $m+n$ を 9 でわったときの余りは，7 になります．

荒っぽくいえば，「**余りの和が余り**」ということになります．何が荒っぽいかというと，余りの和がわる数以上になったときは，その和に対して改めて余りを計算しなければならないからです．ですが，本質的にはこのスローガンが的確に表しているのです．

問題 9 9 でわったときの余りが 4 と 7 になる 2 つの整数 m，n に対して，それらの和 $m+n$ を 9 でわったときの余りはいくらになるでしょうか.

問題 10 **問題**8 の整数 m，n に対して，それらの差 $m-n$ を 9 でわったときの余りはいくらになるでしょうか.「余りの差が余り」となるでしょうか.

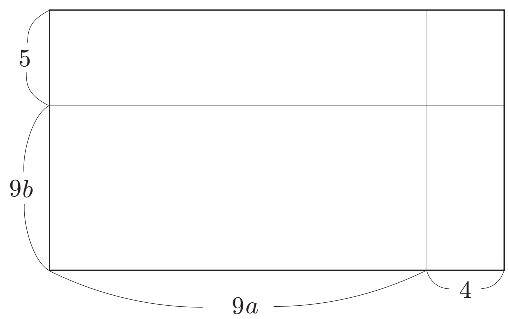
♡

それでは，次の問題を考えましょう.

問題 11 9 でわったときの余りが 4 と 5 になる 2 つの整数 m，n に対して，それらの積 mn を 9 でわったときの余りはいくらになるでしょうか.具体的に m と n の値を決めて，何度か実験し，予想を立ててください.

文字式を使って仕組みを解明しましょう．先ほどと同様に，m と n を整数 a, b を用いて

$$m = 9a + 4$$
$$n = 9b + 5$$



と表すことができます．従って，分配法則を使って書き直すと

$$\begin{aligned} mn &= (9a+4)(9b+5) = (9a+4)\times 9b + (9a+4)\times 5 \\ &= (9a+4)\times 9b + 9a\times 5 + 4\times 5 \\ &= (9 \text{ の倍数}) + 4\times 5 \end{aligned}$$

となっていることがわかります．つまり，mn を 9 でわったときの余りは，$4 \times 5 = 20$ を 9 でわったときの余り 2 に等しくなります．

同じようにして，次のことを確かめることができます．

2 つの整数の積について

2 つの整数 m と n を 9 でわったときの余りがそれぞれ r，s ならば，積 mn を 9 でわったときの余りは，積 rs を 9 でわったときの余りに等しい．

問題 12 わる数を変えるとどうなるかを考えてください．

こちらも荒っぽくいえば，「**余りの積が余り**」ということなのです．もちろん，和のときと同じく，余りの積がわる数以上になるときは，さらに余りを計算しなければなりません．

問題 13 三桁の整数を 2 つ決めて，それらの積を 9 でわったときの余りを求めてください．ただし，わり算を一度もしてはいけないことにします．

問題 14 $2005 \times 2006 \times 2007$ を 9 でわったときの余りを求めてください．

問題 15 14^{14} を 13 でわったときの余りを求めてください．

問題 16 $10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 + 10^6 + 10^7 + 10^8 + 10^9$ を 9 でわったときの余りを求めてください．

問題 17 問題 13 から 16 を参考にして，余りを求める問題を作ってください．

3. 負の余り

小学校では 0 以上の整数しか考えませんでしたが，中学校に入って負の整数を学習しました．わり算の余りというのは，「余り」というぐらいですから，0 以上の整数だったのですが（ちなみに，「余りなし」ということと，「余り 0」ということは同じことです），ここでは画期的なアイデアを紹介します．あえて，負の整数をわり算の余りとして考えるというものです．

問題15 に似ていますが，次の問題を考えましょう．

問題 18 13^{13} を 14 でわったときの余りはいくらでしょうか．

問題15 と同じように考えてみます．13 を 14 でわったときの余りは 13 なので，結局，13^{13} を計算しなければならなくなります．実際，$13^{13} = 302875106592253$（読み方がわかりますか？）となり，14 でわると商は 21633936185160，余りは 13 であることがわかります．（やってみてください！）

実は，こんな大変な計算をしなくても，余りが 13 になることを見破ることができます．

まず，15 を 14 でわったとき，商は 1，余りは 1 ですから，

$$15 = 14 \times 1 + 1$$

と表すことができます．同様に，30 を 14 でわったとき，商は 2，余りは 2 で

すから,

$$30 = 14 \times 2 + 2$$

と表すことができます．それでは，27 について考えましょう．

$$27 = 14 \times 1 + 13$$

ですから，もちろん余りは 13 です．ここで，わざと

$$27 = 14 \times 2 - 1$$

と書き換えれば,「**余りは$-\mathbf{1}$**」と解釈することもできます．もちろん，負の数ですから，余っているのではなく，むしろ不足していることになりますが,「余り」という概念を拡大解釈しようという提案なのです．そんなことをしても何のメリットがないならば，話をややこしくしているだけになるのですが，この拡大解釈が**問題**18 の解決を一瞬で与えてくれます！

13 を 14 でわったときの余りは -1 であり,「余りの積が余り」であって，$(-1)^{13} = -1$ だから，13^{13} を 14 でわったときの余りは -1，つまり 13 である．

問題 19 次の整数を，9 でわったときの余りを声に出していってください．ただし，普通の意味の余りと負の余りの両方を答えてください．

(1) 35　(2) 43　(3) 78　(4) 65　(5) 97

問題 20 $8^{2005} + 1$ は 9 の倍数でしょうか.

♡

それでは，負の余りを利用すると驚くほど明解に解ける問題をやってみましょう.

問題 21 $12^{2005}+27^{2006}$ を 13 でわったときの余りはいくらでしょうか.

問題 22 $24^{101}+53^{101}$ を 77 でわったときの余りはいくらでしょうか.

問題 23 $1^{999}+2^{999}+\cdots+998^{999}$ は 999 の倍数でしょうか.

問題 24♠ $2^{30}+3^{30}$ を 13 でわったときの余りはいくらでしょうか.

4. 11 の倍数

負の余りを利用すると，11 の倍数のおもしろい見分け方を述べることができます.

11 の倍数の見分け方

整数 n について，各位の数を交互にたしひきした値が 11 の倍数であるならば，n は 11 の倍数であり，各位の数を交互にたしひきした値が 11 の倍数でないならば，n も 11 の倍数ではない.

わかりにくいので，例で説明します．967834582 を考えます.

$$9-6+7-8+3-4+5-8+2=0$$

なので，967834582 は 11 の倍数であるといっているのです．実際,

$$967834582 = 11 \times 87984962$$

ですから，確かに 11 の倍数です.

$$\heartsuit$$

それでは，11 の倍数の見分け方の仕組みを説明しましょう．ポイントは，10 を 11 でわったときの余りが -1 であるということです．従って，100 を 11 でわったときの余りは 1 になります．わり算をしなくても，$100 = 10^2$ ですから，$(-1)^2 = 1$ ということからわかります．同様にして，1000 を 11 でわったときの余りは -1，10000 を 11 でわったときの余りは 1，という風に，1 と -1 が交互に出ることがわかります.

整数 n を仮に五桁とし，各位の数を上から順に a, b, c, d, e とします．つまり,

$$n = 10000 \times a + 1000 \times b + 100 \times c + 10 \times d + e$$

です．これは

$$n = 10^4 \times a + 10^3 \times b + 10^2 \times c + 10 \times d + e$$

と書くこともできます.

まず,「余りの積が余り」ということを思い出せば，$10^4 \times a$ を 11 でわったときの余りは，10^4 と a のそれぞれを 11 でわったときの余りの積になります．よって，それは a を 11 でわったときの余りに等しくなります.

次に，$10^3 \times b$ を 11 でわったときの余りは，10^3 と b のそれぞれを 11 でわったときの余りの積になるので，今度は $-b$ を 11 でわったときの余りに等しくなります.

これを続けて，結局，n を 11 でわったときの余りは，「余りの和が余り」，「余りの差が余り」というスローガンを思い出せば，

$$a-b+c-d+e$$

を 11 でわったときの余りに等しいことになります．つまり，$a-b+c-d+e$ が 11 の倍数であれば，n も 11 の倍数であり，$a-b+c-d+e$ が 11 の倍数でなければ，n も 11 の倍数にならないことがわかりました．以上の説明は，n が五桁でなくとも同様に行うことができます．

問題 25 整数 n が六桁のとき，上と同様の説明をしてください．

問題 26 112233445566778899 は，11 の倍数でしょうか．わり算をすることなく，見極めてください．

問題 27 123456789987654321 は，11 の倍数でしょうか．

♡♡

11 の倍数かどうかだけを見分けるのであれば，これでよいのですが，11 でわったときの余りを求める場合には，少し注意が必要です．奇数桁の整数に対しては，上の位から順に $+$，$-$，$\cdots$ と符号をつけて計算した結果得られるものともとの整数は，11 でわったときの余りが一致します．しかし，偶数桁の場合は，上の位から順に，$-$，$+$，$\cdots$ と符号をつけて計算しなければなりません．もっとも，常に下の位から始めることにすれば，$+$，$-$，$\cdots$ の順序でいつでも計算することができます．ただ，私たちは整数を上の位から書き始めますので，

下の位から符号をわり振ることには心理的な抵抗を感じるかもしれません.

問題 28 奇数桁の整数と偶数桁の整数をそれぞれ一つ決めて，11 でわったときの余りをそれぞれ求めてください.

問題 29♠ 奇数桁の整数を一つ決めてください.（一桁ではおもしろくありません.）数字の並びを逆にしたものと，もとの数との差を計算すると，99 でわり切れることを確かめてください．そして，その理由を考えてください.

5. 発展

最後に発展的な話題として，負の余りを利用した 7 の倍数の見分け方を考えましょう．鍵となるのは，1000 を 7 でわったときの余りが -1 であるということです.

7 の倍数の見分け方

整数 n が 7 の倍数であるのは，**下から**三桁ごとに区切って得られる数を，交互にたしひきした値が 7 の倍数であるときに限る.

理由を説明する前に，わかりにくいので，具体例を 3 つあげます.

例 1 255241 を考えます．下から三桁ごとに区切ると，255 と 241 ができます．交互にたしひきして，

$$255 - 241 = 14$$

これはもちろん 7 の倍数ですから，255241 も 7 の倍数であることがわかります．実際，$255241 = 7 \times 36463$ となっています．

例 2 次は，45936891 です．下から三桁ごとに区切ると，45，936，891 となります．交互にたしひきして，

$$45 - 936 + 891 = 0$$

となり，0 は 7 の倍数ですから，45936891 は 7 の倍数です．実際，$45936891 = 7 \times 6562413$ です．

例 3 最後に, 3241029400644 を考えます．下から三桁ごとに区切ると, 3, 241, 29，400，644 となります．

$$3 - 241 + 29 - 400 + 644 = 35$$

となり，3241029400644 は 7 の倍数であることがわかりました．

問題 30$^\spadesuit$ 0 から 9 までの数字をすべて一度ずつ使って，10 桁の 7 の倍数を作ってください．

$\heartsuit$

それでは，7 の倍数の見分け方のメカニズムを説明しましょう．ポイントは 1000 を 7 でわったときの余りが -1 であるということなのです．つまり，10^3 を 7 でわったときの余りが -1 なので，10^6，10^9，10^{12}，10^{15}，$\cdots$ を 7 でわったときの余りは，$1, -1, 1, -1, \cdots$ となります．

もし，整数 n を下から三桁ごとに区切ったときに，順に a, b, c, d, e という

高々三桁の整数が得られたとすると,

$$n = 10^{12} \times a + 10^9 \times b + 10^6 \times c + 10^3 \times d + e$$

と表すことができます．あとは，11 の倍数の見分け方の仕組みと同様で,

$$a - b + c - d + e$$

を 7 でわったときの余りと，n を 7 でわったときの余りが等しくなることがわかります.

♡♡

13 の倍数の見分け方は，7 の倍数の見分け方とまったく同じになります.

問題 31 その理由を説明してください.

問題 32♠ そのほかに，7 の倍数の見分け方とまったく同じ方法で，倍数を見分けられる整数を 3 つ見つけてください.

♡♡♡

11 の倍数を見分けるときは，一桁ごとに区切って，交互にたしひきしました. 7 や 13 の倍数を見分けるときは，下から三桁ごとに区切って交互にたしひきしました.

問題 33♠ 下から二桁ごとに区切って，交互にたしひきするという見分け方ができる整数をさがしてください.

♡♡♡♡

負の余りを利用するわけではありませんが，7 の倍数の見分け方と 9 の倍数の見分け方を混合したような方法で，37 の倍数を見分けることができます．

37 の倍数の見分け方

整数 n が 37 の倍数であるのは，下から三桁ごとに区切って得られる数を，すべてたした値が 37 の倍数であるときに限る．

問題 34 370750101 は 37 の倍数でしょうか．

♢

ここまでくれば，次のことを見破るのはやさしいと思います．

73 の倍数の見分け方

整数 n が 73 の倍数であるのは，下から四桁ごとに区切って得られる数を，交互にたしひきしてえられる整数が 73 の倍数であるときに限る．

問題 35 その理由を説明してください．

★

2 や 5 の倍数かどうかは，一の位だけをみて判定できました．4 の倍数かどうかは，下二桁だけをみて判定できます．6 の倍数は，2 でも 3 でもわり切れることから，2 の倍数の見分け方と 3 の倍数の見分け方を組み合わせることで判定できます．また，8 の倍数は下三桁をみて判定することができます．三桁ま

での整数については，8 の倍数であれば，2 で三回わり算できないといけないことから，簡単に見分けることができます.

一方，次のように統一的に判定法を考えることもできます。四桁の整数が 7 の倍数かどうかを判定する場合,

$$1000a + 100b + 10c + d = 7(142a + 14b + c) + 6a + 2b + 3c + d$$

と変形すれば，結局，$6a + 2b + 3c + d$ が 7 の倍数かどうかを判定すればいいことになります。ここに出てくる係数 $1, 3, 2, 6$（d, c, b, a の順にみて）は，実はわり算 $1 \div 7$ を，0 を付けたしながら続けていったときの余りになっています. そして，七桁以上の整数であれば，$1, 3, 2, 6, 4, 5$ が循環して係数として登場し，負の余りを利用して，$1, 3, 2, -1, -3, -2$ とすれば，計算もずいぶん楽になります。この方法は，このテキストで紹介した 9 の倍数の判定方法と同じ考え方になっています．9 の倍数の場合は，わり算 $1 \div 9$ を，0 を付けたしながら続けていったときの余りが $1, 1, 1, \cdots$ となって，1 が続くので，各位の数の和によって 9 の倍数かどうかを判定できます．2 の倍数の場合は，わり算 $1 \div 2$ の余りが $1, 0, 0, \cdots$ となり，結局，一の位の数のみでの判定となります。同様に，4 の倍数の場合は，$1, 2, 0, 0, \cdots$ となり下二桁を見ればよいことがわかります。

このテキストで学習してきたように，整数を分解して，その一部だけをみたり，分解して得られた整数をたしたりひいたりして倍数の判定をすることは，このテキストで扱わなかった他の整数についてもまだまだ考えることができます．たとえば，17 の倍数は，下から八桁ごとに区切って得られる数を交互にたしひきして判定できます.（その理由を考えてみてください.）従って，1234567812345678 が 17 の倍数であることは，計算しなくても一瞬で見破ることができます.

6. 問題の解答

問題1. 90,81,72,63,54,45,36,27,18,99.
問題2. 略.
問題3. 下一桁あるいは下二桁をどんな数にしても，9 の倍数が作れてしまうことに気がつきましたか.
問題4. 略.
問題5. (1) 3 (2) 6 (3) 1 (4) 6 (5) 0
問題6. 5 を 9 個，18 個，27 個並べた数.
問題7. 略.
問題8. 本文中に書いてある.
問題9. 2.
問題10. 1.
問題11. 略.
問題12. 略.
問題13. 略.
問題14. 0.
問題15. 1.
問題16. 0.
問題17. 略
問題18. 本文中に書いてある.
問題19. 負の余りだけ書くと, (1) -1 (2) -2 (3) -3 (4) -7 (5) -2.
問題20. はい，そうです.
問題21. 0.
問題22. 0.
問題23. はい，そうです.
問題24. 0.
問題25. 略.
問題26. $1-1+2-2+3-3+4-4+5-5+6-6+7-7+8-8+9-9=0$ より.
問題27. 略.
問題28. 略.
問題29. 略.
問題30. 9876543201 など.
問題31. 1000 を 13 でわったときの余りが -1.
問題32. $11, 77, 91, 143$ の 4 つしかない.
問題33. 101.
問題34. はい.
問題35. 10000 を 73 でわったときの余りが -1 だから.
はじめの問題の解答. 2005 の約数は, $1, 5, 401, 2005$ のみ.

参考文献

[1] D. フォーミン, S. ゲンキン, I. イテンベルク（志賀浩二, 田中紀子訳）「数学のひろば−柔らかい思考を育てる問題集 I」, 岩波書店, 1998 年.

[2] D. フォーミン, S. ゲンキン, I. イテンベルク（志賀浩二, 田中紀子訳）「数学のひろば−柔らかい思考を育てる問題集 II」, 岩波書店, 1998 年.

[3] L. ラーソン（秋山仁, 飯田博和訳）「数学発想ゼミナール　」, シュプリンガーフェアラーク東京, 2003 年.

[4] 遠山啓「数学の広場 (第 2 巻, 数のふしぎ)」, ほるぷ出版, 1986 年, 179–208.