平成17年度修士論文

弾性体と液体を伝わる波の方程式に関する一考察

指導教員：川下美潮 助教授
M042650　塩川 英

1 Introduction

本論文では $\mathbf{R}^3_- = \{x \in \mathbf{R}^3 \,;\, x_3 < 0\}$ で弾性体, $\mathbf{R}^3_+ = \{x \in \mathbf{R}^3 \,;\, x_3 > 0\}$ で液体としたときの波の伝播について考察する. 弾性体の変位を $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ で表し, 液体の速度ポテンシャルを $w(x,t)$ で表すと方程式は以下のようになる.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\rho_0^-} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(u) \qquad (i = 1,2,3) & \text{in} \quad \mathbf{R}^3_- \times \mathbf{R}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \Delta w = 0 & \text{in} \quad \mathbf{R}^3_+ \times \mathbf{R}, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x_3} & \text{on} \quad \partial\mathbf{R}^3_+ \times \mathbf{R}, \\ \begin{pmatrix} \sigma_{31}(u) \\ \sigma_{32}(u) \\ \sigma_{33}(u) \end{pmatrix} = \rho_0^+ \dfrac{\partial w}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{on} \quad \partial\mathbf{R}^3_+ \times \mathbf{R}, \\ u(x,0) = f^{(1)}(x) & \text{in} \quad \mathbf{R}^3_-, \\ u_t(x,0) = f^{(2)}(x) & \text{in} \quad \mathbf{R}^3_-, \\ w(x,0) = f^{(3)}(x) & \text{in} \quad \mathbf{R}^3_+, \\ w_t(x,0) = f^{(4)}(x) & \text{in} \quad \mathbf{R}^3_+. \end{cases}$$

ただし $\sigma_{ij}(u) = \lambda(\nabla \cdot u)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(u)$ は応力テンソル, $\varepsilon_{ij}(u) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ はひずみテンソルであり $c > 0$ は液体の種類によって定まる定数である. $\rho_0^- > 0$ は弾性体の密度, $\rho_0^+ > 0$ は液体の平衡状態の密度 , λ と μ は Lamè 定数を表し, ここでは安定性条件 $\lambda + (2/3)\mu > 0, \mu > 0$ をみたすものとする. この方程式の導出に関してはセクション 2 を参照.

この方程式をスペクトル解析を用いて考察する. 波の伝播を表す方程式をスペクトル解析を用いて考察した論文としては Shimizu[4],Wilcox[5] などがある. [5] では $\{x \in \mathbf{R}^n \,;\, 0 < x_n < h\}$ と $\{x \in \mathbf{R}^n \,;\, h < x_n\}$ の二層の液体を伝わる波の方程式についてのスペクトル解析について考察されている. [5] において作用素 A は

$$Au = -c^2(x_n)\rho(x_n)\nabla \cdot (\frac{1}{\rho(x_n)}\nabla u)$$

と定義されている. ただし $c(x_n), \rho(x_n)$ は, 正定数 c_1, c_2, ρ_1, ρ_2 に対し

$$c(x_n) = \begin{cases} c_1 & (0 < x_n < h) \\ c_2 & (h < x_n) \end{cases}$$

$$\rho(x_n) = \begin{cases} \rho_1 & (0 < x_n < h) \\ \rho_2 & (h < x_n) \end{cases}$$

である. この作用素に対し, その自己共役性を示し, 一般化された固有関数の構成やスペクトル解析について議論されている. [4] では $\mathbf{R}^3_-$ と $\mathbf{R}^3_+$ の 2 層の弾性体を伝わる波の伝播の方程式について [5] と同様の議論を行っている.

しかし, この論文で扱う方程式では u と v で値域が異なっているためにこの形のまま作用素を定義するのは困難である. そこで散乱理論でよく用いられる system 化を導入した. $\boldsymbol{v}(t) = (u(\cdot,t), u_t(\cdot,t), w(\cdot,t), w_t(\cdot,t))^t$ とおいて system 化を行うと方程式は

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c^2\Delta & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}(t) \tag{1.1}$$

となる. ここで M は $[Mu]_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\rho_0^-}\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(u) \quad (i = 1, 2, 3)$ となるようにとった. 井川 [6] ではまず波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \quad ((x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) \tag{1.2}$$

の解の存在と一意性を用いて (1.1) と同様な発展方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u(x,t) \\ u_t(x,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(x,t) \\ u_t(x,t) \end{pmatrix}$$

を定義した. この発展方程式をエネルギーの空間で考えた. この手法でユニタリー作用素 $U(t)$ を (1.2) の初期値を $u(x,0) = f_1(x),\ u_t(x,0) = f_2(x)$ としたとき

$$U(t)f = (u(x,t), u_t(x,t))^t$$

で定義した. この $U(t)$ の性質から Stone の定理を適用することによって A が自己共役であることを示した. 本論文では, [6] と異なり最初に (1.1) を考察するための Hilbert 空間 H を具体的な形で与える. 次に (1.1) を H 上の発展方程式とみるために作用素 $A : H \to H$ を定義し, スペクトル解析を行う上で非常に重要な役割を持つ作用素の自己共役性についてみ

ていく. このような論法は Shibata and Soga[3] で弾性体のみの場合について行われている.[3] と本論文は Hilbert 空間 H に関しては類似性があるが作用素 A については大きく異なっている.

2 方程式の導出

弾性体を伝わる波は変位を $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ によって表すと

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\rho_0^-} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(u) \qquad (i = 1, 2, 3) \\
&\sigma_{ij}(u) = \lambda(\nabla \cdot u)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(u) \\
&\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)
\end{aligned}
$$

で記述される. ここで $\sigma_{ij}(u)$ は応力テンソル, $\varepsilon_{ij}(u)$ はひずみテンソルと呼ばれる. $\rho_0^- > 0$ は弾性体の密度, λ と μ は Lamè 定数を表し, ここでは次の安定性条件

$$
\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0,\ \mu > 0 \tag{2.1}
$$

をみたすものとする. 方程式の導出に関しては [7]§8.3 参照.

次に液体を伝わる波を表す方程式の導出を行う. 速度を $v = (v_1, v_2, v_3)$, 密度を $\rho^+ > 0$, 圧力を $p^+ > 0$ で表すことにする. すると, Euler の運動方程式より

$$
\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho^+}\operatorname{grad} p^+, \tag{2.2}
$$

連続の方程式より

$$
\frac{\partial \rho^+}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho^+ v) = 0 \tag{2.3}
$$

が成立. さらに液体の運動が断熱的であるとすると密度 ρ^+ と圧力を p^+ の間に関数関係がある:

$$
p^+ = f(\rho^+).
$$

ここで液体の微小振動を考える. つまり, 速度 v は十分小さいとする. また, 液体の平衡状態の密度を ρ_0^+ , 圧力は 0 とし,

$$
\rho^+ = \rho_0^+ + \tilde{\rho}^+ ,\ p^+ = \tilde{p}^+
$$

とおく. すると $\tilde{\rho}^+$, $\tilde{p}^+$ も微小量とみなせる. 従って上の (2.1),(2.2) は

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0^+}\mathrm{grad}\,\tilde{p}^+\,,\ \ \frac{1}{\rho_0^+}\frac{\partial \tilde{p}^+}{\partial t} = -f'(\rho_0^+)\mathrm{div}\,v \tag{2.4}$$

と近似される (詳しくは [7] の §6.1 参照). 渦なしの流れでは速度 v は速度ポテンシャル w を用いて

$$v = \mathrm{grad}\,w$$

と表すことができる. ここで圧力 $\tilde{p}^+$ は (2.4) の初めの方程式に注意すればポテンシャル w を用いて

$$\tilde{p}^+ = -\rho_0^+\frac{\partial w}{\partial t} \tag{2.5}$$

と表されることに注意しておく.(2.4) を整理すると以下の方程式を得る:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f'(\rho_0^+)\Delta w.$$

なお, 波動方程式の性質より波の伝播速度は $\sqrt{f'(\rho_0^+)}$ である. これを c とおく.

$\mathbf{R}^3_- = \{x \in \mathbf{R}^3\,;\,x_3 < 0\}$ で弾性体, $\mathbf{R}^3_+ = \{x \in \mathbf{R}^3\,;\,x_3 > 0\}$ で液体としたときの波の伝播について満たすべき条件を考えていく.

まず $x_3 = 0$ 上での接合条件を調べていく. x_3 成分の速度の釣り合いから

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x_3}$$

とならなければならない. 次に $x_3 = 0$ 平面上にかかる圧力の釣り合いについてみていく. 下側 (弾性体側) からの圧力は応力テンソルの意味より

$$(\sigma_{31}(u), \sigma_{32}(u), \sigma_{33}(u))$$

で与えられる. 第 1 成分と第 2 成分は液体ではずれ応力が働かないことから $x_3 = 0$ 上 0 でなくてはならない. 第 3 成分は (2.5) とあわせ

$$\sigma_{33}(u) = \rho_0^+\frac{\partial w}{\partial t} \quad \text{on } x_3 = 0 \tag{2.6}$$

をえる. これより弾性体と液体を伝わる波の方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{\rho_0^-} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}(u) \qquad (i = 1, 2, 3) & \text{in} \quad \mathbf{R}^3_- \times \mathbf{R}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 & \text{in} \quad \mathbf{R}^3_+ \times \mathbf{R}, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x_3} & \text{on} \quad \partial \mathbf{R}^3_+ \times \mathbf{R}, \\ \begin{pmatrix} \sigma_{31}(u) \\ \sigma_{32}(u) \\ \sigma_{33}(u) \end{pmatrix} = \rho_0^+ \dfrac{\partial w}{\partial t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{on} \quad \partial \mathbf{R}^3_+ \times \mathbf{R}, \\ u(x, 0) = f^{(1)}(x) & \text{in} \quad \mathbf{R}^3_-, \\ u_t(x, 0) = f^{(2)}(x) & \text{in} \quad \mathbf{R}^3_-, \\ w(x, 0) = f^{(3)}(x) & \text{in} \quad \mathbf{R}^3_+, \\ w_t(x, 0) = f^{(4)}(x) & \text{in} \quad \mathbf{R}^3_+. \end{cases}$$

と表される.

簡単のために以下を定義する.

$$Mu = \frac{1}{\rho_0^-} \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu \Big(\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} \Big) & (\lambda + \mu) \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & (\lambda + \mu) \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \\ (\lambda + \mu) \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \mu \Big(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} \Big) & (\lambda + \mu) \dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \\ (\lambda + \mu) \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} & (\lambda + \mu) \dfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} & (\lambda + 2\mu) \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \mu \Big(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

とおく. 次に

$$M_{11} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{22} = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

$$M_{23}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\lambda\\0&\mu&0\end{pmatrix}, M_{33}=\begin{pmatrix}\mu&0&0\\0&\mu&0\\0&0&\lambda+2\mu\end{pmatrix},$$
$$M_{21}=M_{12}^t, M_{31}=M_{13}^t, M_{32}=M_{23}^t$$

とおくと,

$$Mu=\frac{1}{\rho_0^-}\sum_{i,j=1}^{3}M_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$$

がわかる. さらに M_{ij} の (p,q) 成分を a_{ipjq} とかく. これは弾性テンソルと呼ばれるものである. このとき

$$a_{ipjq}=a_{pijq}=a_{jqip}\quad (i,j,p,q=1,2,3) \tag{2.7}$$

をみたすことがわかる. すると方程式は

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-Mu=0 & \text{in}\quad \mathbf{R}_-^3\times\mathbf{R}\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-c^2\Delta w=0 & \text{in}\quad \mathbf{R}_+^3\times\mathbf{R}\\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t}=\dfrac{\partial w}{\partial x_3} & \text{on}\quad \partial\mathbf{R}_+^3\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3}M_{3j}\frac{\partial u}{\partial x_j}=\rho_0^+\frac{\partial w}{\partial t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} & \text{on}\quad \partial\mathbf{R}_+^3\\ u(x,0)=f^{(1)}(x) & \text{in}\quad \mathbf{R}_-^3\\ u_t(x,0)=f^{(2)}(x) & \text{in}\quad \mathbf{R}_-^3\\ w(x,0)=f^{(3)}(x) & \text{in}\quad \mathbf{R}_+^3\\ w_t(x,0)=f^{(4)}(x) & \text{in}\quad \mathbf{R}_+^3\end{cases}$$

と書ける.

3 Hilbert 空間 H

$m\geq 1$ に対して以下の空間を定義する.

$$\dot{H}^m(\mathbf{R}_-^3,\mathbf{C}^3)=\Big\{u\in H_{loc}^m(\mathbf{R}_-^3,\mathbf{C}^3)\,;\,\text{任意の } 1\leq|\alpha|\leq m \text{ に対して}$$
$$\partial_x^\alpha u\in L^2(\mathbf{R}_-^3,\mathbf{C}^3),\ \lim_{R\to\infty}R^{-2}\int_{R\leq|x|\leq 2R,x_3<0}|u(x)|^2dx=0\Big\}.$$

さらに以下を定義する. ここで $\cdot$ は $\mathbf{C}^3$ の標準内積とする.

$$
\begin{aligned}
(u,v)_{m,\mathbf{R}^3_-} &= \sum_{1\le|\alpha|\le m}\int_{\mathbf{R}^3_-}\partial_x^\alpha u(x)\cdot\partial_x^\alpha v(x)dx,\\
|u|^2_{m,\mathbf{R}^3_-} &= (u,u)_{m,\mathbf{R}^3_-},\\
\langle u,v\rangle_{1,\mathbf{R}^3_-} &= \sum_{i,j=1}^3\int_{\mathbf{R}^3_-}M_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i}dx=\int_{\mathbf{R}^3_-}\sum_{i,j,p,q=1}^3 a_{ipjq}\frac{\partial u_q}{\partial x_j}\frac{\partial\overline{v_p}}{\partial x_i}dx.
\end{aligned}
$$

定理 3.1 $\dot{H}^m(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)$ は $(\cdot,\cdot)_{m,\mathbf{R}^3_-}$ を内積とする *Hilbert* 空間となる. さらに, $C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_-},\mathbf{C}^3)$ は $\dot{H}^m(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)$ で稠密.

この定理を証明するためにいくつかの補題を準備する. なお, この定理の証明は [3] の §1 を参考にした.

補題 3.2 任意の $u\in\dot{H}^m(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3), R>0$ に対して $C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_-},\mathbf{C}^3)$ の点列 $\{u_{k,R}\}_{k=1,2,\dots}$ が存在して

$$|u_{k,R}-u|_{m,\mathbf{R}^3_-}\to 0\quad (k\to\infty), \tag{3.1}$$

$$\|u_{k,R}-u\|_{L^2(B_R^-,\mathbf{C}^3)}\to 0\quad (k\to\infty) \tag{3.2}$$

とできる. ここで,

$$B_R^-=\{x\in\mathbf{R}^3_-\,;\,|x|<R\}$$

とする.

補題 3.3 任意の $u\in\dot{H}^1(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3), R>0$ に対して

$$\int_{|x|\ge R,x_3<0}|u(x)|^2|x|^{-2}dx\le 4\int_{|x|\ge R,x_3<0}|\partial_x^1 u(x)|^2dx$$

が成立する. ここで, $\partial_x^1 u=(\nabla_x u_1,\nabla_x u_2,\nabla_x u_3)$ である.

補題 3.4 $R>2$ に依存しない $C>0$ が存在して任意の $u\in\dot{H}^1(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3), R>2$ に対して

$$\|u\|_{L^2(B_R^-,\mathbf{C}^3)}\le CR\|\partial_x^1 u\|_{L^2(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)}$$

が成立する.

補題 3.2 の証明

まず $\chi \in C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_-})$ を

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \le 1 \\ 0 & |x| \ge 2 \end{cases}, 0 \le \chi(x) \le 1 \quad (\forall x \in \overline{\mathbf{R}^3_-})$$

をみたす関数とし, $\chi_r(x) = \chi(x/r)$ とおく.

任意に $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$ をとる. このとき, Leibniz の公式より $C > 0$ が存在して

$$|\chi_r(x)u(x) - u(x)|^2_{m,\mathbf{R}^3_-} \le C\Bigg(\sum_{1\le|\alpha+\beta|\le m, |\beta|\ge 1} \int_{\mathbf{R}^3_-} |\partial_x^\alpha(1-\chi_r(x))\partial_x^\beta u(x)|^2 dx + \sum_{1\le|\alpha|\le m} \int_{\mathbf{R}^3_-} |\partial_x^\alpha \chi_r(x) u(x)|^2 dx \Bigg) \tag{3.3}$$

とできる. $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$ の定義より $|\beta| \ne 1$ のとき

$$\partial_x^\beta u \in L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$$

であることと

$$1 - \chi_r(x) = 0 \, (|x| < r)$$

であることから $r \to \infty$ のとき (3.3) の右辺の第 1 項 $\to 0$ が従う. さらに $\alpha \ne 0$ ならば $\partial_x^\alpha \chi_r(x) = 0 \, (|x| < r, |x| > 2r)$ および $\partial_x^\alpha \chi_r(x) = (1/r)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha \chi(x/r)$ であることから

$$\begin{aligned} &(3.3) \text{ の右辺の第 2 項} \\ &= \sum_{1\le|\alpha|\le m} r^{-2|\alpha|} \int_{r\le|x|\le 2r, x_3<0} |\partial_x^\alpha \chi(x)|^2 |u(x)|^2 dx \\ &\le \sum_{1\le|\alpha|\le m} r^{-2|\alpha|} \sup_{r\le|x|\le 2r, x_3<0} |\partial_x^\alpha \chi(x)|^2 \int_{r\le|x|\le 2r, x_3<0} |u(x)|^2 dx \\ &\longrightarrow 0 \quad (r \to \infty) \end{aligned}$$

が従う. このことと $u \in H^m_{loc}(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$ であることをあわせると任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して $v_k \in H^m(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$ が存在して

$$|u - v_k|_{m,\mathbf{R}^3_-} \le \frac{1}{k}, v_k(x) = u(x) \; (x \in B_R^-)$$

とできる．$C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_-},\mathbf{C}^3)$ は $H^m(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)$ で稠密であることより $u_{k,R}\in C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_-},\mathbf{C}^3)$ が存在して $\|u_{k,R}-v_k\|_{H^m(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)}<1/k$ とできる．この $u_{k,R}$ に対して

$$\begin{aligned}|u_{k,R}-u|^2_{m,R^3_-} &= \sum_{1\le|\alpha|\le m}\|\partial_x^\alpha(u_{k,R}-u)\|^2_{L^2(R^3_-)}\\ &\le 2\sum_{1\le|\alpha|\le m}\left(\|\partial_x^\alpha(u_{k,R}-v_k)\|^2_{L^2(R^3_-)}+\|\partial_x^\alpha(v_k-u)\|^2_{L^2(R^3_-)}\right)\\ &< \frac{2}{k^2}\end{aligned}$$

となり (3.1) がわかった．

一方 $u=v_k\,(x\in B_R^-)$ であることから

$$\|u_{k,R}-u\|_{L^2(B_R^-)}=\|u_{k,R}-v_k\|_{L^2(B_R^-)}<\frac{1}{k}$$

となり (3.2) も従う． □

補題 3.3 の証明

まず以下を示す.

$$\begin{aligned}&\text{任意の}\phi\in C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_-},\mathbf{C}^3), R>0\text{ に対し}\\ &\int_{|x|>R,x_3<0}|\phi(x)|^2|x|^{-2}dx\le 4\int_{|x|\ge R,x_3<0}|\partial_x^1\phi(x)|^2dx \qquad (3.4)\end{aligned}$$

極座標 $r=|x|,\omega=\dfrac{x}{r}$ を使う.

$$-\int_r^\infty\frac{\partial}{\partial s}[|\phi(s\omega)|^2s^{-2}]ds=-[|\phi(s\omega)|^2s^{-2}]_r^\infty=|\phi(r\omega)|^2r^{-2}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_R^\infty|\phi(r\omega)|^2dr &= -\int_R^\infty\int_r^\infty\frac{\partial}{\partial s}[|\phi(s\omega)|^2s^{-2}]dsr^2dr\\ &= -\int_R^\infty r^2\int_r^\infty\frac{\partial}{\partial s}[|\phi(s\omega)|^2]s^{-2}-2|\phi(s\omega)|^2s^{-3}dsdr\\ &\le 2\int_R^\infty r^2\int_r^\infty\Big|\frac{\partial}{\partial s}\phi(s\omega)\Big||\phi(s\omega)|s^{-2}dsdr\\ &\quad +2\int_R^\infty r^2\int_r^\infty|\phi(s\omega)|^2s^{-3}dsdr \qquad (3.5)\end{aligned}$$

となり部分積分と連鎖律より

$$
\begin{aligned}
((3.5)\text{ の第 1 項}) =& -\frac{2R^3}{3}\int_R^\infty \Big|\frac{\partial}{\partial s}\phi(s\omega)\Big||\phi(s\omega)|s^{-2}ds \\
&+\frac{2}{3}\int_R^\infty \Big|\frac{\partial}{\partial r}\phi(r\omega)\Big||\phi(r\omega)|rdr \\
\leq& \frac{2}{3}\int_R^\infty \Big|\frac{\partial}{\partial r}\phi(r\omega)\Big||\phi(r\omega)|rdr \\
\leq& \frac{2}{3}\int_R^\infty |\partial_x^1\phi(r\omega)||\phi(r\omega)|rdr \\
\leq& \frac{2}{3}\Big\{\int_R^\infty |\partial_x^1\phi(r\omega)|^2r^2dr\Big\}^{1/2}\Big\{\int_R^\infty |\phi(r\omega)|^2dr\Big\}^{1/2}
\end{aligned}
$$

が従う. 一方, 部分積分より

$$
((3.5)\text{ の第 2 項}) \leq \frac{2}{3}\int_R^\infty |\phi(r\omega)|^2dr
$$

とできる. これらをあわせて

$$
\begin{aligned}
\int_R^\infty |\phi(r\omega)|^2dr \leq \frac{2}{3}\Big\{\int_R^\infty |\partial_x^1\phi(r\omega)|^2r^2dr\Big\}^{1/2}\Big\{\int_R^\infty |\phi(r\omega)|^2dr\Big\}^{1/2}& \\
+\frac{2}{3}\int_R^\infty |\phi(r\omega)|^2dr&
\end{aligned}
$$

となり, 不等式の変形より

$$
\int_R^\infty |\phi(r\omega)|^2dr \leq 4\int_R^\infty |\partial_x^1\phi(r\omega)|^2r^2dr
$$

をえる. ここで面積分の性質より

$$
\int_{|x|\geq R, x_3<0} |\phi(x)|^2|x|^{-2}dx = \int_R^\infty \Big\{\int_{S_-^2} |\phi(r\omega)|^2dS_\omega\Big\}dr.
$$

ただし, $S_-^2 = \{x \in \mathbf{R}_-^3\,;\,|x| = 1\}$ とし, dS_ω は面素を表す. これより (3.4) がわかる.

次に任意に $u \in \dot{H}^1(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)$, $R' > R$ をとる. このとき補題 3.2 によって $\in C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}_-^3}, \mathbf{C}^3)$ の列 $\{u_{k,R'}\}_{k=1,2,\ldots}$ が存在して

$$
|u_{k,R'} - u|_{1,\mathbf{R}_-^3} \to 0 \qquad (k \to \infty) \tag{3.6}
$$

$$
\|u_{k,R'} - u\|_{L^2(B_R^-,\mathbf{C}^3)} \to 0 \qquad (k \to \infty) \tag{3.7}
$$

となる. これより (3.4) を適用すると

$$\begin{aligned}
&\Big\{\int_{R\le|x|\le R',x_3<0}|u(x)|^2|x|^{-2}dx\Big\}^{1/2}\\
&\le\Big\{\int_{R\le|x|\le R',x_3<0}|u(x)-u_{k,R'}(x)|^2|x|^{-2}dx\Big\}^{1/2}\\
&\quad+\Big\{\int_{R\le|x|\le R',x_3<0}|u_{k,R'}(x)|^2|x|^{-2}dx\Big\}^{1/2}\\
&\le R^{-1}\|u_{k,R'}(x)-u(x)\|_{L^2(B^-_{R'})}+2\Big\{\int_{|x|\ge R,x_3<0}|\partial^1_x u_{k,R'}(x)|^2dx\Big\}^{1/2}\\
&\le R^{-1}\|u_{k,R'}(x)-u(x)\|_{L^2(B^-_{R})}+2|u_{k,R'}-u|_{1,\mathbf{R}^3_-}\\
&\qquad+2\Big\{\int_{R\le|x|,x_3<0}|\partial^1_x u(x)|^2dx\Big\}^{1/2}
\end{aligned}$$

となるので上の不等式において $k\to\infty$ とすると (3.6),(3.7) より

$$\int_{R\le|x|\le R',x_3<0}|u(x)|^2|x|^{-2}dx\le 4\int_{|x|\ge R,x_3<0}|\partial^1_x u(x)|^2dx$$

を得, R' は任意であったのでこれより補題が従う. □

補題 3.4 の証明

$G=\{x\in\mathbf{R}^3_-\ ;\ 1\le|x|\le 2\}$ とおく. まず次を認めて話を進める.

$$\begin{aligned}
&C_1>0\text{ が存在して任意の }u\in H^1(B^-_2,\mathbf{C}^3)\text{ に対し}\\
&\quad\|u\|_{L^2(B^-_2,\mathbf{C}^3)}\le C_1\{\|\partial^1_x u\|_{L^2(B^-_2,\mathbf{C}^{3\times3})}+\|u\|_{L^2(G,\mathbf{C}^3)}\}.
\end{aligned}\tag{3.8}$$

任意の $u\in\dot{H}^1(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)$, $R>2$ をとる. すると

$$\|u\|^2_{L^2(B^-_R,\mathbf{C}^3)}=\|u\|^2_{L^2(B^-_2,\mathbf{C}^3)}+\int_{2\le|x|\le R,x_3<0}|u(x)|^2dx\tag{3.9}$$

であり (3.8) を適用しそれぞれの積分範囲に注意して評価しさらに補題3.3を使うと

$$\begin{aligned}
(3.9)&\le 2C_1^2\Big\{\|\partial^1_x u\|^2_{L^2(B^-_2,\mathbf{C}^{3\times3})}+4\int_G|u(x)|^2|x|^{-2}dx\Big\}\\
&\qquad+R^2\int_{2\le|x|\le R,x_3<0}|u(x)|^2|x|^{-2}dx\\
&\le 2C_1^2\Big\{\|\partial^1_x u\|^2_{L^2(B^-_2,\mathbf{C}^{3\times3})}+16\int_{1\le|x|,x_3<0}|\partial^1_x u(x)|^2dx\Big\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 4R^2 \int_{2\le|x|,x_3<0} |\partial_x^1 u(x)|^2 dx \\
&= R^2\Big(\frac{34C_1^2}{R^2}+4\Big)\|\partial_x^1 u\|_{L^2(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^{3\times3})} \\
&\le R^2(34C_1^2+4)\|\partial_x^1 u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^{3\times3})}
\end{aligned}
$$

となる. これにより補題が示された.

次に (3.8) を証明する. (3.8) を否定すると $H^1(B_2^-,\mathbf{C}^3)$ の列 $\{u_k\}_{k=1,2,\dots}$ で

$$\|u_k\|_{L^2(B_2^-,\mathbf{C}^3)} = 1 \tag{3.10}$$

$$\|\partial_x^1 u_k\|_{L^2(B_2^-,\mathbf{C}^{3\times3})} + \|u_k\|_{L^2(G,\mathbf{C}^3)} < \frac{1}{k} \tag{3.11}$$

となるものがとれることがわかる. $\{u_k\}_{k=1,2,\dots}$ は明らかに $H^1(B_2^-,\mathbf{C}^3)$ の有界列. さらに B_2^- は有界領域であるので Rellich のコンパクト定理より $\{u_k\}_{k=1,2,\dots}$ は $L^2(B_2^-,\mathbf{C}^3)$ の強コンパクト列であることがわかる. よって $\{u_k\}_{k=1,2,\dots}$ から部分列をうまく取り, それを再び $\{u_k\}_{k=1,2,\dots}$ を使ってあらわすと $v\in H^1(B_2^-,\mathbf{C}^3)$ が存在して

$$u_k \ \to\ v \quad \text{in } H^1(B_2^-,\mathbf{C}^3) \quad (\text{弱収束}) \tag{3.12}$$

$$u_k \ \to\ v \quad \text{in } L^2(B_2^-,\mathbf{C}^3) \quad (\text{強収束}) \tag{3.13}$$

とできる.(3.12) から弱収束の性質より

$$\|v\|_{H^1(B_2^-,\mathbf{C}^3)} \le \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{H^1(B_2^-,\mathbf{C}^3)} \tag{3.14}$$

が従うが,(3.10),(3.11) より

$$\|u_k\|^2_{H^1(B_2^-,\mathbf{C}^3)} < 1 + \frac{1}{k^2} \tag{3.15}$$

である.(3.14) と (3.15) によって

$$\|v\|_{H^1(B_2^-,\mathbf{C}^3)} \le 1$$

が従う. 一方,(3.10) と (3.13) より

$$\|v\|_{L^2(B_2^-,\mathbf{C}^3)} = 1 \tag{3.16}$$

であるので

$$\|\partial_x^1 v\|_{L^2(B_2^-,\mathbf{C}^{3\times3})} = 0$$

でなくてはならない. これは v が B_2^- 上定数ベクトルであることを意味する. しかし (3.11) と (3.13) より

$$\|v\|_{L^2(G,\mathbf{C}^3)} = 0$$

であるので v は G 上 0 , さらに B_2^- 上定数ベクトルであったので B_2^- 上 0 となる. しかしこれは (3.16) に矛盾する. よって (3.8) が示せた. $\square$

定理 3.1 の証明

まず $(\cdot,\cdot)_{m,\mathbf{R}^3_-}$ が内積であることを示す. そのために

$$\begin{cases} u \in \dot{H}^m(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3) \\ (u,u)_{m,\mathbf{R}^3_-} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \ u = 0$$

を示す. $u \in \dot{H}^m(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3), (u,u)_{m,\mathbf{R}^3_-} = 0$ と仮定する. 補題2.4 より $C > 0$ が存在して任意の $R > 2$ に対して以下が成立.

$$0 = (u,u)_{m,\mathbf{R}^3_-} \geq \|\partial_x^1 u\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^{3\times 3})} \geq \frac{1}{C^2R^2}\|u\|^2_{L^2(B_R^-,\mathbf{C}^3)}.$$

これより

$$\|u\|^2_{L^2(B_R^-,\mathbf{C}^3)} = 0$$

であり, R は任意であるので

$$u = 0$$

が従う. 内積の他の公理をみたすことは定義より明らか. よって $(\cdot,\cdot)_{m,\mathbf{R}^3_-}$ が $\dot{H}^m(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)$ の内積となることがわかった.

次に補題 3.2 より $C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_-},\mathbf{C}^3)$ が $\dot{H}^m(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)$ で稠密であることが従う.

最後に $\dot{H}^m(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)$ が完備であることを示す. $\dot{H}^m(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)$ の任意の Cauchy 列 $\{u_k\}_{k=1,2,\ldots}$ をとる. すると補題 3.4 を使うと $C > 0$ が存在して任意の $R > 2$ に対して

$$\begin{aligned}
&\|u_k - u_l\|^2_{H^m(B_R^-,\mathbf{C}^3)} \\
&= \|u_k - u_l\|^2_{L^2(B_R^-,\mathbf{C}^3)} + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \|\partial_x^\alpha(u_k - u_l)\|^2_{L^2(B_R^-,\mathbf{C}^3)} \\
&\leq CR\|\partial_x^1(u_k - u_l)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^{3\times 3})} + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \|\partial_x^\alpha(u_k - u_l)\|^2_{L^2(B_R^-,\mathbf{C}^3)} \\
&\leq (CR+1)|u_k - u_l|^2_{m,\mathbf{R}^3_-} \ \to \ 0 \qquad (k,l \ \to \ \infty)
\end{aligned}$$

となるので $\{u_k\}_{k=1,2,\ldots}$ は $H^m(B_R^-, \mathbf{C}^3)$ の Cauchy 列でもある．従って $u^{(R)} \in H^m(B_R^-, \mathbf{C}^3)$ が存在して

$$u_k \;\to\; u^{(R)} \quad \text{in } H^m(B_R^-, \mathbf{C}^3) \tag{3.17}$$

とできる．さて $R < R'$ とすると

$$\begin{aligned}&\|u^{(R)} - u^{(R')}\|_{H^m(B_R^-,\mathbf{C}^3)} \le \|u^{(R)} - u_k\|_{H^m(B_R^-,\mathbf{C}^3)} + \|u_k - u^{(R')}\|_{H^m(B_R^-,\mathbf{C}^3)}\\ &\longrightarrow 0 \qquad (k \;\to\; \infty)\end{aligned}$$

となるから

$$u^{(R)} = u^{(R')} \qquad \text{a.e. } x \in B_R^-$$

である. よって $u(x)$ を

$$u(x) = u^{(R)}(x) \qquad (x \in B_R^-)$$

と定めれば零集合を無視して考えれば $x \in \mathbf{R}_-^3$ で一意に定義できる．また明らかに $u \in H_{loc}^m(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)$. さらに $1 \le |\alpha| \le m$ なる任意の α に対して

$$\begin{aligned}&\|\partial_x^\alpha u\|_{L^2(B_R^-,\mathbf{C}^3)}\\ \le\ &\|\partial_x^\alpha(u - u_k)\|_{L^2(B_R^-,\mathbf{C}^3)} + \|\partial_x^\alpha u_k\|_{L^2(B_R^-,\mathbf{C}^3)}\\ \le\ &\|u^{(R)} - u_k\|_{H^m(B_R^-,\mathbf{C}^3)} + \|\partial_x^\alpha u_k\|_{L^2(\mathbf{R}_-^3,\mathbf{C}^3)}\\ \le\ &\|u^{(R)} - u_k\|_{H^m(B_R^-,\mathbf{C}^3)} + |u_k|_{m,\mathbf{R}_-^3}\end{aligned}$$

ここで上の式は任意の k に対して成立する．$\{u_k\}_{k=1,2,\ldots}$ は $\dot{H}^m(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)$ の Cauchy 列であることから $|u_k|_{m,\mathbf{R}_-^3}$ は k に対して有界. このことと (3.17) をあわせると, $\|\partial_x^\alpha u\|_{L^2(B_R^-,\mathbf{C}^3)}$ が R に対し有界であることがわかり $\partial_x^\alpha u \in L^2(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)$ が従う．さらに $\{u_k\}_{k=1,2,\ldots}$ は $\dot{H}^m(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)$ の Cauchy 列であることから任意の $\varepsilon > 0$ に対して $N > 0$ が存在して

$$l, k \ge N \implies |u_k - u_l|_{m,\mathbf{R}_-^3}^2 < \varepsilon$$

とできる．これは

$$\sum_{1\le|\alpha|\le m} \int_{\mathbf{R}_-^3} |\partial_x^\alpha(u_k - u_l)|^2 dx < \varepsilon \tag{3.18}$$

を意味し, u の決め方より各 $x \in \mathbf{R}_-^3$ に対して

$$u_l(x) \to u(x) \quad (l \to \infty)$$

であるから (3.18) は

$$\sum_{1\le|\alpha|\le m}\int_{\mathbf{R}^3_-}|\partial_x^\alpha(u_k-u)|^2dx<\varepsilon$$

とでき

$$|u_k-u|_{m,\mathbf{R}^3_-}\to 0 \quad (k\to\infty)$$

が従う.

最後に

$$\lim_{R\to\infty}R^{-2}\int_{R\le|x|\le 2R,x_3<0}|u(x)|^2dx=0 \tag{3.19}$$

を示す.

$$\begin{aligned}&\Big\{R^{-2}\int_{R\le|x|\le 2R,x_3<0}|u(x)|^2dx\Big\}^{1/2}\\ &\le\Big\{R^{-2}\int_{R\le|x|\le 2R,x_3<0}|u(x)-u_k(x)|^2dx\Big\}^{1/2}+\Big\{R^{-2}\int_{R\le|x|\le 2R,x_3<0}|u_k(x)|^2dx\Big\}^{1/2}\\ &\le R^{-1}\|u-u_k\|_{L^2(B_{2R}^-,\mathbf{C}^3)}+2\Big\{\int_{R\le|x|,x_3<0}|x|^{-2}|u_k(x)|^2dx\Big\}^{1/2}\end{aligned} \tag{3.20}$$

となるがここで補題 3.3 を使うと

$$\begin{aligned}(3.20)\text{ の第 2 項}&\le 4\Big\{\int_{R\le|x|,x_3<0}|\partial_x^1u_k(x)|^2dx\Big\}^{1/2}\\ &\le 4|u_k-u|_{m,\mathbf{R}^3_-}+4\Big\{\int_{R\le|x|,x_3<0}|\partial_x^1u(x)|^2dx\Big\}^{1/2}\end{aligned}$$

と評価できる. これより

$$\begin{aligned}(3.20)\le R^{-1}&\|u-u_k\|_{L^2(B_{2R}^-,\mathbf{C}^3)}+4|u_k-u|_{m,\mathbf{R}^3_-}\\ &+4\Big\{\int_{R\le|x|,x_3<0}|\partial_x^1u(x)|^2dx\Big\}^{1/2}\end{aligned}$$

これより両辺を $k\to\infty$ とすると

$$R^{-2}\int_{R\le|x|\le 2R,x_3<0}|u(x)|^2dx\le 16\int_{R\le|x|,x_3<0}|\partial_x^1u(x)|^2dx$$

ここで $\partial_x^1u\in L^2(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^{3\times 3})$ より (右辺) $\to 0 \quad (R\to\infty)$ がわかる. これより (3.19) が従い $u\in\dot{H}^1(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)$ がわかった. □

補題 3.5 $|\cdot|_{1,\mathbf{R}^3_-}$ と $\langle\cdot,\cdot\rangle^{1/2}_{1,\mathbf{R}^3_-}$ は $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)$ の同値なノルムである．すなわち $C>0$ が存在して任意の $u\in\dot{H}^1(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)$ に対し

$$C^{-1}|u|^2_{1,\mathbf{R}^3_-}\le\langle u,u\rangle_{1,\mathbf{R}^3_-}\le C|u|^2_{1,\mathbf{R}^3_-}$$

とできる．

補題 3.5 の証明

右側の不等式は明らか. 左側の不等式を示す．(2.7) を使うと

$$\begin{aligned}
\langle u,u\rangle_{1,\mathbf{R}^3_-}&\le C|u|^2_{1,\mathbf{R}^3_-}\\
&=C\sum_{i,j,p,q=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3_-}a_{ipjq}\frac{\partial u_q}{\partial x_j}\frac{\partial\overline{u_p}}{\partial x_i}dx\\
&=\frac{C}{4}\sum_{i,j,p,q=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3_-}a_{ipjq}\frac{\partial u_j}{\partial x_p}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_q}dx+\frac{C}{4}\sum_{i,j,p,q=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3_-}a_{ipjq}\frac{\partial u_j}{\partial x_p}\frac{\partial\overline{u_q}}{\partial x_i}dx\\
&\quad+\frac{C}{4}\sum_{i,j,p,q=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3_-}a_{ipjq}\frac{\partial u_p}{\partial x_j}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_q}dx+\frac{C}{4}\sum_{i,j,p,q=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3_-}a_{ipjq}\frac{\partial u_p}{\partial x_j}\frac{\partial\overline{u_q}}{\partial x_i}dx\\
&=C\sum_{i,j,p,q=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3_-}a_{ipjq}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_p}+\frac{\partial u_p}{\partial x_j}\right)\left(\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_q}+\frac{\partial\overline{u_q}}{\partial x_i}\right)dx\\
&=C\sum_{i,j,p,q=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3_-}a_{ipjq}\varepsilon_{jp}(u)\overline{\varepsilon_{iq}(u)}dx
\end{aligned}$$

となるがここで安定性条件 (2.1) が成立することから $\delta>0$ が存在して

$$\sum_{i,j,p,q=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3_-}a_{ipjq}\varepsilon_{ip}(u)\overline{\varepsilon_{iq}(u)}dx\ge\delta\sum_{i,p=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3_-}|\varepsilon_{ip}(u)|^2dx$$

と評価でき (Ito[1] を参照), さらに Korn の不等式 ([3] の Theorem1.5 参照) を使うと $\delta'>0$ が存在して

$$\sum_{i,p=1}^{3}\int_{\mathbf{R}^3_-}|\varepsilon_{ip}(u)|^2dx\ge\delta'\int_{\mathbf{R}^3_-}|\partial^1_x u|^2dx$$

と出来ることより補題が従う． □

これより,$\dot{H}^m(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)$ は $\langle\cdot,\cdot\rangle_{1,\mathbf{R}^3_-}$ を内積とした Hilbert 空間でもあることが従う．

$m \geq 1$ に対して以下の空間を定義する.

$$\dot{H}^m(\mathbf{R}^3_+) = \Big\{ u \in H^m_{loc}(\mathbf{R}^3_+); 任意の\ 1 \leq |\alpha| \leq m\ に対して \partial^\alpha_x w \in L^2(\mathbf{R}^3_+),$$

$$\lim_{R\to\infty} R^{-2} \int_{R \leq |x| \leq 2R, x_3 > 0} |w(x)|^2 dx = 0 \Big\}$$

さらに以下を定義する.

$$\langle w, s \rangle_{m,\mathbf{R}^3_+} = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\mathbf{R}^3_+} \partial^\alpha_x w(x) \partial^\alpha_x \overline{s(x)} dx,$$

$$|w|^2_{m,\mathbf{R}^3_+} = \langle w, w \rangle_{m,\mathbf{R}^3_+}.$$

すると以下の定理が成立.

定理 3.6 $\dot{H}^m(\mathbf{R}^3_+)$ は $\langle \cdot, \cdot \rangle_{m,\mathbf{R}^3_+}$ を内積とした *Hilbert* 空間となる. さらに, $C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ は $\dot{H}^m(\mathbf{R}^3_+)$ で稠密.

定理 3.6 の証明

$\dot{H}^m(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$ のときと同様であるから省略する. $\square$

$$H = \dot{H}^1(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3) \times L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3) \times \dot{H}^1(\mathbf{R}^3_+) \times L^2(\mathbf{R}^3_+)$$

とおき, $f, g \in H$ に対しエネルギー内積を

$$\begin{aligned}(f,g)_E = \frac{1}{2}\big\{ &\langle f^{(1)}, g^{(1)} \rangle_{1,\mathbf{R}^3_-} + \rho_0^- (f^{(2)}, g^{(2)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} \\ &+ \rho_0^+ \langle f^{(3)}, g^{(3)} \rangle_{1,\mathbf{R}^3_+} + \frac{\rho_0^+}{c^2} (f^{(4)}, g^{(4)})_{L^2(\mathbf{R}^3_+)} \big\}\end{aligned}$$

とおけば H は $(\cdot, \cdot)_E$ を内積とした Hilbert 空間であることがわかる.

4 自己共役作用素 A

定義 4.1 $f \in H, Mf^{(1)} \in L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3), \Delta f^{(3)} \in L^2(\mathbf{R}^3_+)$ が一般化された接合条件をみたすとは, 任意の $g^{(2)} \in H^1(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3), g^{(4)} \in H^1(\mathbf{R}^3_+)$ に対し

$$\rho_0^- (Mf^{(1)}, g^{(2)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} + \langle f^{(1)}, g^{(2)} \rangle_{1,\mathbf{R}^3_-} = \rho_0^+ (f^{(4)}, g_3^{(2)})_{L^2(\partial \mathbf{R}^3_-)} \tag{4.1}$$

$$(\Delta f^{(3)}, g^{(4)})_{L^2(\mathbf{R}^3_+)} + \langle f^{(3)}, g^{(4)} \rangle_{1,\mathbf{R}^3_+} = -(f_3^{(2)}, g^{(4)})_{L^2(\partial \mathbf{R}^3_-)} \tag{4.2}$$

を満たすときをいう.

定義 4.2 作用素 $A : H \to H$ を定義域 $D(A)$ を

$$
\begin{aligned}
D(A) = \{ & f \in H ; Mf^{(1)} \in L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3), f^{(2)} \in H^1(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3), \Delta f^{(3)} \in L^2(\mathbf{R}^3_+), \\
& f^{(4)} \in H^1(\mathbf{R}^3_+), f \text{ は一般化された接合条件を満たす.} \}
\end{aligned}
$$

と定め, 任意の $f \in D(A)$ に対して

$$
Af = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c^2\Delta & 0 \end{pmatrix} f
$$

と定義する.

ここで, 一般化された接合条件と通常の接合条件との関係について見ていく.

補題 4.3 $f^{(1)} \in \dot{H}^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3), f^{(2)} \in H^1(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3), f^{(3)} \in \dot{H}^2(\mathbf{R}^3_+), f^{(4)} \in H^1(\mathbf{R}^3_+)$ とする. そのときトレースの意味で

$$
\sum_{j=1}^{3} M_{3j} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_j} = \rho_0^+ f^{(4)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3^{(2)} = \frac{\partial f^{(3)}}{\partial x_3} \quad \text{on } x_3 = 0 \tag{4.3}
$$

となる必要十分条件は f が一般化された接合条件をみたすことである.

補題 4.3 の証明

必要条件は明らか. 十分条件を示す. 任意に $\varphi^{(2)} = (\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \varphi_3^{(2)}) \in C_0^\infty(\partial\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$ をとる. $g^{(2)} \in C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_-}, \mathbf{C}^3)$ を $g^{(2)}|_{x_3=0} = \varphi^{(2)}$ となるようにとる. すると f が一般化された接合条件をみたすことから

$$
\rho_0^-(Mf^{(1)}, g^{(2)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} + \langle f^{(1)}, g^{(2)} \rangle_{1, \mathbf{R}^3_-} = \rho_0^+(f^{(4)}, g_3^{(2)})_{L^2(\partial\mathbf{R}^3_-)} \tag{4.4}
$$

が成立する. ここで部分積分より

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbf{R}^3_-} \sum_{i,j=1}^{3} M_{ij} \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} \cdot g^{(2)} dx \\
= \ & \int_{\partial\mathbf{R}^3_-} \sum_{j=1}^{3} M_{3j} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_j} \cdot g^{(2)} dS - \int_{\mathbf{R}^3_-} \sum_{i,j=1}^{3} M_{ij} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial g^{(2)}}{\partial x_i} dx
\end{aligned}
$$

とできるので (4.4) より

$$\left(\sum_{j=1}^{3} M_{3j}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_j}, \varphi^{(2)}\right)_{L^2(\partial\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)} = (\rho_0^+ f^{(4)}, \varphi_3^{(2)})_{L^2(\partial\mathbf{R}^3_-)}$$
$$= \left(\rho_0^+ f^{(4)}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \varphi^{(2)}\right)_{L^2(\partial\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)}$$

となり $\varphi^{(2)}$ は任意であるから (4.3) の第 1 式が従う．さらに $\varphi^{(4)} \in C_0^\infty(\partial\mathbf{R}^3_+)$ に対し $g^{(4)} \in C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ を $g^{(4)}|_{x_3=0} = \varphi^{(4)}$ となるようにとる．すると前半と同様に (4.3) の第 2 式が従うことがわかる．よって補題が示せた． □

補題 4.4 *$D(A)$ は H で稠密.*

補題 4.4 の証明

任意に $f \in H$ をとり固定する．$C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_-}, \mathbf{C}^3)$ は $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$ で稠密であるので $C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_-}, \mathbf{C}^3)$ の点列 $\{\varphi_j^{(1)}\}_{j=1,2,\ldots}$ が存在して

$$\varphi_j^{(1)} \to f^{(1)} \quad \text{in } \dot{H}^1(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3) \quad (j \to \infty)$$

とできる．さらに $C_0^\infty(\mathbf{R}^3_+)$ は $L^2(\mathbf{R}^3_+)$ で稠密であるので $C_0^\infty(\mathbf{R}^3_+)$ の点列 $\{\psi_j^{(4)}\}_{j=1,2,\ldots}$ が存在して

$$\psi_j^{(4)} \to f^{(4)} \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^3_+) \quad (j \to \infty)$$

とできる．$\psi_j^{(4)}$ に対して $\varphi_j^{(4)}$ を

$$\varphi_j^{(4)} = \psi_j^{(4)} + c\phi(k_j x_3)\varphi_{j3}^{(1)}(x_1, x_2, 0)$$

とおく. ここで ϕ は

$$\phi(x_3) = \begin{cases} 1 & x_3 = 0 \\ 0 & x_3 \geq 1 \end{cases}, 0 \leq \phi(x_3) \leq 1$$

なる $C^\infty(\mathbf{R}_+)$ 関数とし k_j は $k_j = j(\|\varphi_{j3}^{(1)}(\cdot,\cdot,0)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} + 1)$ とおく. すると

$$\|\rho_0^+\phi(k_j x_3)\varphi_{j3}^{(1)}(x_1, x_2, 0)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^3_+)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathbf{R}^3_+} |\rho_0^+ \phi(k_j x_3) \varphi_{j3}^{(1)}(x_1, x_2, 0)|^2 dx \\
&= \int_0^\infty |\rho_0^+ \phi(k_j x_3)|^2 dx_3 \int_{\mathbf{R}^2} |\varphi_{j3}^{(1)}(x_1, x_2, 0)|^2 dx' \\
&= \int_0^{\frac{1}{k_j}} |\rho_0^+ \phi(k_j x_3)|^2 dx_3 \int_{\mathbf{R}^2} |\varphi_{j3}^{(1)}(x_1, x_2, 0)|^2 dx' \\
&\le \int_0^{\frac{1}{k_j}} \rho_0^{+2} dx_3 \int_{\mathbf{R}^2} |\varphi_{j3}^{(1)}(x_1, x_2, 0)|^2 dx' \\
&= \frac{\rho_0^{+2}}{j(\|\varphi_{j3}^{(1)}(\cdot, \cdot, 0)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} + 1)} \|\varphi_{j3}^{(1)}(\cdot, \cdot, 0)\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} \\
&\le \frac{\rho_0^{+2}}{j} \to 0 \quad (j \to \infty)
\end{aligned}
$$

となる. ここで $x' = (x_1, x_2)$ とした. よって

$$\varphi_j^{(4)} \to f^{(4)} \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^3_+)$$

がわかる.

次に $C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ は $\dot{H}^1(\mathbf{R}^3_+)$ で稠密であるので $C_0^\infty(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ の点列 $\{\varphi_j^{(3)}\}_{j=1,2,\dots}$ が存在して

$$\varphi_j^{(3)} \to f^{(3)} \quad \text{in } \dot{H}^1(\mathbf{R}^3_+) \quad (j \to \infty)$$

とできる. さらに $C_0^\infty(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$ は $L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$ で稠密であるので $C_0^\infty(\mathbf{R}^3_+)$ の点列 $\{\psi_j^{(4)}\}_{j=1,2,\dots}$ が存在して

$$\psi_j^{(2)} \to f^{(2)} \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3) \quad (j \to \infty)$$

とできる. これに対し $\varphi_j^{(2)}$ を

$$\varphi_{j1}^{(2)} = \psi_{j1}^{(2)}, \varphi_{j2}^{(2)} = \psi_{j2}^{(2)}, \varphi_{j3}^{(2)} = \psi_{j3}^{(2)} + \rho_0^+ \phi(-k_j' x_3) \frac{\partial \varphi_{j3}^{(3)}}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0) + \psi_{j3}^{(2)}$$

とおく. ここで

$$k_j' = j\Big(\Big\|\frac{\partial \varphi_{j3}^{(3)}}{\partial x_3}(\cdot, \cdot, 0)\Big\|^2_{L^2(\mathbf{R}^2)} + 1\Big)$$

とおけば証明の前半と同様に

$$\Big\|\phi(-k_j' x_3) \frac{\partial \varphi_{j3}^{(3)}}{\partial x_3}(x_1, x_2, 0)\Big\|_{L^2(\mathbf{R}^3_-)} \to 0 \quad (j \to \infty)$$

が従い
$$\varphi_j^{(4)} \to f^{(4)} \quad \text{in } L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3) \quad (j \to \infty)$$
がわかる.

さらに補題 4.3 よりここで決めた $\varphi_j = (\varphi_j^{(1)}, \varphi_j^{(2)}, \varphi_j^{(3)}, \varphi_j^{(4)})$ は $D(A)$ の点列であることがわかる. これより補題が従う. □

補題 4.4 により A の共役作用素 A^* が一意に定まることが分かる. 共役作用素の定義より定義域は

$$\begin{aligned} D(A^*) = \{g \in H; h \in H & \text{ が存在して} \\ & \text{任意の } f \in D(A) \text{ に対して } (g, Af)_E = (h, f)_E \text{となる}.\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

で与えられ A^*g は $A^*g = h$ で与えられる.

補題 4.5 $-iA$ は H の対称作用素となる.

補題 4.5 の証明

$f, g \in D(A)$ とする. f, g が共に一般化された接合条件を満たすことから

$$\rho_0^-(Mf^{(1)}, g^{(2)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} + \langle f^{(1)}, g^{(2)} \rangle_{1, \mathbf{R}^3_-} = \rho_0^+(f^{(4)}, g_3^{(2)})_{L^2(\partial \mathbf{R}^3_-)}, \tag{4.6}$$

$$\langle g^{(1)}, f^{(2)} \rangle_{1, \mathbf{R}^3_-} + \rho_0^-(Mg^{(1)}, f^{(2)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} = \rho_0^+(g^{(4)}, f_3^{(2)})_{L^2(\partial \mathbf{R}^3_-)}, \tag{4.7}$$

$$(\Delta f^{(3)}, g^{(4)})_{L^2(\mathbf{R}^3_+)} + \langle f^{(3)}, g^{(4)} \rangle_{1, \mathbf{R}^3_+} = -(f_3^{(2)}, g^{(4)})_{L^2(\partial \mathbf{R}^3_-)}, \tag{4.8}$$

$$\langle g^{(3)}, f^{(4)} \rangle_{1, \mathbf{R}^3_+} + (\Delta g^{(3)}, f^{(4)})_{L^2(\mathbf{R}^3_+)} = -(g_3^{(2)}, f^{(4)})_{L^2(\partial \mathbf{R}^3_-)} \tag{4.9}$$

が成立.(4.7) と (4.9) において両辺複素共役をとれば

$$\langle f^{(2)}, g^{(1)} \rangle_{1, \mathbf{R}^3_-} + \rho_0^-(f^{(2)}, Mg^{(1)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} = \rho_0^+(f_3^{(2)}, g^{(4)})_{L^2(\partial \mathbf{R}^3_-)}, \tag{4.10}$$

$$\langle f^{(4)}, g^{(3)} \rangle_{1, \mathbf{R}^3_+} + (f^{(4)}, \Delta g^{(3)})_{L^2(\mathbf{R}^3_+)} = -(f^{(4)}, g_3^{(2)})_{L^2(\partial \mathbf{R}^3_-)}. \tag{4.11}$$

これより (4.10),(4.6),(4.11),(4.8) を順次適用すれば

$$\begin{aligned} 2(Af, g)_E =& \langle f^{(2)}, g^{(1)} \rangle_{1, \mathbf{R}^3_-} + \rho_0^-(Mf^{(1)}, g^{(2)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} \\ & + \rho_0^+ \langle f^{(4)}, g^{(3)} \rangle_{1, \mathbf{R}^3_+} + \frac{\rho_0^+}{c^2}(c^2 \Delta f^{(3)}, g^{(4)})_{L^2(\mathbf{R}^3_+)} \\ =& -\rho_0^-(f^{(2)}, Mg^{(1)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} + \rho_0^+(f_3^{(2)}, g^{(4)})_{L^2(\partial \mathbf{R}^3_-)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \langle f^{(1)}, g^{(2)} \rangle_{1,\mathbf{R}^3_-} + \rho_0^+ (f^{(4)}, g_3^{(2)})_{L^2(\partial \mathbf{R}^3_-)} \\
&- \rho_0^+ (f^{(4)}, \Delta g^{(3)})_{L^2(\mathbf{R}^3_+)} - \rho_0^+ (f^{(4)}, g_3^{(2)})_{L^2(\partial \mathbf{R}^3_-)} \\
&- \rho_0^+ \langle f^{(3)}, g^{(4)} \rangle_{1,\mathbf{R}^3_+} - \rho_0^+ (f_3^{(2)}, g^{(4)})_{L^2(\partial \mathbf{R}^3_-)} \\
=& - \langle f^{(1)}, g^{(2)} \rangle_{1,\mathbf{R}^3_-} - \rho_0^- (f^{(2)}, M g^{(1)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} \\
&- \rho_0^+ \langle f^{(3)}, g^{(4)} \rangle_{1,\mathbf{R}^3_+} - \frac{\rho_0^+}{c^2} (f^{(4)}, c^2 \Delta g^{(3)})_{L^2(\mathbf{R}^3_+)} \\
=& - 2(f, Ag)_E
\end{aligned}
$$

となり $-iA$ の対称性が従う. □

定理 4.6 $-iA$ は H の自己共役作用素となる.

定理 4.6 の証明

$H_N^\infty(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3) = \Big\{ u \in \bigcap_{m=1}^\infty \dot{H}^m(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3) \,;\, \sum_{j=1}^3 M_{3j} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \quad \text{on } x_3 = 0 \Big\}$ とおく. (4.5) において $f^{(1)} \in H_N^\infty(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3), f^{(2)} = 0, f^{(3)} = f^{(4)} = 0$ とする. そのとき

$$
(g^{(2)}, \rho_0^- M f^{(1)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} = \langle h^{(1)}, f^{(1)} \rangle_{1,\mathbf{R}^3_-} \tag{4.12}
$$

を得る. ここで $g, h \in H$ であることに注意する. まず

$$
\begin{aligned}
&\langle h^{(1)}, f^{(1)} \rangle_{1,\mathbf{R}^3_-} \\
=& \int_{\mathbf{R}^3_-} \sum_{i,j=1}^3 M_{ij} \frac{\partial h^{(1)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} dx \\
=& \lim_{R \to \infty} \int_{\mathbf{R}^3_-} \sum_{i,j=1}^3 M_{ij} \chi_R(x) \frac{\partial h^{(1)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} dx \\
=& \lim_{R \to \infty} \Big\{ \int_{\partial \mathbf{R}^3_-} \sum_{i=1}^3 \chi_R(x) h^{(1)} \cdot M_{3i} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} dx - \int_{\mathbf{R}^3_-} \sum_{i,j=1}^3 M_{ij} h^{(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\chi_R(x) \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} \Big) dx \Big\} \\
=& \lim_{R \to \infty} \Big\{ \int_{\partial \mathbf{R}^3_-} \sum_{i=1}^3 \chi_R(x) h^{(1)} \cdot M_{3i} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} dx - \int_{\mathbf{R}^3_-} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \chi_R(x)}{\partial x_j} M_{ij} h^{(1)} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} dx \\
&- \int_{\mathbf{R}^3_-} \sum_{i,j=1}^3 M_{ij} h^{(1)} \cdot \chi_R(x) \frac{\partial^2 f^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j} dx \Big\}
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

と計算でき, まず (4.13) の第 1 項は $f^{(1)} \in H_N^\infty(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)$ であるので $R \to \infty$ のとき $\to 0$ が従う. (4.13) の第 2 項の絶対値は $K_j = \sup_{R \le |x| \le 2R, x_3 < 0} \frac{\partial \chi}{\partial x_j}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
&|(4.13) \text{ の } (\text{第 } 2 \text{ 項})| \\
&= \Big| \int_{\mathbf{R}_-^3} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{R} \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \Big(\frac{x}{R}\Big) M_{ij} h^{(1)} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} dx \Big| \\
&= \Big| \int_{R \le |x| \le 2R, x_3 < 0} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{R} \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \Big(\frac{x}{R}\Big) M_{ij} h^{(1)} \cdot \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} dx \Big| \\
&\le \sum_{i,j=1}^{3} \Big\{ \frac{1}{R^2} \int_{R \le |x| \le 2R, x_3 < 0} |K_j M_{ij} h^{(1)}|^2 dx \Big\}^{1/2} \Big\{ \int_{R \le |x| \le 2R, x_3 < 0} \Big| \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_i} \Big|^2 dx \Big\}^{1/2}
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

となり (4.14) の第 2 項は R に対して有界であるので (4.14) は $R \to \infty$ のとき $\to 0$ が従う. これより (4.12) とあわせ

$$
(g^{(2)}, \rho M f^{(1)})_{L^2(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)} = - \lim_{R \to \infty} \int_{\mathbf{R}_-^3} \chi_R(x) h^{(1)} \cdot \rho M f^{(1)} dx
$$

をえる. よって

$$
(g^{(2)}, \rho M f^{(1)})_{L^2(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)} = (-h^{(1)}, \rho M f^{(1)})_{L^2(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)}
$$

となる. ここで ([3] の Theorem1.9 の証明) より $C_0^\infty(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3) \subset M H_N^\infty(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)$ がわかり, さらに $C_0^\infty(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)$ は $L^2(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)$ で稠密であるので $M H_N^\infty(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)$ は $L^2(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)$ で稠密であることが従う. これより

$$
g^{(2)} = -h^{(1)} \tag{4.15}
$$

を得, $g^{(2)} \in H^1(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)$ となる.

次に $f^{(2)} \in C_0^\infty(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3), f^{(1)} = 0, f^{(3)} = f^{(4)} = 0$ ととる. すると

$$
\langle g^{(1)}, f^{(2)} \rangle_{1, \mathbf{R}_-^3} = \rho_0^- (h^{(2)}, f^{(2)})_{L^2(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)}
$$

となる. 超関数のカップリングを $\langle \cdot, \cdot \rangle_{D'(\mathbf{R}_-^3, \mathbf{C}^3)}$ で表すと

$$
\langle g^{(1)}, f^{(2)} \rangle_{1, \mathbf{R}_-^3} = \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\mathbf{R}_-^3} M_{ij} \frac{\partial g^{(1)}}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_i} dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j=1}^{3} \left\langle M_{ij} \frac{\partial g^{(1)}}{\partial x_j}, \frac{\partial \overline{f^{(2)}}}{\partial x_i} \right\rangle_{D'(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} \\
&= - \sum_{i,j=1}^{3} \left\langle M_{ij} \frac{\partial^2 g^{(1)}}{\partial x_i \partial x_j}, \overline{f^{(2)}} \right\rangle_{D'(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} \\
&= - \langle \rho_0^- M g^{(1)}, \overline{f^{(2)}} \rangle_{D'(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)}
\end{aligned}
$$

とできる. 一方

$$
(h^{(2)}, f^{(2)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} = \langle h^{(2)}, \overline{f^{(2)}} \rangle_{D'(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)}
$$

であるので

$$
\langle -\rho_0^- M g^{(1)}, \overline{f^{(2)}} \rangle_{D'(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)} = \rho_0^- \langle h^{(2)}, \overline{f^{(2)}} \rangle_{D'(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)}
$$

となり超関数の意味で

$$
-M g^{(1)} = h^{(2)} \tag{4.16}
$$

が従い $-Mg^{(1)} \in L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$ を得る.

$H_N^\infty(\mathbf{R}^3_+) = \left\{ w \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \dot{H}^m(\mathbf{R}^3_+) \,;\, \dfrac{\partial w}{\partial x_3} = 0 \quad \text{on } x_3 = 0 \right\}$ とおく. $f^{(3)} \in H_N^\infty(\mathbf{R}^3_+), f^{(1)} = f^{(2)} = 0, f^{(4)} = 0$ ととると,

$$
\rho_0^+ (g^{(4)}, \Delta f^{(3)})_{L^2(\mathbf{R}^3_+)} = \rho_0^+ \langle h^{(3)}, f^{(3)} \rangle_{1, \mathbf{R}^3_+}
$$

となり,(4.15) の導出と同様の手法で

$$
g^{(4)} = -h^{(3)} \tag{4.17}
$$

を得, $g^{(4)} \in H^1(\mathbf{R}^3_+)$ となる.

$f^{(4)} \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3_+), f^{(1)} = f^{(2)} = 0, f^{(3)} = 0$ ととると

$$
\rho_0^+ \langle g^{(3)}, f^{(4)} \rangle_{1, \mathbf{R}^3_+} = \frac{\rho_0^+}{c^2} (h^{(4)}, f^{(4)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)}
$$

となり,(4.16) の導出と同様の手法で

$$
-c^2 \Delta g^{(3)} = h^{(4)} \tag{4.18}
$$

を得て $-c^2 \Delta g^{(3)} \in L^2(\mathbf{R}^3_+)$ がわかる.

任意の $f^{(2)} \in H^1(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$ に対して $f^{(3)} \in H^2(\mathbf{R}^3_+)$ が存在してトレースの意味で $f_3^{(2)} = \partial f^{(3)} / \partial x_3$ とできることを注意しておく. ここで (4.5)

に対し $f^{(2)}$ と $f^{(3)}$ を上記のように, さらに $f^{(1)} = 0, f^{(4)} = 0$ ととり (4.16),(4.17) を使うと

$$\begin{aligned}&\langle g^{(1)}, f^{(2)}\rangle_{1,\mathbf{R}^3_-} + \rho_0^-(Mg^{(1)}, f^{(2)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)}\\ &+ \rho_0^+(g^{(4)}, \Delta f^{(3)})_{L^2(\mathbf{R}^3_+)} + \rho_0^+\langle g^{(4)}, f^{(3)}\rangle_{1,\mathbf{R}^3_+} = 0\end{aligned}$$

とできる. ここで $g^{(4)} \in H^1(\mathbf{R}^3_+)$ より部分積分を適用すれば

$$\langle g^{(1)}, f^{(2)}\rangle_{1,\mathbf{R}^3_-} + \rho_0^-(Mg^{(1)}, f^{(2)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)} - \rho_0^+\left(g^{(4)}, \frac{\partial f^{(3)}}{\partial x_3}\right)_{L^2(\partial\mathbf{R}^3_+)} = 0$$

さらに $f^{(2)}$ と $f^{(3)}$ との条件より

$$\langle g^{(1)}, f^{(2)}\rangle_{1,\mathbf{R}^3_-} + \rho_0^-(Mg^{(1)}, f^{(2)})_{L^2(\mathbf{R}^3_-,\mathbf{C}^3)} - \rho_0^+(g^{(4)}, f_3^{(2)})_{L^2(\partial\mathbf{R}^3_+)} = 0 \tag{4.19}$$

となる.

次に, 任意の $f^{(4)} \in H^1(\mathbf{R}^3_+)$ に対して $f^{(1)} \in H^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$ が存在してトレースの意味で

$$\sum_{j=1}^{3} M_{3j}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_j} = \rho_0^+ f^{(4)}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

とできることに注意する. (4.5) に対し $f^{(1)}$ と $f^{(4)}$ を上記のように, さらに $f^{(2)} = 0, f^{(3)} = 0$ ととり (4.15),(4.18) を使うと (4.19) と同様にして

$$(\Delta g^{(3)}, f^{(4)})_{L^2(\mathbf{R}^3_+)} + \langle g^{(3)}, f^{(4)}\rangle_{1,\mathbf{R}^3_+} + (g_3^{(2)}, f^{(4)})_{L^2(\partial\mathbf{R}^3_-)} = 0$$

を得る. これより g が一般化された接合条件をみたすので $g \in D(A)$ がわかり, 補題 4.5 とあわせ A が自己共役であることがわかった. □

5 今後の展開と補足

定義 5.1 $\{U(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ が *Hilbert* 空間 H におけるユニタリー作用素の *1* パラメーター強連続群であるとは

(1) 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $U(t) : H \to H$ はユニタリー作用素.

(2) 任意の $f \in H$ に対して $U(t)f$ は H 値関数として $\mathbf{R}$ 上強連続.

(3) $U(t)U(s)f = U(t+s)f \quad (t, s \in \mathbf{R}, f \in H)$.

(4) $U(0)f = f \quad (f \in H)$.

をみたすときをいう.

定理 5.2 (Stone の定理) H を *Hilbert* 空間とする．A を H 上の閉作用素とする．このとき A を生成作用素とするユニタリー作用素の *1* パラメーター強連続群が存在する必要十分条件は $-iA$ が H の自己共役作用素となることである.

定理 5.2 の証明

証明については [2] の APPENDIX 1 を参照. $\square$

文献 [3] のなどの例からセクション 4 で定義された A から定まるユニタリー作用素の 1 パラメーター強連続群 $\{U(t)\}_{t\in\mathbf{R}}$ は

$$U(t)f = (u(\cdot,t), u_t(\cdot,t), w(\cdot,t), w_t(\cdot,t)) \quad (f \in H)$$

を表すものと推測されるがまだ結論は得られていない. これについては今後の課題としたい.

また論文 [4] と同様にセクション 4 の $D(A)$ を一般化された接合条件をなくした

$$\begin{aligned} D(A) = \{ & f \in H; f \in \dot{H}^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3) \times H^1(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3) \times \dot{H}^2(\mathbf{R}^3_+) \times H^1(\mathbf{R}^3_+), \\ & f^{(1)} \text{と } f^{(4)} \text{がトレースの意味で } x_3 = 0 \text{ 上} \sum_{j=1}^{3} M_{3j} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_j} = c f^{(4)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & \text{をみたし,} \\ & f^{(2)} \text{と } f^{(3)} \text{がトレースの意味で } x_3 = 0 \text{ 上 } f_3^{(2)} = \frac{\partial f^{(3)}}{\partial x_3} \text{をみたす.} \} \end{aligned}$$

に書き換えようと試みた. しかし (4.13),(4.16) において $g^{(1)} \in \dot{H}^2(\mathbf{R}^3_-, \mathbf{C}^3)$ および $g^{(3)} \in \dot{H}^2(\mathbf{R}^3_+)$ が示せなかった. なおこれが示されれば補題 4.3 よりセクション 4 で定義された $D(A)$ とここで定義した $D(A)$ が一致することがわかる．これについても今後の課題にしたい.

6　おわりに

最後に M1 の頃よりセミナーその他でお世話になった永井敏隆先生, 同研究室の山田哲也君, さらに本論文を書くにあたって稚拙な私のために多くの貴重な時間を割いて下さった川下美潮先生に心から感謝の意を表したい．本当にありがとうございました.

参考文献

[1] H. Ito, *Extended Korn's inequalities and the associated best possible constants.* J.Elasticity, **24**(1990), 43-78.

[2] Lax,P.D. and Phillips, R.S., *Scattering theory*, Academic Press, New York, 1967.

[3] Shibata, Y. and Soga, H. *Scattering theory for the elastic wave equation.* Publ. Res. Inst. Math. Sci., **25**(1989),No. 6, 861-887.

[4] Shimizu,S., *Eigenfunction expansions for elastic wave propagation problems in stratified media* $\mathbf{R}^3$,Tsukuba J.Math. **18**(1994),283-350.

[5] Wilcox, C., *Spectral analysis of the Pekeris operator in the theory of acoustic wave propagation in shallow water.* Arch. Rational Mech. Anal. **60**(1976),No.3,259-300.

[6] 井川満著　岩波講座 現代数学の展開　散乱理論　岩波書店

[7] 藤田宏, 池部晃生, 犬井鉄郎, 高見穎朗共著　岩波講座 基礎数学数理物理に現れる偏微分方程式 II　岩波書店