Coulomb 相互作用による2電荷の運動

2個の荷電粒子(q_1，q_2)が最初ある間隔に置かれて静止した状態から Coulomb 相互作用によって運動を始めるとき，それぞれの粒子は時間とともにどのような軌跡をたどるであろうか。具体的には，異なる極の磁石がくっついたり，同じ極の磁石が離れるような見慣れた運動であるが[1]，2つの物体間にはたらく力が距離の2乗に反比例するために距離と時間の関数関係は意外に複雑なものになる。本 monograph では，運動方程式を厳密に解き，軌跡の関数を導出する。

2つの荷電粒子(電荷：q_1および q_2)それぞれに対する運動方程式は次式で与えられる。

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{\left|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\right|^3} \tag{1}$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{\left|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1\right|^3} \tag{2}$$

式(1)/m_1と式(2)/m_2の差をとると，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\right|^3} \left(\frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{m_1} - \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{m_2} \right) \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\right|^3} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \end{aligned} \tag{3}$$

となる。ここで，$m_1 m_2/(m_1 + m_2)$は2粒子の換算質量μであるから，

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2}{\left|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2\right|^3} \tag{4}$$

と書くことができ，相対位置ベクトル $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$を定義すると，2粒子の相対運動を記述する運動方程式として，

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{5}$$

が得られる。$\boldsymbol{r}$ の大きさ r に関する方程式は

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \equiv \frac{C}{r^2} \tag{6}$$

[1] 電気には電荷は存在するが，磁気には“磁荷”というものはないので厳密には少し異なるものの，イメージする運動としては適当なものである。

であり，電荷が同符号の場合は斥力がはたらくから $C>0$ となり，異符号の場合は引力がはたらくから $C<0$ となる。式(6)の左辺は

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}=\mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}v \tag{7}$$

と変形できるから，次式が成立する。

$$\mu\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}v=\frac{C}{r^2} \tag{8}$$

これをさらに変形して，

$$v\,\mathrm{d}v=\frac{C}{\mu}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r \tag{9}$$

を得る。

まず，斥力の場合($C>0$)を考えよう。初期条件 $r=r_0$($v=0$)から任意の距離 r($>r_0$)まで2粒子が遠ざかることを考える。距離 r での速度を v として，

$$(\text{左辺})\rightarrow\int_0^v v\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}v^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{10}$$

$$(\text{右辺})\rightarrow\frac{C}{\mu}\int_{r_0}^{r} r^{-2}\mathrm{d}r=\frac{C}{\mu}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}\right) \tag{11}$$

であることより次式が得られる。

$$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{\frac{2C}{\mu}}\sqrt{\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r}}\qquad (r_0<r) \tag{12}$$

斥力の場合，2粒子は時間とともに遠ざかり $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t>0$ であるから正号を採用すれば，距離 r での相対速度 v を表す式として，

$$\boxed{v=\sqrt{\frac{2C(r-r_0)}{\mu r_0 r}}}\qquad (r_0<r) \tag{13}$$

が得られる[1]。距離と時間の関係を得るために，式(12)を時刻 $t=0$ から任意の時刻 t まで積分すると，

$$\int_{r_0}^{r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1/r_0-1/r}}=\sqrt{\frac{2C}{\mu}}\int_0^t \mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2C}{\mu}}t \tag{14}$$

[1] 別の導出法は巻末参照。

となる。$r=1/u$ と置換すると，$\mathrm{d}r=-(1/u^2)\mathrm{d}u$ であるから，

$$(左辺)\to -\int_{1/r_0}^{1/r}\frac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{1/r_0-u}}=\int_{1/r}^{1/r_0}\frac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{1/r_0-u}}=\int_{1/r}^{1/r_0}\frac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{-u+1/r_0}} \tag{15}$$

と変形できる。この積分の不定積分は，数学公式により[1]

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax+b}}=-\frac{\sqrt{ax+b}}{bx}-\frac{a}{2b}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} \tag{16}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}=\begin{cases}=\dfrac{1}{\sqrt{b}}\log\left|\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| & (b>0)\\[2ex] =\dfrac{2}{\sqrt{-b}}\arctan\sqrt{\dfrac{ax+b}{-b}} & (b<0)\end{cases} \tag{17}$$

であるから，$a=-1$ および $b=1/r_0>0$ の対応より，次の不定積分を得る。

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{-u+1/r_0}}=-\frac{r_0\sqrt{-u+1/r_0}}{u}+\frac{r_0^{3/2}}{2}\log\left|\frac{\sqrt{-u+1/r_0}-\sqrt{1/r_0}}{\sqrt{-u+1/r_0}+\sqrt{1/r_0}}\right| \tag{18}$$

これより，定積分(式(15)右辺)の上限($u=1/r_0$)と下限($u=1/r$)での値が

$$\begin{cases}上限(u=1/r_0)での値：0\\[1ex] 下限(u=1/r)での値：-\sqrt{rr_0(r-r_0)}+\dfrac{r_0^{3/2}}{2}\log\left(\dfrac{\sqrt{r}-\sqrt{r-r_0}}{\sqrt{r}+\sqrt{r-r_0}}\right)\end{cases} \tag{19}$$

となり，式(14)より，斥力により離れていく2電荷間の距離と時間の関係として次式を得る。

$$\boxed{t=\sqrt{\frac{\mu}{2C}}\left[\sqrt{rr_0(r-r_0)}-\frac{r_0^{3/2}}{2}\log\left(\frac{\sqrt{r}-\sqrt{r-r_0}}{\sqrt{r}+\sqrt{r-r_0}}\right)\right]} \tag{20}$$

(特に必要はないが)両辺の微分をとると，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}t&=\sqrt{\frac{\mu}{2C}}\left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{r_0}(2r-r_0)}{\sqrt{r(r-r_0)}}+\frac{r_0^{3/2}}{2}\frac{1}{\sqrt{r(r-r_0)}}\right]\mathrm{d}r\\&=\sqrt{\frac{\mu r_0 r}{2C(r-r_0)}}\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{21}$$

となり，時刻 t における相対速度($\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$)が確かに式(13)となっていることが確認できる(当

[1] 森口繁一，宇田川銈久，一松 信「数学公式 I」岩波書店，1981年(第17刷)，p.97

然)。2電荷間の距離が十分大きくなると($r_0 << r$)，2つの電荷間の相対速度は(式(13)より)

$$\boxed{v_\infty = \sqrt{\frac{2C}{\mu r_0}}} \tag{22}$$

となり，等速度で遠ざかることになる[1]。

一方，引力がはたらく場合($C < 0$)は，$r < r_0$であり，式(12)は次の形になる。

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{-\frac{2C}{\mu}}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}} \qquad (r < r_0) \tag{23}$$

また，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}t < 0$であるから負号を採用する。従って，引力の場合の距離と相対速度を与える式は,

$$\boxed{v = -\sqrt{-\frac{2C(r_0 - r)}{\mu r_0 r}}} \qquad (r < r_0) \tag{24}$$

となる。また，斥力の場合の式(14)に対応する式は

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1/r - 1/r_0}} = -\sqrt{-\frac{2C}{\mu}}\int_0^t \mathrm{d}t = -\sqrt{-\frac{2C}{\mu}}t \tag{25}$$

となる。左辺の積分を行うために $r = 1/u$ の置換を行えば,

$$(\text{左辺}) \to -\int_{1/r_0}^{1/r} \frac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{u - 1/r_0}} = \int_{1/r}^{1/r_0} \frac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{u - 1/r_0}} \tag{26}$$

となるから，$a = 1$および $b = -1/r_0 < 0$に対する式(17)の $b < 0$の場合の積分公式を利用して

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2\sqrt{u - 1/r_0}} = \frac{r_0\sqrt{u - 1/r_0}}{u} + r_0^{3/2}\arctan\sqrt{r_0(u - 1/r_0)} \tag{27}$$

を得る。これより，式(26)の積分の上限と下限に対する値は,

$$\begin{cases} \text{上限}(u = 1/r_0)\text{での値}：0 \\ \text{下限}(u = 1/r)\text{での値}：\sqrt{rr_0(r_0 - r)} + r_0^{3/2}\arctan\sqrt{\dfrac{r_0 - r}{r}} \end{cases} \tag{28}$$

となる。従って，式(25)より，引力の場合の時間と距離の関係式として

[1] rが十分大きくなると，電荷間にはたらく Coulomb 力が無視できるから当然の結果である。

$$\boxed{t=\sqrt{-\frac{\mu}{2C}}\left[\sqrt{rr_0(r_0-r)}+r_0^{3/2}\arctan\sqrt{\frac{r_0-r}{r}}\right]} \tag{29}$$

が得られる。再び余計な作業であるが，確認作業として両辺の微分をとると，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}t&=\sqrt{-\frac{\mu}{2C}}\left[\frac{1}{2}\frac{\sqrt{r_0}(r_0-2r)}{\sqrt{r(r_0-r)}}-\frac{r_0^{3/2}}{2}\frac{1}{\sqrt{r(r_0-r)}}\right]\mathrm{d}r\\&=-\sqrt{-\frac{\mu r_0 r}{2C(r_0-r)}}\end{aligned} \tag{30}$$

となり，確かに，時刻 t における相対速度(式(24))と一致している。また，引力により2電荷が衝突するまでの時間 t_{coll} は，式(29)に $r=0$を代入して，

$$t_{\mathrm{coll}}=\frac{\pi}{2}\sqrt{-\frac{\mu r_0^3}{2C}} \tag{31}$$

となることがわかる。

斥力の場合の式(20)と引力の場合の式(29)をもとに，時間とともに2電荷間の距離が変わる様子を図示してみることにする。式(20)を少し変形して，

$$t=\sqrt{\frac{\mu r_0^3}{2C}}\left[\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2-\frac{r}{r_0}}-\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{r/r_0}-\sqrt{r/r_0-1}}{\sqrt{r/r_0}+\sqrt{r/r_0-1}}\right)\right] \tag{32}$$

となるから，$x\equiv r/r_0>1$を定義し，一般化(無次元化)した距離と時間で表現すると，

$$t\Big/\sqrt{\frac{\mu r_0^3}{2C}}=\left[\sqrt{x(x-1)}-\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right)\right] \tag{33}$$

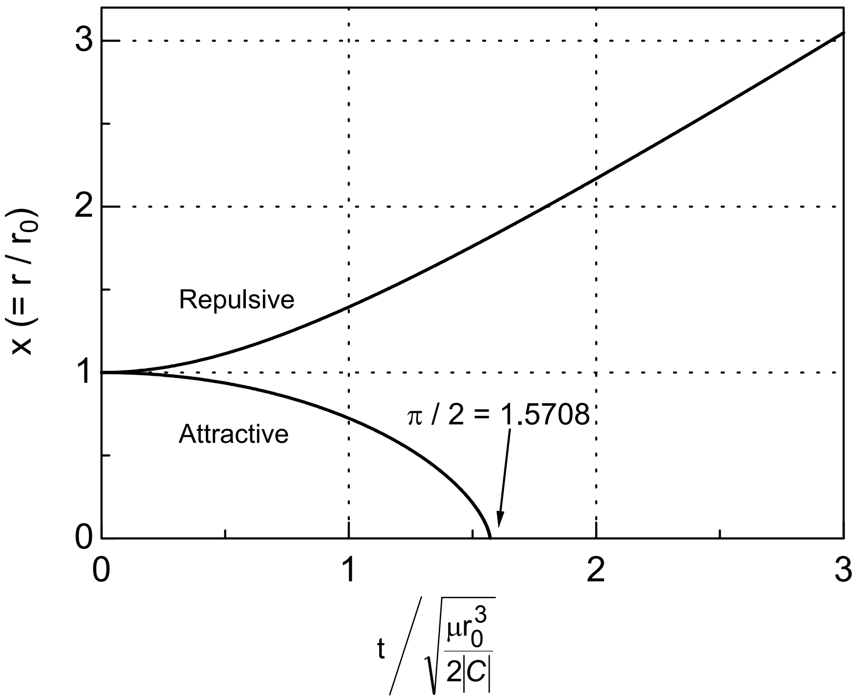
となる。また，式(29)を同様に変形し，$x\equiv r/r_0<1$を導入すると

$$t\Big/\sqrt{-\frac{\mu r_0^3}{2C}}=\left[\sqrt{x(1-x)}+\arctan\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right] \tag{34}$$

となり，式(32)と式(34)をプロットすると図のようになる。

具体例として，ボーア半径の距離だけ離れて置かれた陽子と電子がどれくらいの時間で衝突するかを計算してみる。計算に必要な諸量を書き出すと，

・ボーア半径(r_0) = 5.29×10^{-11} m
・陽子の質量(m_1) = 1.67×10^{-27} kg
・電子の質量(m_2) = 9.11×10^{-31} kg
・電気素量 = 1.60×10^{-19} C



・真空の誘電率 $= 10^7/(4\pi c_0^2)\ \mathrm{N^{-1}\ C^2\ m^{-2}}$ [ただし，$c_0 = 2.99792458\times10^8$(無次元)]
であるから，

$$\mu = 9.11\times10^{-31}\ \mathrm{kg} \quad (\because\ m_2 \ll m_1)$$

$$C = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} = -\frac{(1.60\times10^{-19})^2 c_0^2}{10^7} = -2.30\times10^{-28}\ \mathrm{N\,m^2}$$

また，時間のスケール因子は

$$\sqrt{-\frac{\mu r_0^3}{2C}} = 1.71\times10^{-17}\ \mathrm{s}$$

となるから，衝突するまでの時間(式(31))は，

$$t_{\mathrm{coll}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{-\frac{\mu r_0^3}{2C}} = 2.69\times10^{-17}\ \mathrm{s} \cong 0.027\ \mathrm{fs}$$

という値になる。つまり，もし，水素原子の電子が陽子のまわりを回転しなくなると，わずか0.027 fs 後に原子はつぶれてしまうことになる(正確には中性子とニュートリノになる)。

ここまで，2電荷粒子間を対象に話を進めてきたが，万有引力も距離の2乗に反比例する力であるから，定数 C を万有引力に対応させて書き換えれば，これまでに導出した式をそのまま利用することができる。万有引力の場合は，式(6)が

$$\mu\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \equiv \frac{C}{r^2} \tag{35}$$

の形となり(Gは重力定数)，$C = -Gm_1 m_2$であるから，t_{coll}は

$$t_{\mathrm{coll}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{-\frac{\mu r_0^3}{2C}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}} \tag{36}$$

となる。ここで，計算に必要な諸量は，

・地球と月の距離(r_0) = 3.84×10^8 m

・地球の質量(m_1) = 5.97×10^{27} kg

・月の質量(m_2) = 7.34×10^{22} kg

・重力定数(G) = 6.67×10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}

であるから，

$$t_{\mathrm{coll}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_0^3}{2G(m_1+m_2)}} = 1.32\times10^4 \text{ s} = 3 \text{ hr } 40 \text{ min}$$

となる。もし，月が地球の周りを回るのをやめると，3 hr 40 min 後に月と地球は衝突することになる(といっても，これこそまさに杞憂である)。

付録：式(6)から式(13), (24)を導く別法

式(6)から得られる

$$\ddot{r} = \frac{C}{\mu}\frac{1}{r^2} \tag{37}$$

(ドットは時間微分の意味)の両辺に$2\dot{r}$をかけて,

$$2\dot{r}\ddot{r} = \frac{2C}{\mu}\frac{\dot{r}}{r^2} \tag{38}$$

となる[1]。この左辺は$(\dot{r})^2$を，右辺は$-(2C/\mu,\ 1/r)$を時間で微分したものに等しいから，式(38)の両辺を時間で積分すると,

$$(\dot{r})^2 = -\frac{2C}{\mu}\frac{1}{r} + D \tag{39}$$

が得られ(Dは積分定数),

$$\dot{r} = \pm\sqrt{-\frac{2C}{\mu}\frac{1}{r} + D} \tag{40}$$

となる。初期条件として，2粒子間の距離が r_0，相対速度がゼロであるとすると，積分定数は

$$D = \frac{2C}{\mu}\frac{1}{r_0} \tag{41}$$

で与えられ次式が導かれる。

$$\dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2C}{\mu}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)} \tag{42}$$

斥力の場合，$\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t > 0$であるから根号の前の正号を採用し，$C > 0$かつ $r_0 < r$であるから,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2C}{\mu}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)} = \sqrt{\frac{2C(r - r_0)}{\mu r_0 r}} \qquad (r_0 < r) \tag{43}$$

と変形でき，式(13)が得られる。また，引力の場合は，$\dot{r} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t < 0$であるから負号を採用し，$C < 0$かつ $r_0 > r$であるから,

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{-\frac{2C}{\mu}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} = -\sqrt{-\frac{2C(r_0 - r)}{\mu r_0 r}} \qquad (r_0 > r) \tag{44}$$

となり，式(24)が得られる。

---

[1] 変数の上に書かれた点(ドット)は時間微分を意味する。

Coulomb 相互作用による2電荷の運動

2004年　2月　8日　初版第1刷
2012年 10月 21日　第2版第3刷

著者　山﨑 勝義
発行　漁火書店

検印　山﨑

印刷　ブルーコピー
製本　ホッチキス