数学学習における一般化の機能に関する研究

早田　透

目次

序章：本研究の目的と方法

本研究の目的と方法

日々の授業という営みの中で，学習者は数学を学習している。そして数学教育研究とは，個々の研究における程度の差こそあれ，数学を学習するという営みを研究の対象とする研究領域である。では，数学を学習するとはどういうことだろうか。個々の知識– 定理や性質といった –を知るようになることだろうか？ 勿論，そういった知識を知るようになることは非常に重要であり，知識がなければ思考することはできない。しかし重要な事実として，数学の知識は陳腐化しない上に，高度に情報化された現代においてそれらの知識はいつでも容易にアクセス可能なものになっていることが指摘される。従って，重要なのは知識そのものよりもむしろ，それら知識を知るようになる過程と，その過程で何を学ぶのかという点である。

こうした背景から，筆者は学問としての数学が有する諸知識ではなく，それら諸知識に裏付けられた活動，数学をする活動に価値を求める。そうした活動を経た結果，典型的には新しい知識が構成されるように，学習者達が何らかの点で変化することが期待される。この変化は必ずしも学習者にとって自覚的なものではないかもしれず，教師の視点から観たときに「学習」と呼ばれるのである。

数学をする活動には，論証する活動など本質を成す活動が幾つか認められるが，その内で最も重要な活動の一つが，ある対象についての推論やコミュニケーションの適用範囲を広げる，一般化する活動である。一般化する活動は全ての人が行っており，数学的認識の本性そのものである活動であると共に，教育的にも極めて高い価値が認められる。何故ならば，前述したような意味で学習を捉えたとき，ある認識

主体は一般化する活動を抜きにして，新しい数学を知るようになることは殆ど不可能だからである。

こうした重要性を持つ一般化であるが，実際の授業においては必ずしも十分に実践されてきていないことが指摘されている。しかも，学習者が十分に一般化が出来ないだけではなく，一般化しようとさえしないという実態までもが認められている(cf. Tatsis & Tatsis, 2012, p. 7)。こうした実態の原因が，例えば学習者の脳や神経といった生理的な発達に起因していたり，特定の知識（代数など）の習得度合を初めとする認知的能力の欠如に依るものであれば，発達の度合に合わせたり，それらの能力の育成を考えればよいであろう。しかし実際には，極めて幼い普通の学習者達にさえ，その精神に一般化する能力と傾向が備わっていることがはっきりしている(cf. Tatsis & Tatsis, 2012, p. 7)。一般化する能力と傾向があるにも関わらず一般化しようとしないという状況は一見すると奇妙であり，ここに何らかの問題があることが指摘されよう。

ここで，我々の日常生活では具体的（特殊）な事柄で十分であることが多く，かえってその方が便利でさえあることに注目したい。加えて，（数学においてさえ）何か解らないことがあったときに「具体的に教えて/説明して」とよく言うように，具体的な事柄は一般的な事柄よりも簡単でさえある。このような理由から，学習者の観点からすると「私達は何のために一般化をするの？」と疑問を持つことは自然であろう。

学習者にとっての一般化の意味・目的・実用性を纏めて「一般化の機能」と呼ぶことにすると，一般化の機能は先行研究においてさえ殆ど検討されてきていないことが指摘される。このため，一般化の機能

は直観的，ないしは感覚的に理解されていると考えられ，学習者が感じる疑問へと明示的に答えるものになっていない。換言すると，一般化の機能は学習者達のみならず，数学教師や数学教育研究者にとってさえ不明瞭なのである。このことが一要因となり，一般化する能力と傾向が備わっているにもかかわらず一般化しようとしない，という状況を引き起こしていると考えられる。

こうした理由より，本研究の目的は次の様に設定する。

《 本研究の目的 》
数学学習における一般化の機能を学習者の観点から同定すると共に，それらの機能と学習者が，学習の中でどの様に関わりあっているかを明らかにする。

本論文の内容と構造

研究目的を達成するため，本研究は次の三つの研究課題を立て，その解決に臨む。

[研究課題1] 数学学習において一般化が有する機能の全体像を同定すること

[研究課題2] 研究課題1で明らかにされた一般化の機能がどの様な構造を持つかを明らかにすること

[研究課題3] 研究課題1と2を踏まえ，実際の学習において学習者は一般化の機能とどの様に関わるかを明らかにすること

一般化の機能を同定するという主目的に取り組むのが研究課題1であり，学習者の観点から捉えた一般化を反省することで，一般化の機能が同定される。しかし，一般化する活動自体が連続的に発展するという特徴を持つことから，実際の学習においては一般化の機能も相互に関連しあっていることが予想される。このため，研究課題1で得られた成果をよりよく理解するために，研究課題2では一般化の機能がどの様な構造を有しているかを，理論的に明らかにする。ここで理論的に研究課題1と2に取り組んでいるため，実際の学習を調べ，研究課題1と2の成果の整合性と限界を調べる必要が認められる。このため，研究課題3が設定されている。

本論文は，序章と終章を含めた6章から構成される。「第1章：数学学習における一般化研究の成果と課題」においては，先行研究を検討することで，一般化の機能という研究対象が未だに踏査されていないことを示すとともに，その研究が教育研究上価値を有することを論じる。「第2章：数学学習における一般化の機能」は本研究の中心となる部分であり，先行研究が示した，学習者の観点から捉えた一般化する活動に基づきながら，一般化が有する6つの機能を同定していく。従って，第2章の成果が本論文の主たる成果となる。「第3章：一般化の機能の順序に基づく構造」では，各々の機能が働く順序に注目することで，一般化の機能が有する構造を明らかにしていく。ここで第1〜3章は，純粋に理論的な研究である。従って，学習者の実態を初めとする実践的側面は具体的に説明するために言及する場合を除き，一切反映されていない。これに対して，例えば実際の学習者の学習を観察して機能を同定するべきだ，といった意見が想定されよう。しかし，本研究の背景で述べたように（そして第1章でより詳しく述べるように），

一般化の機能についてはまだ殆ど何も研究されてきていない。このため，我々はある現象に対して何らかの枠組みを用いて見える点しか見ることが出来ないという，観察の理論負荷性(ハンソン, 1986)の問題に直面することになる。言い換えると，一般化の機能についてまず理論的に検討しなければ，一般化の機能を観察することは不可能なのである。とはいえ，数学教育研究は理論と実践の両側面に関わるべきであるし，上記のことを逆に言えば，理論的枠組みが出来上がりさえすれば実際の学習者を観察することで何か得られることが期待される。そこで「第4章：一般化の機能と学習者の関わり方」では，同定された一般化の機能とその構造を用いて実際の授業を設計・実践して観察することを通して，第1〜3章の考察結果の整合性と限界を明らかにする。こうした各章の構成と，研究課題との対応を図示すると図0−1のようになる。

尚，本研究において一般化の機能を検討するが，そこで得られる成果は学習段階や内容を問わないものとなる方法を採っている。これは，数学教育の理論において，進展していく学習全体を通底する理論化が必要である(cf. 小山, 2010)と考えるためである。それにも関わらず，本研究の主たる関心を，特に第4章の授業設計と教授実験では顕著に中学校に置いている。これは現在の数学教育を巡る状況が理由である。社会が激しい変化に晒される中，中等教育の重要性と，中等教育に向けられる期待の双方はかつて無いほど高まっていると言っていいだろう。中等教育の入り口である中学校での学びは，当然だが小学校までの学びを一般化することによる学びが多くを占めている。しかしながら，必ずしもその様な一般化がうまく行っているとは言い難い状況であり，管見の限りではこの問題はあまり取り組まれてきてもいな

い。こうした状況への貢献を期待し，本稿の主たる成果に影響はないものの，参照される殆どの事例と，設計・実践される全ての授業を中学校のものにしていくこととする。

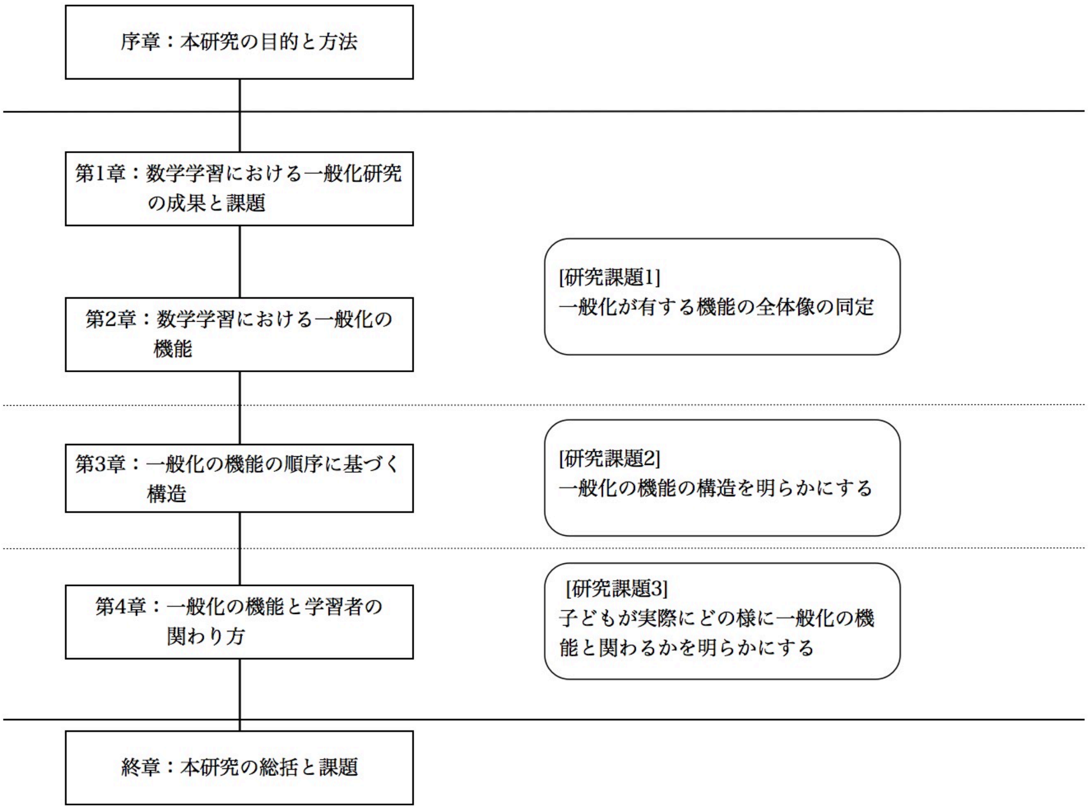


図0−1．本論文の構成

序章の引用・参考文献一覧

Tatsis, B., M., & Tatsis, K. (2012). *Generalization in mathematics at all educational levels*. Rzeszów, Poland: Rzeszów University.

小山正孝. (2010). 《算数教育における数学的理解の過程モデルの研究》聖文新社

ハンソン, N. R. (1986). 《科学的発見のパターン》 (村上陽一郎 訳). 講談社 (原著版は1958年)

第1章：数学学習における一般化研究の成果と課題

序章で述べたように，本研究の目的は数学学習における一般化の機能，即ち一般化の意味・目的・実用性を明らかにすることである。しかしながら，「一般化の機能」を問いの対象として明確に扱った研究は，管見の限り認められない。従って，一般化の機能が何故研究の対象たり得るかということを議論する必要が認められよう。そのために，第1章では一般化研究を概観し（1.1節と1.2節），その課題から本研究の問いが成立することを示す（1.3節）のが目的である。

1.1 国際的な一般化研究の動向

序章で示した様に，本研究は一般化の意味・目的・実用性を《一般化の機能》と呼び，三つの研究課題を通して，その全体像と教育的意義を明らかにすることが目的である。しかしながら，この様な研究上の問いは何故成立し得るのであろうか。結論から言えば，その理由は一般化の機能が重要であるにも関わらず，先行研究においては意図的に研究の問いの対象から外されているか，または「一般化は有用である」という感覚的な合意に依拠しているためである。このことを明らかにするため，まずは先行している主たる一般化研究の問いと成果を明らかにすることが肝要であろう。

数学教育全般に渡って一般化が議論される際，最初期に基礎文献となったのはGeorge Polya(ポリヤ, 1954; 1959 他)による文献である。著書の中で，氏は一般化の重要性を「問題を解く」という観点から丁寧に述べているのみならず，一般化が数学的認識全般にとって重要であることを指摘している。

しかしながら，国際的に見れば一般化は1960−70年代ごろまではそれほど注目されてこなかった。当時の学習観は今で言う教え込みや，IPI (Individually Prescribed Instruction; cf. Erlwanger, 1973)のような，一般

から特殊へと教えるような学習が中心だったためである。勿論，これらの学習においても教える内容自体は特殊から一般へと発展していく（例えばピタゴラスの定理を学んだ後に三角比を学ぶといった具合に）のであるが，個々の命題や数学について一般的に成り立つことを教え，その上で特殊へと当てはめていくような学習が展開されていたと言える[1]。

時代を経て，こうした学習の問題点が明らかになり，徐々に批判されていく。特に，Frudenthal (Freudenthal, 1973 他)による再発明原理の提示，Erlwanger (1973)によって「学習者の考え［conception］」の重要性が認められたことを端緒とするいわゆる構成主義への注目などによって，こうした実態が真剣に反省され，学習者達自らが活動を通して数学を作り上げることの重要性が広く認められるようになり，一般化の重要性に強く光が当たった。というのも，我々が数学を自ら作り上げようとしたとき，その数学を事前に知っているのでもない限りは，特殊から一般へと推論する他に方法は無いからである(Beth & Piaget, 1966)。

ただし，我が国においてはこの様な動きは必ずしも完全には当てはまらない[2]。というのも，明治期に我が国が教育を導入していく過程を経て結実した，いわゆる「数理思想」に基づいた一般化を意図した教育が（たとえ実態が必ずしもそうでなかったとしても）意図されていたためである。その証拠を，我々は塩野直道らが編纂した尋常小学算

1 ユークリッド原論の記述の仕方が典型である。

2 勿論，他の国でも一般化に注目をした研究が早い時期で成されていたことはあろう。例えばKrygowska (cf. Krygowska, 1979)はポーランドで，一般化に関する優れた研究を残している。しかし，国際的な動向としてはまだ主流となっていなかったように筆者には思われる。

術（緑表紙教科書）に認めることが出来る。例えば尋常小学算術五年生の記述(文部省, 1940, p. 3−4)を観ると，次の様な展開が意図されている。まず最初に教科書に具体的に図示された扇形（半径などの具体的な値は与えられていない）の二倍の大きさの扇形を厚紙に書き写し，切り取って丸める。次に，底面にあたる部分に円で蓋をすることで円錐を作り，高さや底面積を測定する。そして円錐の中に砂を詰め，体積を求めると同時に，同じ底面積・高さを持つ円柱を作り，体積を比較する。こうした活動の結果として，円錐の体積の求積方法である，「底面積×高さ÷3」を導くことが意図されている。

このような記述の仕方は，最初に一般的に成り立つ事柄（円錐の体積公式）を提示するのではなく，具体的・特殊な事柄（実際に大きさや形を持った円錐）を提示し，一般化によって学習者自らに数学を作らせようという意図が見てとれる。こうした背景もありながら，例えば活動主義(平林, 1987)や，数学的な見方・考え方(中島, 1981)，構成的方法(伊藤, 1993)といった形で一般化が研究されていたことが指摘される。

国内外でこうした背景の違いはあるにせよ，少なくとも1990年代までは（あるいは今も），一般化研究における主たる問いは「数学学習における一般化とは何か？ どの様な認識・活動であるか？」であった。というのも「ある対象について推論するときにその対象を含むより大きな領域へと推論が移行することを一般化と呼ぶ」という一般化の大まかな実像はポリヤ (1959)などによって提示され（あるいは日常的に用いられることで），合意されていたのであるが，その詳細な実態は必ずしも十分に合意されていなかったからである。例えば，日常生活における一般化と，数学や数学学習における一般化の違いはかな

り不明瞭である。「大抵は『一般化する』や『一般化』という基本的概念をトートロジーや『堂々巡り』を使うことなしに定義できないであろうが，そうであったとしても筆者はこれらの用語によって何が意味されるかの説明を与えたいし，また可能な限りそうしなければならない(Dörfler, 1991, p. 63)。」という言葉は，端的にこの課題意識を表している。この問いに答えようと試みた代表的な研究として，Mason(1989)とDörfler (1991)による一般化研究が挙げられる。

1.1.1 Mason(1989, 1996)の一般化論：繊細な注意の移行

Mason (1989)を初めとするMason氏による一連の一般化研究は，個人に着目して一般化を明らかにしようとした研究であり，特に心理学的側面に大きく関心を寄せる。氏が主張するのは，一般化において学習者がある事柄を何かの一般性の特殊として認知することである。つまり，個々の事柄や規則を見つけることは一般化過程において基礎に過ぎず，むしろそれらの事柄から可能性をもつ事例全体へと繊細に注意を移行［delicate shift of attention］し，同定された共通性を拡大させることこそが一般化の核心である。これは後述するDörfler (1991)による経験的一般化への批判と，本質的には同じである。

こうした注意の移行に際して，氏は「特殊の中に一般を見る」ことと，「特殊を通して一般を見る」ことの重要性を強調する。これらについて，氏は*examplehood* [3] を経験することの重要性を指摘する。「注意の場所，焦点，あるいは構造のシフトの基本的な形式あるいは経験の一つは *examplehood* という観念である：何かを突然，より広範な一般性

3 直訳すると《事例化》となるが，ここでは原語の意図を伝えるために敢えて翻訳せず用いている。

の「単なる」事例であると見做すのだ。*examplehood* を経験することは，何かがその前では全く異なるモノであったのに，今は何かより一般なものの事例として見做され，クリスタル化あるいは濃縮化のような効果がある(Freudenthal, 1978, p. 272)：これはエネルギーの解放であり，類似した状況を扱う必要性へと注意の量を減ずるのである。」即ち，或る事例を特殊として見ることで，如何なる事柄がその事例を特殊たらしめているかを同定しなければならない。繰り返しになるが，これは単に共通性や特徴に気付くということに対して，心理学的に隔たりがある。

Mason氏はこうした点を指摘することで成果を挙げた一方で，幾つかの課題が残されている。特に「繊細な注意の移行」が何故起こるのか（あるいは，起こらないのか）といった点には言及を避けていることが指摘される。そのため，未だに実際の学習において注意の移行は十分に達成されてきていない(Tatsis & Tatsis, 2012, p. 7)。

1.1.2 Dörfler (1991)の一般化論：記号の対象化と変数の構成

Dörfler (1991)の関心は個人のみならず，一般化が社会的に自らの認知を開いていく過程にあり，特に一般化の普遍的な様式そのものに関心を寄せる。氏の結論は「<u>一般化とは変数の構成を意味する</u>。この文脈で，ある「変数」とは（主体の認知において）変化する認知的モデルであるか，または客観的知識の一部でもあると見做され得る(p. 84；強調原文)。」としており，一連の過程を一般化のモデルとして精緻化している。

Dörfler氏は何よりもまず，Aristotleによって述べられた，いわゆる経験的一般化の問題点を指摘している。ここで経験的一般化とは，複数の対象や状況から，単純な比較によって共通の性質や属性を発見し，

それらを一般的なものであると認めて記録するような過程である。全てをここで述べることは難しいものの，主要な批判点を述べておきたい。まず第一に，その特性から経験的一般化において，一般性は対象や状況の内に既有のものであると見做されなければならない。しかし「共通」とされる特性が何処から来るのか，という問いに答えることが出来ない。第二に，経験的一般化においては「共通」であるとされたことが，何故「共通」であるかは不明なままである。第三に，たとえこれらの問題点に目を瞑ったとしても生じる決定的な問題として，異なる対象と状況同士は殆どの場合多くの共通性を持つが，どの様にしてそれらの内の一つが本質的であり，決定的であるかについては単純な比較からは決して導かれ得ない。実際，Dörfler (1991)以降の研究で明確にされたこととして，「共通」なこと（パターン）を認知すること自体は比較的容易であるものの，個々人によってどんな事柄を認知するかが大きく異なり，しかもどんな「共通」の事柄が有用であるのかを判断することの方がより本質的で困難な問題であることが解っている(Zazkis & Liljedahl, 2002)。

こうした経験的一般化・抽象への批判と反省に基づき，最終的にDörfler (1991)が到達した二つの主要な結論は，「一般化とは活動である」ということと，「記号の使用が数学における一般化の本質である」ということである。即ち，一般化において何が重要で本質かを決定するのは活動であり，活動を通して抽象された事柄である，ということが一つ。活動を通して抽象された不変性は物理的対象から切り離されているので，その記録のためには記号が必要であり，またその記号は最初対象の特徴を有しているが徐々に対象から切り離されてゆき，最終的には記号そのものが対象化されることで潜在的には無限の

参照領域を持つようになる「記号の対象化」が起こるということが一つである。特に記号の使用という側面はDörfler (1991)にとって重要かつ本質的であり，Piagetの反省的抽象に基づきながらも記号という側面をも加えた「構成的抽象」として抽象の再規程を行っている。

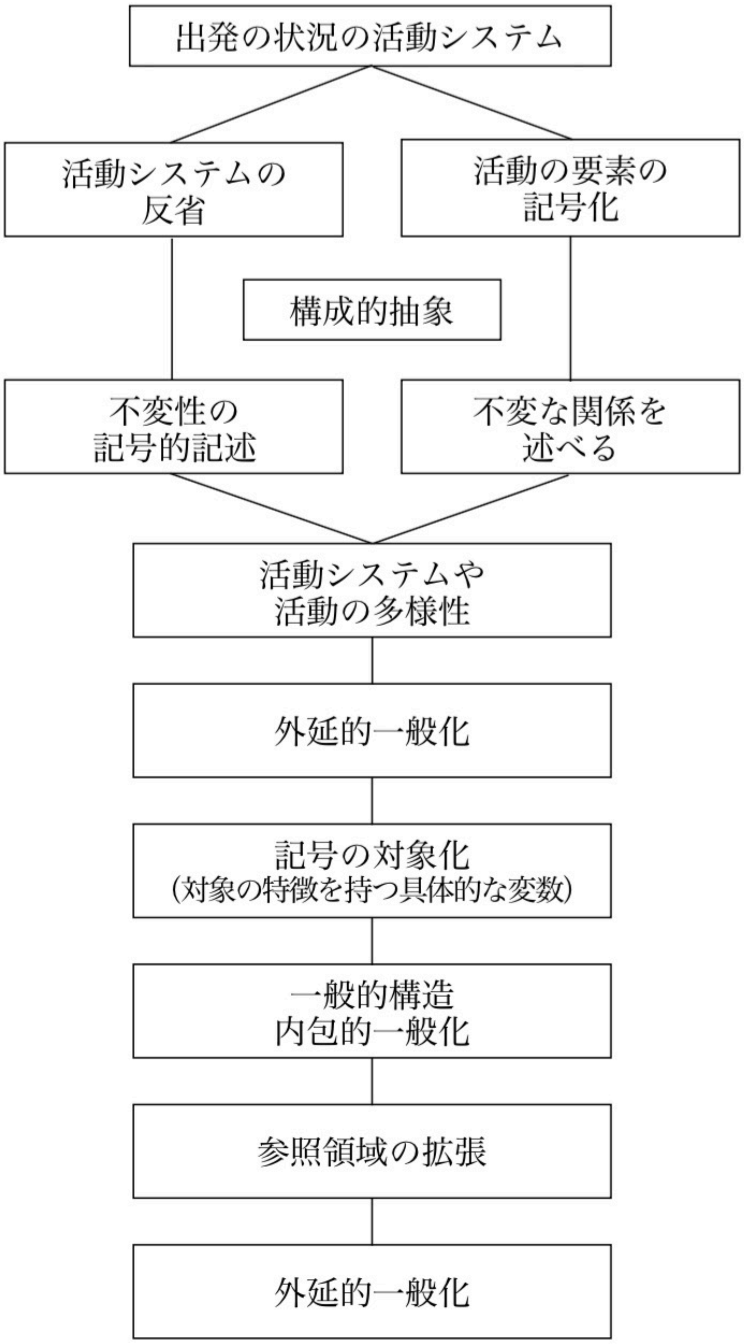


図1−1：Dörflerの一般化モデル (Dörfler, 1991, p. 74；拙訳)

以上の様な（ただし，概観だが）理論的検討を元に，図1−1の様な一般化モデルを提案するのが，氏の主たる結論である。ここで氏のモデルは明らかに，理想的な学習者の理想的な一般化をモデル化していることが指摘される。モデルは上部から下部へと流れる一種のフローチャートであり，その流れは時間であると解釈するのが自然であろう。このことからも明らかな様に，Dörfler (1991)は記号を通して明示的に観察され得る点のみを研究の対象とし，その他の点については意図的に言及を避けていることが指摘される。

1.1.3 近年の動向：一般化に基づいた研究

ここまでに述べた研究などによって，（例えそこに問題が認められたとしても，一応は）一般化の基礎が固まって以降，一般化に基づいて教育にその焦点が当たってきたと言える。これは一般化そのものに関する研究がある程度成熟したということを示していると考えられるが，その象徴が2012年に「Generalization in mathematics at all educational levels」をテーマに行われた国際学会Children's Mathematics Education (CME)と，テーマと同名の書籍(Tatsis & Tatsis, 2012)である。同書には複数の論文が収められており，そのテーマにしたがって5部（Part）に分けられている。これらの部は順に

第1部：理論的観点から捉えた一般化

第2部：幼少期の一般化［Early Generalization］

第3部：第1学年における一般化の異なる様相の発達

第4部：一般化を刺激する学習状況の創成

第5部：教師の一般化に対する意識と技能の拡大

として構成されている(Tatsis & Tatsis, 2012, pp. 3-5; 拙訳)。こうした部の分け方を観ることは，現在の一般化研究が有している課題意識，即ち研究全体の動向を知る上で一つの参考になると考えられる。

「第1節：理論的観点から捉えた一般化」の内容は，明らかに「一般化とは何か」に対する更なる追求であり，例えば「日常生活における思考過程と数学的文脈における一般化(Generalization in everyday thought processes and in mathematical contexts；Vinner, 2012)」といった論文が掲載されている。ここでは，Dörfler (1991)などでは議論されてこなかった内容領域による違いや，文脈による違いといった点に焦点を当てるといった研究がなされている。

一方，「第2節：幼少期の一般化」と「第3節：第1学年における一般化の異なる様相の発達」は共に幼少期〜小学校第1学年と，比較的幼い学習者に焦点を当てた一般化研究である。このような節が用意されている理由として，掲載されている論文の殆どが早期代数［early algebra］との関係を大なり小なり有しているからである。例えば「幼い学習者達が加法構造の問題を解く(Mamede & Soutinho, 2012；2節に掲載)」といった論文や，「早期代数における一般化の側面(Cusi & Navarra, 2012；3節に掲載)」といった論文である。

ここで早期代数とは，近年起こった数学教育研究上の大きな研究主題の一つであり，小学校段階などで単純な計算そのものよりも，むしろそのパターンや構造へと着目させるよう促す(cf. Zazkis & Liljedahl, 2002)学習である。従って，パターンの認知や一般化とも関わる，非常に大きな研究領域である。伝統的に，この種のパターンや構造の探求は中学校での方程式の導入以降のみに行われていた（後述するように，少なくとも我が国はこの例外である）が，より幼い段階でもこう

したことは可能であるのみならず，数学的思考全般の発達に有用であることが近年認められてきた。ここで「早期《代数》」という名前ではあるものの，いわゆる文字や変数の導入を必ずしも伴うものではなく，図，式，準一般数，言葉による表現等々が幅広く含まれている。とはいえ，やはり大きな目的の一つは文字を早期に導入することにある(Malara, 2012, p. 65)。Dörfler (1991)による「一般化とは変数の構成を意味する。この文脈で，ある「変数」とは（主体の認知において）変化する認知的モデルであるか，または客観的知識の一部でもあると見做され得る(Dörfler, 1991, p. 84；強調原文)。」といった指摘，あるいはMason (1996)によって一般性の表現と代数の間の関連が強調されたことを受け，一般化に基づいて，あるいは一般化するという活動を通して代数的な能力を育むということが大きな課題として取り組まれてきたと言える。こうした活動が早期に取り組まれるようになった要因は複合的であるが，大きな理由の一つに「多くの人々が考えているであろうことに反して，一般化は幼い学習者達においてでさえ観察され得る(Tatsis & Tatsis, 2012)」ことが共有されるようになったことが大きいであろう。

「第4節：一般化を刺激する学習状況の創成」は，学習者が一般化を十分に実施できていないという現状を踏まえ，その改善のための試みが集められた節である。事例研究やICTの活用を踏まえ，様々な取り組みがなされている。他の節と比べて，そのテーマの関係上，焦点を実践面に向けた研究が主である。

「第5節：教師の一般化に対する意識と技能の拡大」もまた，一般化そのものではなく，むしろ一般化に基づいたアプローチに関する論文が集められている。とはいえ，その対象は学習者ではなく教師であ

り，一般化を通して教師を育てたり，教師の一般化に対する態度や技能を観察したり育てたりといったことに焦点が当たっている。これは近年，レッスンスタディを初めとした教師教育に対して大きな注目が集まっているためである。

以上の様に，近年の国際的な数学教育研究の主流は，一般化そのものの探求というよりも，一般化に基づいて研究をしてきたという傾向が指摘出来る。このことは上記「Generalization in mathematics at all educational levels」の他にも見て取ることができる。例えば，数学教育でもっとも権威が高いと一般的に言われる雑誌である「Educational Studies in Mathematics」で，1995年から2014年末日までの20年間で投稿された論文の内，タイトルにGeneralizationを含む物として4本の論文が該当するが，それらの全てがパターンの一般化に関わる論文であり，一般化そのものを問う研究というよりも，むしろ一般化に基づく研究であると言える。同様の条件で雑誌「ZDM」を調べると，2008年の「From Patterns to Generalization: Development of Algebraic Thinking」という特集号に掲載された論文が大半で（当然その全てが早期代数に関わるもので）あり，その他の号で該当する論文はわずか1本である（ただしZDMは原則として，各号のテーマに基づいたものしか掲載していないということが考慮される必要があるが）。こうした事実もまた，近年の国際的な一般化研究が，一般化そのものに関わる研究から，一般化に基づいた研究へとシフトしているということを示していると言える。

1.2 我が国における一般化研究：一般化と拡張

1.1で述べた国際的な動きとはやや独立に，我が国では比較的早い段階から一般化に関する研究が進んでいた。前述したように幾つかの研

究が優れた成果を挙げており，例えば平林 (1987)が論じる活動主義において，《活動》のうち，一定程度を一般化が占めている（勿論,「一定程度」なのは拡張や論証など幅広く含んでいるためである）。こうした研究の成果を受けた側面もあって，前述した状況とは異なり，我が国においてはパターンや構造を探求するような活動が，少なくとも意図されたカリキュラムである学習指導要領，実施したカリキュラムである教科書において取り組まれてきた。伊藤 (1993)が指摘するように，一部の例外（氏が挙げるのは小学校の「拡大と縮小」であるが）を除けば，我が国の学習は活動としての一般化に早くから取り組んできたと言ってよい。

こうした側面に支えられ，Dörfler (1991)のような理論化が不十分という点はあったとしても，「一般化とは何か」という問いに対して，優れた洞察が時代を先取りする形で成されている。ここで特に注目することが出来るのは中島 (1981)による見解である。

中島 (1981)は一般化という用語で広く知られている認識の中に，その困難性において本質的に異なる《一般化》と《拡張》を見出し，区別する必要性を主張した。中島 (1981)の考えを基にして拡張を整理し，定義した岩崎 (2003)に基づくと，一般化と拡張は次の様に区別される[4]。

4 ここでの定義は，岩崎 (2003)による拡張の定義に基づいた，筆者による拡張と一般化の定義である。また，モデル図は友定, 姫田, & 溝口 (2006)による拡張のモデルに基づいた，筆者による一般化のモデルである。

一般化・・・領域Dで意味Mが見出され，Mの成り立つ範囲が，DからDを含むより大きな領域D'へと広げられたとき，D'はDの一般化である

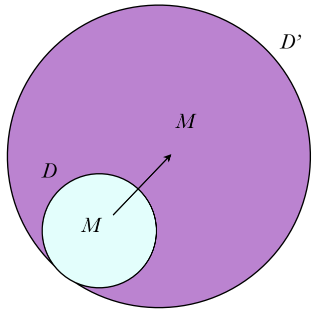


図1−1：一般化のモデル

拡張　・・・領域Dで意味Mが成り立つとき，Dを含むより広い領域D'において成り立つ意味M'が，Dに限定したときMと同値であるようにDをD'へと埋め込んだとき，M'はMの拡張である

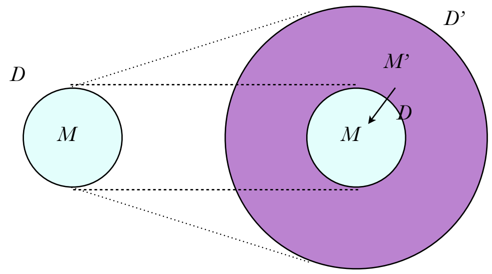


図1−2：拡張のモデル(友定, 姫田, & 溝口, 2006, p. 9)

例えば，8＝3＋5，12＝5+7，20＝3+17という三つの計算（D）を見たとする。このとき，各々の左辺が偶数に，右辺が素数二つの和になっている（M）と気付いたとき，全ての2より大きい偶数（D'）は素数二つの和で表すことが出来る（M）かもしれないと気付くことができる。この事例は一般化である。なぜなら，領域がDからD'へ広がったとしても，見出されたMには変更が加えられていないからである。こ

こで主体が見る必要があるのは，DとD'の関係であり，まさに全体へと注意が移行していると言える。

一方，主体が自然数の乗法（D）に対して同数累加（M）という考え方を持っているとしよう。この主体が，例えば0.2×0.3といった小数の乗法（D'）に遭遇したとき，同数累加では解決することが出来ない。従って，ここで新しい乗法の意味である比の関係（D'：0.2を1と見做したときの0.3に相当する値）を採択する必要がある。乗法についてのこの新しい意味は，しかし自然数の乗法（D）に限定すれば，同数累加（M）と同値であり，このことの認識を以て小数の乗法の特殊な場合として自然数の乗法が認識される。この事例は拡張である。小数の乗法の意味（D'）は同数累加（D）から作られたわけではなく，後から埋め込まれているからである。

勿論，一般化の分類というだけなら他にいくつも認めることが出来る。例えば，Dörfler (1991)は一般化を外延的一般化と内包的一般化に分類しており，これ自体は完全に正しい（岩崎 (2007)が指摘するように，論理学の範囲を超えていないという問題は認められるが）。しかしながら，分類にとって重要なのは分類の正誤ではなく，その分類がどの様な目的の為になされているかという点である。例えばある漁師が「鯨は魚である」と分類することは，生物学的には明らかな誤りであるが，漁師にとっては何の不都合も無いどころか，好都合である (近藤 & 好並, 1964, p. 23)。生物学者にとっては例えば胚をどの様に育てるか，幼体の間をどの様に過ごすか，ということに興味を持つため鯨をほ乳類と分類することが適切であるが，漁師は実践的見地に立つため，その様なことは関係無いからである。同じように，一般化の分類

もむしろ，どの様なことに役立てるかという観点から観る必要がある。

中島 (1981)による一般化と拡張の分類が優れているのは，それが学習者の視点に立っており，学習者の考えを顕在化する上で極めて有用だという点である。中島 (1981)は事例を用いながら拡張の方がより高度な抽象を必要とすることを説明しており，一般化を「概念または形式のもつ意味についての抽象がそれほど行われないで，その適用範囲を拡げているような場合 (p. 140)」，拡張は意味を捨ててでもある特定の形式を保持する場合(p. 139)として特徴付ける。この特徴は，後に認識論的障害論(cf. 溝口, 2003)や，概念変容論(cf. 真野, 2010)などによってより精緻な説明が与えられている。いずれの理論でも明らかなこととして，一般化と拡張を比較したとき，拡張の方が学習者にとって明らかに困難であり，しかもその困難さが一般化とは本質的に異なるということである[5]。尚，国際的な研究の文脈でも拡張の重要性は説かれており，代表的なものとして，第2章で採り上げるHarel & Tall (1991)が同じ立場を採っている（加えて，一般化により鋭い考察を加えている）。

1.3 先行研究の課題

以上の様に，先行する主たる研究とその成果を概観した。当然，そこには幾つかの課題が認められる。

まず第一に，多くの先行研究は観察者視点から理想的な一般化を同定し，それに基づいて学習者を観察することが出来るようになる理論

5 拡張の典型的場面として，自然数の乗法から小数の乗法への拡張，正の数の加法から負の数の加法への拡張，90°までの三角比から90°以上の三角比（三角関数）への拡張などが挙げられる。これらは，何れも難教材として古くから研究の対象となってきた場面である。

の作り方をしている点が認められる。この姿勢が最も顕著なのはDörfler (1991)であり，氏の一般化モデルとは観察者から見たある理想的な主体の一般化であって，学習者の観点はそこに反映されていない。Mason (1989)の視点も同様である。例えば，学習者が《繊細な注意の移行》や《記号の対象化》をしようと考えて実行しているとは考えにくい。ある学習者の活動を，観察者（≒教師）が見たときに《繊細に注意を移行している》あるいは《記号を対象化している》と判断されるのである。従って，こうした理論に基づいて観察することの有益な側面は勿論認められるものの，実際の学習者の考えを知る上では，必ずしも十分ではない恐れがある。

例えばある学習者が十分に《繊細な注意の移行》や《記号の対象化》が出来ていないとしよう。その判断自体は有益であるが，しかし特に教育という文脈において本当に我々が知りたいのは，その時学習者が実際に何を考えているか，ではないだろうか。それは必ずしも明示的に語られ得ることではないかもしれないが，「形式的かつ直接的に価値付けることが出来ない要素–言われぬままのこと・表現され得なかったりまだ確立されていない知識のような–は，認知され得る知識の推敲，明示化，学習，そして指導において本質的な役割を果たす(Brousseau, Brousseau, & Warfield, 2014, p. 2)。」のである。

この課題に対しては，中島 (1981)の観点が示唆的である。一般化と拡張という区別は（勿論観察者からその様に観察出来るという面も含んでいるが），学習者の観点に立った分類であり，実際の学習者の考えを顕在化させていく上で有効だからである。勿論，一般化も拡張もどちらも非常に価値のある活動であることは言うまでも無い。しかし，学習者から見れば両者はまったくの別物であり，同時に検討する

ことは本研究の目的からすれば不適切である。従って我々は一般化と拡張を明確に区別すると同時に，研究手法として学習者の観点から一般化を捉える，という方法を採る。このため，以降は他の文献への言及や引用を除き，一般化という用語を図1–1の意味でのみ用いることとする。

そして第二に，より重要な課題として，個々の様相が何故促進されるかということについて言及していない点が指摘される。例えば，《記号の対象化》はDörfler (1991)にとって一般化の決定的要因であるが，その直前の《外延的一般化》から《記号の対象化》へと進むきっかけ，推進力，前提条件などは不明なままである。この点にDörfler (1991)は自覚的であり，「活動や出発の状況はどこから来るか，という尤もな問いがある。［中略］教授学的な実行のためには，言うまでもなくモチベーションの問題は不意に出現するし，実際にとても決定的である。どの様にして生徒に活動を実行（あるいはイメージ）させ，踏査させられるのであろうか？ 筆者はこの問に答えることができないし，できるかぎり答えるとすれば生徒と生徒達の興味を唯一知っているであろう教師が適切な出発の状況を選ばなければならないということだけである(Dörfler, 1991, p. 73; 拙訳)。」としている[6]。

Dörfler (1991)のこの見解は，ある程度正しい。個人差，集団としての特徴，教師との関係，単元，興味関心，文化･･･といった諸要素を考慮し，学習者に最適な状況を作ることが出来るのは確かに教師だけで

6 Hejny (2003)は生徒達が一般化する活動を分析するに際して，一般化の出発点にモチベーションを挙げている。ここでのモチベーションは「･･･「私は知らない」と「私は知りたい」の矛盾の一つの結果としての生徒達の精神において見られる緊張 (p.2)」である。従って，ここで指摘されていモチベーションも，Dörfler (1991)が想定している，我々が認知的な推進力と呼ぶものと同じものである。

ある。しかしながら，そもそも一般化がどの様な状況で要請されるものであるか，という点を考察する上ではこの限りではない。即ち，どの様な問題≒状況が一般化を要請するのか，という点の議論が抜けて落ちていることが指摘される。例えば，「3＋5＝8」という一つの問題に学習者が直面したとき，数学的には多様な一般化（例えば「奇数と奇数の和は偶数になる」「2よりも大きな偶数は二つの素数の和で表す事ができる」ということ）が想定され得るが，学習者がそうした一般化を行うことは考えにくい[7]。それは，問題それ自体が一般化を要請していないためである。他方で，問題それ自体が一般化を要請するようなつくりになっていたとしても，個々の生徒達がそれに興味や関心を抱くかどうかは– 実際の教室でよく教師が悩んでいるように –また別の問題である。

即ち，Dörfler (1991)の言う「モチベーション」は，興味・関心をはじめとする，個々人に依存した認知的な推進力[8]と捉えることが出来る。この様な推進力は，生徒達のことを知っている教師が検討するのが適切であろう。他方で，典型的には問題に潜在しているであろう，個々人に依存せず普遍的に求められる認識論的な推進力を明らかにする必要が認められる。こうした認識論的な推進力としては，一般化の意味，目的，そして実用性が想定される。これらは，一般化の本性に基づいた理論的な分析によって明らかになることが期待される。

---

7 ここでは深く採り上げないが，Wittmann (1995)・Müller & Wittmann (2013) などはこの様な計算にパターンを埋め込むことで一般化を促進しようとしている。「奇数と奇数の和は偶数である」という例の場合，奇数同士の加法を幾つか同時に提示することで，一般化が促進される可能性が期待される。

8 岩崎 (2007)は本研究とは異なり，認知的な推進力に着目した上で，そこに社会的な対象にまで拡張されたメタ認知(p. 105)を位置付けている。

勿論，先行研究においてこうした事柄が論じられていないわけではない。特に，一般化がある種の推論やコミュニケーションの適用範囲を拡げるという役割を担っているということについては多くの研究が言及している(cf.Ursini, 1990; Radford, 1996; Zazkis & Liljedahl, 2002)。ただし，それらの研究は一般化の機能を直接の研究対象としていないため，一般化の機能の全体像が不明瞭であることが指摘される。

以上のような背景において，数学学習において学習者から観た一般化の意味・目的・実用性の全体像を探究する必要が認められる。これを《一般化の機能》と呼び，次節以降で探求していくものとする。

第1章の引用・参考文献一覧

Beth, E. W., & Piaget, J. (1966). *Mathematical epistemology and psychology*. Dordrecht, Holland: D. Reidel.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment*. Netherlands: Springer.

Cusi, A., & Navarra, G. (2012). Aspects of generalization in early algebra. In B. Tatsis, M. & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 182-192). Poland, Rzeszów: Rzeszów University.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in Mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. v. Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 1*(2), 7-26.

Freudenthal, H. (1973). *MATHEMATICS AS AN EDUCATIONAL TASK*: D.Reidel.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic. *for the learning of mathematics, 11*, 38-42.

Hejny, M. (2003). Understanding and structure. In M. Mariotti (Ed.), *proc. CERME3 WG3* (pp. 1-8). Bellaria.

Krygowska, A. Z. (1979). *Zarys dydaktyki matematyki* (Vol. część 3). Warszawa: WSiP.

Malara, N. A. (2012). Generalization processes in the teaching/learning of algebra: students behaviours and teacher role. In M. B, Tatsis & T. K (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 57-90). Poland, Rzeszów: Rzeszów University.

Mamede, E., & Soutinho, F. (2012). Young children solving additive structure problems. In B. Tatsis, M. & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 93-102). Poland, Rzeszów: Rzeszów University.

Mason, J. (1989). Mathematical Abstraction as the Result of a Delicate Shift of Attention. *for the learning of mathematics, 9*(2), 2-8.

Mason, J. (1996). Future for Arithmetic & Algebra: Exploiting Awareness of Generality. In N. Bernardz, K. Kieran & L. Lee (Eds.), Approaches to Algebra (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Müller, G., & Wittmann, E. C. (2013). Das Zahlenbuch 2. German: Klett.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (Vol. 18, pp. 107-111). Netherland: Springer.

Tatsis, B., M., & Tatsis, K. (2012). *Generalization in mathematics at all educational levels*. Rzeszów, Poland: Rzeszów University.

Ursini, S. (1990). Generalization processes in elementary algebra: Interpretation and symbolization. In G. Booker, P. Cobb & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proc. 21th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 149-156). Lahti: PME.

Vinner, S. (2012). Generalization in everyday throught processes and in mathematical contexts. In M. B, Tatsis & T. K (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 22-37). Rzeszów: Wydawnictwo.

Wittmann, E. C. (1995). Mathematics education as a “Design Science”. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 355-379.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of Patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402.

伊藤説朗. (1993). 《数学教育における構成的方法に関する研究（上）》明治図書出版

岩崎秀樹. (2007). 《数学教育学の成立と展望》 ミネルヴァ書房

岩崎浩. (2003). 「メタ知識の構造化，意味の明確化の試み−概念の相補性の視座から−」. 《全国数学教育学会第17回研究発表会配布資料》

近藤祥逸 & 好並英司. (1964). 《論理学概論》 岩波書店

真野 祐輔. (2010). 《算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究 :「数」領域の展開を中心に》 広島大学未刊行学位論文

友定章子, 姫田恭江, & 溝口達也. (2006). 「授業設計における一般化と拡張を志向した算数的活動の構成の様相」. 《鳥取大学数学教育研究》, 9(1), 1-10

中島健三. (1981). 《算数・数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察》 金子書房

平林 一榮. (1987). 《数学教育の活動主義的展開》 東洋館出版

ポリヤ, G. (1954). 《いかにして問題をとくか》 (垣内賢信 訳). 丸善株式会社 (原著版は1945年)

ポリヤ, G. (1959). 《数学における発見はいかになされるか1 帰納と類比》 (柴垣和三雄 訳). 丸善株式会社 (原著版は1953年)

溝口達也. (2003). 「学習指導における学習者のコンセプションの変容に関する研究」. 《鳥取大学教育地域科学部教育実践総合センター研究年報》, 13, 31-41

文部省. (1940). 《尋常小学算術 第五学年児童用 下》 東京書籍

第2章：数学学習における一般化の機能

本章の目的は研究課題1「数学学習における一般化が有する機能は何であるか」に答えることである。第1章で述べたように，一般化の機能の全体像を示す必要が認められるため，まずは本稿の関心から観た一般化という認識そのものの全体像を示す（2.1節）。それに基づき，一般化の機能を，一般化の手段と目的（2.2節），一般化と意味の関わり（2.3節）という観点からそれぞれ明らかにしていく。

2.1 個々人の状態に依る二段階の一般化

研究課題1「数学学習における一般化が有する機能は何であるか」という関心に対して先行研究では主に二つの見解が観られる。一つ目は，例えばDavydov (2008)によると，一般化とはある種の不変性を探究した上で単語によって指示し，その結果として一般化が便利な構造や体系化をもたらすということである(pp. 74-75)。これは一般化の機能として完全に正しく，ある程度共有された見解である (cf. Radford, 1996)。しかしながらこの機能は，数学における一般化に固有の機能ではない上に，完成された数学（あるいは科学的知識）を観察者の視点から観たときに，そこで一般化が担っていた機能であることが指摘される。例えば，「単語で一般性を指示するために一般化をする」と学習者が考えているわけでは無く，完成された学問としての数学（や他の知識）をその様に見ることが出来るのである。しかし我々の興味は，前節で示した様に数学学習（＝活動）における一般化の機能である。従って，我々が提示する機能はDavydov (2008)の指摘と関連しており矛盾もしないが，数学を学ぶ学習者の立場から観た機能である。

二つ目の見解は，一般化がある種の推論やコミュニケーションの適用範囲を広げる，変数化の役割を担っているということである。先行研究も，この機能を重点的に扱うことが多く，イギリスのカリキュラ

ムの影響もあって，1.1節で述べたように，Pattern Generalizing・Early Algebraなどの用語で，近年注目されている機能でもある(cf. Zazkis & Liljedahl, 2002)。これは本研究の関心とも合致する，一般化の重要な機能である。しかし，変数化は一般化の機能の一つに過ぎず，一般化の機能の全体像は必ずしも明らかではない。後の考察で引用するように，変数化以外の一般化の機能を指摘した先行研究もあるが，それらもやはり一般化の機能を部分的・散発的にしか指摘していない点が問題であろう。従って，本研究においては一般化の機能の全体像を提示する必要が認められる。

一般化の機能の全体像を明らかにするためには，先んじて一般化の全体像を捉えることが肝要である。そこで本研究は先ず，Harel & Tall (1991)の見解から出発する。これには，Harel & Tall (1991)が頻繁に引用される主たる一般化研究であるということ以上に，二つの理由がある。まず最も重要なこととして，氏らは一般化を生徒達個人という観点から捉えようとしていることが挙げられる。後程，氏らが提示した一般化の三つの段階を述べるが，これらは観察者の視点や，命題の数学的・論理的関係などから区分されるものではなく，個々の認識主体の心的状態に依存した段階である。従って，本研究の関心と合致していることが指摘される。次に，氏らは語「一般化」に拡張を含めてはいるものの，一般化と拡張の違いに繊細な注意を払い，事実上は区別していることが挙げられるからである。これは1.3節で述べたように，学習者の立場から「一般化」を考えるときに不可欠の区分である。本研究やHarel & Tall (1991)とは対照的に，例えばDörfler (1991)は記号という観点から明確に記述できる点を問いの対象としている。従って拡張

を区別しないし，その必要も無く，論理学的な意味での外延的/内包的一般化のみを相手にしているのである。

さて，Harel & Tall (1991)によると，一般化は主体にとって次の三つの段階に分けることが出来る(p. 38(強調は原文); 拙訳)。

1. 膨張的一般化は，主体が既存のシェマの適用可能範囲を，その再構成を抜きにして拡大することで生じる。
2. 再構成的一般化は，主体がある既存のシェマを，その適用範囲を広げるために再構成するときに生じる。
3. 選言的一般化は，ある新しい文脈に対して類似した文脈から移るとき，主体が新しい文脈を扱うためこれまでとは全く異なるシェマを構成し，既存のシェマのアレイへと加えるときに生じる。

この区分の内，選言的一般化はその定義から，明らかに拡張のことを指していると考えられる。実際に「選言的一般化は観察者からは成功的な一般化として見える･･･［中略］･･･しかし，個々人にとって当初の事例は，より一般的な手続きの特殊な場合であるように見えない･･･［後略］(Harel & Tall, 1991, p. 38)」という選言的一般化の困難さを指摘しており，これは拡張が抱える困難性と全く同一である(cf. 友定 et al., 2006)。従って，選言的一般化は本研究の問いの対象ではない。膨張的一般化は非常によく取り上げられるタイプの一般化であり，例えば「1＋3＝4・13＋15＝28」という事例から「奇数＋奇数＝偶数」へと広げるような場合を指す。一方，再構成的一般化とは，例えば三角形を上底0の台形と見做すことで，台形の求積方法である「（上底＋下底）×高さ÷2」を適用可能にするような一般化が該当する。

膨張的一般化と再構成的一般化についてHarel & Tall (1991)は両者の様々な関係を指摘しているが，それらは次の五点に要約することが出来る。

I：膨張的一般化は頻繁に起こり，再構成的一般化はそれよりも頻度が少ない。

II：膨張的一般化は再構成的一般化に先行し，前者の方が容易である。

III：膨張的一般化は，単純に広げるという点で非常に客観性が高い一方で，再構成的一般化にはやや主観が入ることもある。

IV：(少なくとも長期的な)知識の構成とその本質を捉えるという点に関して，膨張的一般化よりも遙かに高い価値と有用性が再構成的一般化には認められる。

V：一度再構成的一般化が生じたならば，その適用範囲を広げるという意味で，直ちに容易な膨張的一般化がそれに続く。

ここでHarel & Tall (1991)の研究からは，主に次の二つの主張を読み取ることが出来る。まず第一に，拡張（選言的一般化）を除いたとしても一般化という認識には「膨張的」と「再構成的」の間に，ある種の水準の違いと順序がありながらもオープンな認識であるということ。第二に，再構成的一般化が要請される頻度は膨張的一般化に比べて少ないが，それにも関わらず知識の構成において非常に重要であるということである。

類似した指摘は，暗黙的にではあるものの，他の研究でも成されている。例えばDörfler (1991)においては，用語の規程が多少不明瞭なが

ら(cf. 岩崎, 2007)，「(最初の)外延的一般化」を一般化過程の中程に位置付けている。ここで「(最初の)外延的一般化」は，見出された不変性(を記述する記号)の領域が広がっていくことを指しており，Harel & Tall (1991)が言う所の膨張的一般化と見做すことが出来る。一方で，Dörfler(1991)にとって一般化の決定的要因となる「記号の対象化」を経て実行される「内包的一般化」は，対象の特徴を持ちながらも潜在的に制限が無い，独立した一般性を記号が獲得することによって特徴付けられ，より上位の外延的一般化の出発点でもある。Dörfler (1991)はこれ以上のことに直接言及していないが，単なる外延の拡大に留まらず内包に注目するという点で，ある種の再構成や再解釈が含意されているとも考えられる。また「記号の対象化」より後に設けられている点から最初の外延的一般化よりも高い段階にあることも読み取れる。以上から，この関係性は膨張的一般化と再構成的一般化の関係に類似した指摘であると考えられる。他にも，中島 (1981)においては「どの様な場合でも成立する」ということは比較的(教育的にはその達成を前提としてよいほど)容易であり，それを別の観点から捉え直し，異なる解釈を持ち込むことがより重要な一般化であることを事例を用いて説明している(p. 146)。これもまた，膨張的一般化と再構成的一般化の関係に類似した指摘である。

勿論ここで，各々の著者が意図している「再構成」やそれに類似する用語は必ずしも完全に同一ではないかもしれない。Harel & Tall (1991)自身も，直接「再構成」の詳細に踏み込んでいるわけではなく，特に「やや主観が入る」という表現は，どの様にでも捉えることができる。それは，各々の研究の不備ではなく，研究の問い・関心・背景が違うためであろう。そこで我々は，Harel & Tall (1991)の「再構成」

を若干広く捉え，ある種の(再)解釈も含まれていると捉える。なぜならば，各々の研究背景の違いにもかかわらず，「再構成」あるいはある種の解釈の有無で水準を設けているという点において，上述したような研究者間の見解が共通しているからである。その上で，《単純に適用範囲を広げる一般化》と《ある種の解釈・再構成を経た一般化》の二つで一般化が完結するものとして捉えていく[1]。

尚，最後にHarel & Tall (1991)の関心が高度な数学的思考（Advanced Mathematical Thinking）に限定されていることに言及しておく。

2.2 一般化の機能：その手段と目的から

前節で我々は，《単純に適用範囲を広げる一般化》と《ある種の解釈・再構成を経た一般化》という二種類の一般化があることを指摘した。これらに基づき，本研究の関心である「一般化の機能」について考察することにしよう。

既に述べたように，我々が「一般化の機能」という用語で意味しようとしている事柄は，主体にとって一般化が持つ意味，目的，実用性であった。従って，《単純に適用範囲を広げる一般化》においては，適用範囲を広げることが直接何らかの意味・目的・実用性を持つ場合と，適用範囲を広げることが別の意味・目的・実用性を達成するための手段となっている場合の二つが想定される。従ってそこには二種類の一般化の機能があると考えられる。同様に，《ある種の解釈・再構成を経た一般化》もまた，解釈や再構成自体が意味・目的・実用性と

1 一般化はオープンな認識であるから，どこまでを一つの一般化と捉えるかを議論することに殆ど意味は無いであろう。ここで完結するとしているのは，Harel & Tall (1991)が膨張的一般化と再構成的一般化の関係性について述べているように，二つの一般化の繰り返しや組み合わせで，どの様な一般化でも語ることが出来るという意味である。

なっている場合と手段となっている場合の二つが想定され，各々に一般化の機能があると考えられる。そこでまず最初に，この四つの機能を考察したい。

2.2.1 変数化の機能

一般化とは端的に言って，ある推論(やコミュニケーション)の適用範囲を当初の対象より広げていくことである。一般化という用語の定義にかかわらず，この点は広く同意されていると見做してよいであろう。このように適用範囲を広げることが直接の目的となることで，当初の対象(特殊)の幾つかの属性は対象(特殊)から切り離されざるを得ない。この切り離しの結果として，属性が持つ具体性は捨象され，ある種の変数として扱われる(cf. Dörfler, 1991)。

例えば，ある具体的なひし形ABCD−対角線AC・BDの長さがそれぞれ9cmと6cmとしよう−の面積を求める場面に，ひし形の面積の求め方を知らない学習者が直面しているとしよう。様々な推測や推論を経て，ひし形の各対角線の長さを一辺とする長方形を外接させることで，当該の面積が9×6÷2で求められたとしよう。このとき，他のひし形を目にするなどのきっかけによって，どんなひし形でも「対角線×もう一方の対角線÷2」で面積が求められると一般化することが出来る。その際に，本質的ではないと見做された属性である各辺の長さ，内角，等々は目の前の具体的な図から切り離されることで，様々な値をとることが出来るように，つまりある種の変数になる。反対に，対角線が成す角＝90°は保持されるため変数にならないが，この取捨選択は殆どの場合無自覚である。ある種の変数となった属性は代数的に取り扱うことが可能になり，任意の値を代入することで，ある集合内の全ての対象について考察することが可能となる。数学のある集合(例:ひ

し形)に無限の対象が含まれる場合，それら全てについて知ることは無いにもかかわらず，それら全てについて知ることになるのである。これを我々は，変数化の機能と呼ぶことにしよう。別の言い方をすると，新たなクラスを構成する機能と言い換えてもよい。

こうしてある属性が変数化された結果の「変数」は，何らかの点で物理的対象から切り離されているので，その記録のためには代数的な記号を必要とする。こうした「変数」と記号，あるいは記号を含めた代数的表現や代数的思考との関係は今なお研究者間で決着が着いていない議論であり，両者の関係は極めて複雑である。近年の解釈(cf. Zazkis & Liljedahl, 2002)では，例えばKieran (1989)によると「一般化は代数的思考と同等ではなく，代数を必要とするものでもない（p. 165）」といったように，両者を別物として見做す。Dörfler (1991)にとってさえ代数的な記号は一般化に必須であるが，そこで想定されている記号は必ずしも文字ではなく，幾何的な記号のみならず，口語的な記号さえも含まれる。他にも，例えばHejny (2003)は生徒達の活動としての一般化を論じる中で記号どころか表現について触れてさえもいない。筆者は基本的に，上述されたKieran (1989)の見解を採るが，同時に記号が学習者の認知に大きな影響を与えていることも事実であり，特に実践や内容による一般化の様相の違いを考えるときには考慮されなければならない。例えば岩崎 (2007)が論じたように，代数的な記号と幾何的な記号のどちらを探求の道具として一般化するかは，学習の様相に大きな影響を与える。一例として，前者が比較的弱い意味（非範疇的な公理体系）を持つのに対して，後者は「形」という強い意味（範疇的な公理体系）を持つため特殊から離れ難いということを指摘している。しかし，既に論じた様に筆者の関心は個々の学習者の認知

ではなく，それらを超えた普遍的に必要とされる一般化の機能である。その為，繰り返しになるが「一般化は代数的思考と同等ではなく，代数を必要とするものでもない (Kieran, 1989, p. 165)」と見做す。

以上の様な論争があるにせよ，変数性と記号の必要性が相まって，しばしば代数の入り口として一般化の重要性が強調される。実際，第1章で述べたように，一般化を通した代数の指導は世界的に大きな動きであり，これらの研究ではその関心から，変数化の機能に大きな焦点を当てる。しかし，変数化は一般化の重要な機能ではあるが，この機能が一般化の全てであると考えるのは大きな過ちであり，研究としても学習としても不十分である。English & Warren (1998)は（パターンを）変数化するだけで終わらなくてもよい，と控えめに指摘するに留めるが，2.2.3節でDörfler (2008)を引用して示す様に，それだけでは代数の学習自身にとってさえ不十分である。

2.2.2 純化の機能

実際の問題解決過程，あるいは場合によっては代数の導入を観ると，必ずしも変数化の機能を意識して一般化を用いているとは言い難い。それよりもむしろ，問題の余計な(と見做す)属性を取り除き，簡単に解決するために一般化を行うことがとても多い。例えば，$\sqrt{103\times102\times101\times100+1}$ の根号を外すという問題を考えてみよう。実直に取り組むと $\sqrt{106110601}$ の素因数分解が要請されてしまい，その様に解決することはあまり現実的ではない。そこで，$\sqrt{(n+3)\times(n+2)\times(n+1)\times n+1}$ という，より一般の問題場面を考えてみることで，当初の問題は $\sqrt{n^4+6n^3+11n^2+6n+1}$ の根号を外す問題に帰着さ

れる。因数分解や代数計算の幾つかの基礎に基づいて計算し，$\sqrt{(n^2+3n+1)^2}$ を求めることは当初の問題よりも容易であろう。後はn=100の場合から当初の問題の答えは10301であると解る。この様な場合，一般化の「推論やコミュニケーションの適用範囲を広げる」ことは目的となっておらず，問題を簡単に解決するための手段である。こうした一般化の機能を，我々は純化の機能と呼ぶことにしたい。

この事例は「特殊な場合に取り組むよりも，一般問題のほうが容易に解けることが多いものだが…［後略］(ディリクレ & デーデキント, 1970, pp. 24-25)」という場面の一つの典型であり，ポリヤ (1959)に引用されていることをはじめ，しばしば類似した指摘が成されている。勿論，上記事例を他の方法で解決することは可能であるが，問題を簡単に解決するための手段の一つとして，一般化を用いることが有用なのである。

注意することとして，純化の機能は一般化というよりもむしろ，記号化あるいは言語化の力[2]に依っているように見えるということが挙げられる。勿論，一般化と記号化の綿密な関係(cf. Dörfler, 1991)を考えれば，その様な側面が認められることは確かである。しかし，筆者が観察した次の様な場面と比較すると，「純化」の機能がより一層特徴付けられて認められよう。筆者が観察したのは，中学校1年生に対して，図2−1の様な問題が提示された，ある授業である。

2 ここに与えられる尤も適切な説明は，言語が有する三つの機能「コミュニケーション」「客体化」「処理」の内の「処理」の機能−コンピューター科学にみられるような−に依っている(cf. Duval, 1995; Sierpinska, 2005)と考えることであろう。

左の図のような3×3の枠の中に，縦・横・斜めのどこで足しても和が等しくなるように，
「−5，−6，・・・，−13」を一つずつ入れなさい。

図2−1：負の数による魔方陣の問題

生徒達は負の数の加法を学習したばかりであり，教師は負の数の加法に習熟させるような学習を行う意図で図2−1のような場面を設計した。即ち，いわゆる魔方陣を完成させようと試行錯誤する中で，負の数の加法が繰り返し行われることを期待したのである。このような場面において，ある生徒は図2−2に示される様な解決を行った。

2	7	6
9	5	1
4	3	8

左の図から，右のようになる

-6	-11	-10
-13	-9	-5
-8	-7	-12

図2−2：生徒による純化

ここで，生徒は明らかに図2−1の場面を$n-4, n-3 ..., n, ..n+3, n+4$を用いて3×3の魔方陣を完成させる，という場面に一般化出来ると見做した上で，自分が扱いやすいと感じた1，2，・・・9を用いて魔方陣を完成させる場面へと特殊化している（生徒は，この時点でまだ代数記号を十分に学習していない）。この場面は先程の根号を外す問題とは異なり，「純化」がより前面に機能していることが指摘される。

特殊な問題をそのまま解決することが現実的ではないという動機は，上記の問題のように個々人が比較的抱きやすい。例えば，何らかの規則を持った少数の事例を基に100番目の場合を求めよ，といった

(直接の推理が困難な)問題は我が国の教科書などでもよく見受けられる。これは純化の機能に基づく指導が意図されている場面であろう。

2.2.3 統合の機能

既に何度か述べているが，一般化の本性は「推論の適用範囲を広げる」ことである。しかしながら「変数化」とは異なり，既知であった様々な事柄がある単一の概念に含まれるようになる場合が明らかになり，集合に含まれる要素が増大していく場合がある。結果的に，この場合もまた推論の適用範囲が広がる。例えば，変数化の機能で取り上げたひし形の面積の求め方で考えてみよう。この求め方は，対角線が直交してさえいれば利用できるため，見た目には大きく異なるたこ型にも全く同じ方法を適用することが出来る。この推論の適用範囲の広げ方は変数化の場合とは異なっており，ポリヤ (1959)によると，時に思いもよらない対象が結びつくことさえある。我々は，これを一般化の統合の機能と呼ぶことにしたい。

この機能は，ある種の解釈・再構成を伴う一般化自体が目的となっている場合に働く。というのも，単純に適用範囲を広げる一般化の場合，構成された「一般」に何が含まれ，何が本質的で，何が本質的ではないか，といったことは必ずしも自明ではないため(cf. 早田, 2013)，そのことを明らかにする必然性が認められるのである。実際，上記事例でひし形の面積の求め方を構成した際に，たこ型が含まれていることを同時に把握しているとは考えにくい。そのため，ある種の解釈や再構成によって「統合」することが不可欠である。Dörfler (2008)は「代数的な表現によって意図されている意味，特にその一般性に帰する（内在するのではなく）ことを折衝すること」(p. 146)として，一般性のもとにどの様な特殊が包含されるかを認識することの重要性を強

調している。また，中島 (1981, p. 37)も「構造をとらえる」といった言い方で，ほぼ同じ指摘をしている(pp.146-147)。

ただし，一般化による「統合」はしばしば，拡張と混同されることがある。というのも，拡張の本性は統合であるからである。例えば拡張の典型例である自然数の乗法から小数の乗法への意味の拡張を考えたとき，小数の乗法で成り立つ意味（比例）を見出した後，自然数の乗法をその内に取り込み，適用範囲を拡げる。この意味で拡張が類似した「統合」の機能を持つことは事実であるが，拡張の場合は統合される対象同士が同値であるのに対して，一般化の場合は完全に同じであるという点で違いが見られる。一般化による統合として，先程のひし形の例の場合，適用範囲をたこ型へと広げたとしても，ひし形の求積方法には何らの変更も加えられていないことが指摘される。

2.2.4 発見の機能

ジェスティ (1999)によると，新しい数学的概念は，しばしば問題を解決する過程の中で潜在的に発明され，次にそれが価値あるものとして発見される。氏は歴史的な例として，惑星の軌道を記述する問題を解決する方法(微分/流率)が潜在的に極限概念を発明していることを指摘しているが，学校数学においても類似した例が散見される。例えば，純化の機能に関する節で用いた事例からは，当初の根号を外すという問題からは想定していなかった命題「$\sqrt{(n+3)\times(n+2)\times(n+1)\times n+1}$ は常に自然数である」を発見することが出来る。我々は，これを発見の機能と呼ぶことにしたい。

この機能は，Dörfler (1991)による「記号の対象化」という観念によって与えた説明と関連している。Dörfler (1991)によると，一般化過程

において(反省的/構成的に)抽象された諸事柄は，認知された特殊と強く結び付いているが，一般化の過程において両者の切り離しが行われる。切り離された結果として，前者が独立した対象として振る舞うこととなり，氏はこれを「記号の対象化」と呼んでいる。上記事例において発見の機能が，数式自体を元となる問題から有る意味で切り離して吟味していることで機能しているように，一般化における発見の機能は，こうした「独立した対象」に対する自覚的な価値付けである。言い換えると，ある種の解釈・再構成を伴う一般化を手段として，新しい事柄を構成している。

2.3 一般化の機能：意味に関わる問題

以上で我々は一般化の機能の大部分を示したが，一般化全体に関わるもう一つの重要な議論に意味[3]に関わる問題が認められる。Harel & Tall (1991)においては，理解という側面から一般化と意味の問題に多少言及しており，一般化の結果として表れる一般的な諸事柄の意味を作り上げることの重要性を指摘している。ただし，氏らの論においては一般化と意味の関係は潜在的なままであり，例えば一般化の定義においても意味の問題は直接言及されていない。この問題に積極的に言及しているのはDörfler (1991)である。氏は一般化過程において個人が見出す意味と，社会的に交渉され共有される意味とを接続する動的な過程を一般化の内に見出している。教育という文脈においては特に，ある一般化の結果物は社会的に共有可能なものであるべきである。実際に，社会的に共有されない意味は個人にとってさえもしばしば問題となる(cf. Erlwanger, 1973)ことは事実である。しかし，社会的に共有され

3 ここで語「意味」は日常の用語と同じ用い方をしている。「意味」の意味を議論することは興味深いが，本研究の関心を大きく逸脱するためである。

る意味のみを強調することは，学習の集団化を超えた思考の集団化(cf. Sierpinska, 2005)を招く。そのため，社会的な意味を共有する前提として，個々人が何らかの意味を先行して見出すことが重要であるし，少なくとも筆者はそう信じている。

以上の様な背景から，個人と社会それぞれの意味に対して，一般化がどの様な機能を果たしているかを明確にする必要があると言える。

2.3.1 意味付けの機能

個人内で意味を見出し，作り上げる過程について，Howson (2005)は主に二つの方法があることを示している。一つは幾何学的なモデルを構成することであり，数学において双曲幾何をモデル化したPoincaré Disk Modelや，学校数学における数直線に基づいた演算の意味付けなどがこれに該当する。もう一つは既知の事柄と新しい事柄を結びつけることであり，これは新しい事柄と既知の事柄の繋がりを探る場合と，既知の事柄と推論規則だけを使って新しい事柄を作り上げる場合に大別される。

ここで後者の「既知」は，本研究の関心においては特殊と読み替えられる。何故なら，既知の事柄は何らかの点で常に(物質的とは限らないが)具体的だからである。従って，上記の指摘は「特殊と推論だけから作られた対象は意味を持つ」と読み替えることが出来る。Howson (2005)も例に挙げているが，既知の自然数と演算法則から，より一般の「整数」を構成するというプロセスは意味付けの機能が働く典型的な場合である。学校数学において他にも，一般の三角形なる物質的に存在しない事柄について考えることが出来るのは，特殊な三角形に基づいているといったことが挙げられる。我々はこのような個人内の意味に関わる機能を，意味付けの機能と呼ぶことにしたい。

伊藤 (1993)はこの機能に着目した教授–学習の理論を展開しており，小学生の実態の分析も行っている。結果として，学習者達はとても自然に(即ち無自覚に)，一般化の意味付けの機能を用いることで新しい対象を構成していることが指摘されている。よって意味付けの機能は積極的に顕在化されるものではないが，学習者達の中で暗黙裏に働いているといえよう。

2.3.2 社会化の機能

van Hiele & van Hiele-Geldof (1958)による幾何水準論を初めとする，多くの幾何学習に関する研究の成果として，幾何学習の初期段階にいる学習者は，見た目に強く依存することが知られている。例えばある個人が「ひし形はたこ型である」と言ったとして，これは数学的 (上記水準論に倣えば第3水準や第4水準[4]) には正しい。しかし，学習の初期段階(同第0水準や第1水準)にいる学習者は，見た目に両者が大きく異なるため，これを受け容れない傾向にある。このよく知られている例に観られるように，ある個人の主観的な認知は，たとえその個人にとってのみならず学問としての数学から見て正しかったとしても，他者に受け容れられるとは限らないのである。

もしもその個人が自分の内だけで済ませようというのであれば，その個人がそう思ったということで何の問題も無い。極論を言えば，その個人が正しいと思い込んでさえしまえばそれで成立してしまう。しかしながら，教育的営みにおいてそのようなことは通常是とされない。学習の本性は常に開かれていながら認識を更新し続けることであり(大滝, 2014, p. 1)，ある種の対決がそこにあったとしても，他者が受

4 ここでは引用元に倣い第0〜第4水準としているが，第1〜5水準とラベリングすることもある。

け入れられる形で数学が構成されることが常に期待されている。従って他者が想定されたとき，そこに一般性が要請されるのである。例えば，2.2.3節でひし形とたこ型を面積という観点から統合しているが，これによって見た目に依存している学習者に対して，両者は同じであると認めさせることにもなっている。

重要な機能なので，もう一つ事例を挙げておこう。「1，2，3，4，5，6という数の次に来る数は何か？」と聞いたならば，大半の人は7と答えるであろう。もしも727が来ると言われたならば，その答えは完全に正しいにも関わらず，恐らく納得しないに違いない。このことを他者に納得させようとするならば，大本の数列a_nが

$a_n = (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)+n$ と一般化出来ることを示さねばならないであろう。

何れの例にも見られるように，一般化はある種の他者性を認める最初の重要な段階であり，同時に他者の存在を意識することで一般性が要請される (Beth & Piaget, 1966, pp. 9-10)。例えば，数学の始まりとされることが多いユークリッド原論は一般化を意図した記述がなされているが，これはまさに一般化のこの特性のためであろう。これは他者に自分の主張を認めさせていくということと，それに付随して誤った一般化から自らを守るという二つの側面を有している。こうした一般化の社会的側面は，先に述べたようにDörfler (1991)において，一般化の本性として強調されている。

以上の様に，主観的認知を他者に対して開いていく機能を，一般化の社会化の機能と呼ぶことにしよう。この機能は，他者に認知を開くことから必然的に，妥当な認識に到達するための重要な役割を担う。通常，一般化の社会的な機能は日々の授業において，特に学習者の視

点からは常に顕在化されているわけではない(対照的に，教師の視点からは最も目立つ機能であるかもしれない)。恐らく，顕在化されるのは事例のように，直観に反するなどの理由で対立的な見解が発生する場面に限られるであろう。しかし，意識しないまでも(特に集団での)活動において，社会化の機能は重要な役割を果たしているのである。

以上の様に，一般化は6つの機能を有することが認められる。これを簡潔に纏めると，表2−1のようになる。

表2−1：数学学習における一般化の6つの機能

純化の機能	問題を簡単に解決するために，本質的ではないと見做した属性を無視する
変数化の機能	推論の適用範囲を広げるため，本質的では無いと見做した属性を変数にする
統合の機能	一つの観念に様々な対象を取り込むことで，推論の適用範囲を広げる
発見の機能	ある問題の解決等に潜んでいる対象を数学的に価値付ける
意味付けの機能	新たな事柄を既知の事柄と推論のみから作り上げ意味を付与する
社会化の機能	主観的な認知をより客観的で共有可能な認識へ高める

以上の様な6つの機能だが，明らかに排他的に働くような関係ではない。ここまでの過程で何度かその様なことが示唆されているが，一例として，ひし形とたこ型が統合される例を観てみたい。ひし形の面積を求める方法にたこ型が統合される前，ひし形の対角線同士が互いに

互いの中点で直交しているということ･･･即ち，対角線同士の交点が対角線を内分する比が1：1のままで固定されているといえる。しかし，何らかの切っ掛けで両者を統合しようとしたとき，その比は変数化されざるを得ない。またはその逆で，比の変数化を契機として統合されるということも考えられる。

こうした一般化の機能が有する関係に，学習を捉えるために有用な形式，即ち構造を与えることで，一般化の機能をよりよく理解し，学習に活用出来ると期待される。従って研究課題2「研究課題1で明らかにされた一般化の機能はどの様な構造を持つか」に取り組まなければならず，これは次章で検討される。

第2章の引用・参考文献一覧

Beth, E. W., & Piaget, J. (1966). *Mathematical epistemology and psychology*. Dordrecht, Holland: D. Reidel.

Davydov, V. (2008). *Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study*. NewYork: NY: Nova Science Publishers.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in Mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. v. Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: comments and reflections. *ZDM Mathematics Education, 40*, 143-160.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et la pansée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals*. Berne: Peter Lang.

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 1*(2), 7-26.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic. *for the learning of mathematics, 11*, 38-42.

Hejny, M. (2003). Understanding and structure. In M. Mariotti (Ed.), *proc. CERME3 WG3* (pp. 1-8). Bellaria.

Howson, G. (2005). "Meaning" and school mathematics. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in mathematics education* (Vol. 37, pp. 17-38): Springer.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. In G. Vergnaud, J. Rogalski & M.Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 163-171). Paris, France.

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (Vol. 18, pp. 107-111). Netherland: Springer.

Sierpinska, A. (2005). Discoursing Mathematics Away. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 205-230).

van Hiele, P. M., & van Hiele-Geldof, D. (1958). A method of initiation into geometry at secondary schools. In H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry* (pp. 67-80). Gronigen: Qolters.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of Patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402.

伊藤説朗. (1993). 《数学教育における構成的方法に関する研究（上）》 明治図書出版

岩崎秀樹. (2007). 《数学教育学の成立と展望》 ミネルヴァ書房

大滝孝治. (2014). 《確率概念の形成におけるミスコンセプションの研究》 広島大学未刊行学位論文

ジェスティ, E. (1999). 《数はどこから来たのか–数学の対象の本性に関する仮説》 (斉藤憲 訳). 共立出版 (原著版は1999年)

ディリクレ, P & デーデキント, R. (1970). 《整数論講義 ⟨現代数学の系譜5⟩》 (酒井孝一 訳). 共立出版 (原著版は1864年)

友定章子, 姫田恭江, & 溝口達也. (2006). 「授業設計における一般化と拡張を志向した算数的活動の構成の様相」. 《鳥取大学数学教育研究》, 9(1), 1-10

中島健三. (1981). 《算数・数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察》 金子書房

早田透. (2013). 「数学教育における一般化とその妥当性判断に関する考察 －図の具体性を捨象することに着目して－」. 《全国数学教育学会誌 数学教育学研究》, 19(1), 47-53

ポリヤ, G. (1959). 《数学における発見はいかになされるか1 帰納と類比》 (柴垣和三雄 訳). 丸善株式会社 (原著版は1953年)

第3章：一般化の機能の順序に基づく構造

前章で，一般化の6つの機能が同定された。本章では6つの機能の働き具合の実際を，構造という観点からよりよく理解することをその目的としている。このために，二つの機能間の（順序）関係という最小単位に注目して，各々について分析を行い（3.1節〜3.6節），それぞれの機能の特徴をより詳細に明らかにしていく。

第2章で明らかにされた一般化の機能は，活動の中で様々な形で働くことが予想される。このとき，各機能が互いに排他的な関係に無いことは明らかである。例えばどの様なひし形でも，その面積が「対角線×もう一方の対角線÷2」で求められることが解ったとしよう。このとき，ひし形の内にある各々の対角線の具体的な長さは《変数化》されていると観ることができるが，一方で対角線が互いに互いの中点を通るということ・・・即ち，対角線同士の交点が各々の対角線を1：1に内分しているという比は《変数化》されていない。このとき，ひし形の面積を求める方法にたこ型を《統合》しようということが何らかのきっかけで意識されたならば，まさに上記の比が《変数化》されることが指摘される。反対に，この比が何かの契機に《変数化》されることで，たこ型が《統合》されるという場面も考えられるだろう。前者の場合と後者の場合で働いている機能は《変数化》と《統合》の二つと同じであるが，その順序によって認識の様相が異なると考えるのが自然である。

従って，この様な機能二者間の関係，それも上記の様に，認識論的な順序を入れた関係を明らかにすることで，一般化の機能についてよりよく理解することが出来ると期待される。なぜならば，2機能の関係は，機能全体の関わりを見る上での最小単位となり得，しかも順序が

大きな影響を与えると予想されるためである。この関係について，同じ機能が連続で働くという場合を除き，以下ではそれらを検討していく。尚，以下の節タイトルが例えば「《純化》と《変数化》」であった場合，《純化》が働いた後に続いて《変数化》が働く場合を想定している。

3.1《純化》の機能と他の機能

《純化》の機能の特徴は，必ずしもパターンや数学的構造の認識を必要としないという点に認められる。即ち，《純化》の場面が働くとき，主体の目的はあくまでも問題を簡単に解くことであって，そのために有用でありさえすれば十分であることが指摘される。この様な一般化は，Panizza (2009)によって自然発生的な一般化［spontaneous generalization］として定式化されている。不十分かもしれない考えや論理，あるいは記号によって生じるものであり，しばしばあまりその正当性に目を向けずに行われる一般化である。そのため，主体にとっては認知的な負担が軽く，比較的生じやすいという特徴をも持つ。このことは，2.1節でも述べた，3×3の魔方陣を−5，−6，･･･，−11，−12で完成させるという場面において筆者が観察した学習者の活動（図3−1）に特徴的である。

2	7	6
9	5	1
4	3	8

左の図から，右のようになる

-6	-11	-10
-13	-9	-5
-8	-7	-12

図3−1：生徒による純化

ここで，生徒は明らかに問題場面を$n-4, n-3 ..., n, ... n+3, n+4$ $(n \in \mathbb{N})$ を用いて3×3の魔方陣を完成させる，という場面に一般化出来ると見做

した上で，自分が負の数よりも扱いやすいと感じた1，2，･･･9を用いて魔方陣を完成させる場面へと特殊化している（尚，生徒達はこの時点で我が国の通常のカリキュラムに則って，まだ代数記号を十分に学習していない）。この場面で，生徒がいきなり上述の様な解決を行ったことを考えれば，パターンや数学的構造を認識していたとは考えにくいであろう。しかしそれ故に，ある種飛躍した発想が生まれ，推論を豊かにし得る可能性をも秘めている。

以上の様な《純化》の本性を踏まえると，他の機能とは次の様な関係を有することが指摘される。

–《純化》と《変数化》

ある場面で《純化》されたとき，必ずしもその場面の規則や構造を認識しているとは限らないのは，前述した通りである。従ってこのような場合，当初の特殊と，《純化》された（少なくとも観察者から観れば）一般性とを比較することで，そこに潜在している規則や，自分自身が《純化》した際に注目した構造を反省したりといったことが期待される。例えば図3−1の場合，どの様な魔方陣であっても中央の数の3倍になっていると《変数化》したり，魔方陣に埋める各数は連続する整数になっているが，等差であればよいと《変数化》することが期待されよう。この意味で，《純化》が機能することは《変数化》が機能するための一つの契機として位置付けられる。

–《純化》と《統合》

《変数化》と同じく，観察者から観れば《純化》の結果得られた一般性が何らかの観念を《統合》できるものだとしても，主体がそのことを認識しているとは限らない。同様に図3−1の場合，3×3の魔方陣を

（対称形を除いて）全て一つの場合に《統合》可能であるが，図3−1のような《純化》を達成した生徒がその様な認識に到達しているとは考えにくい。従って《変数化》のときと同様に，《純化》が機能することは，《統合》が機能するための一つの契機として位置付けられる。

–《純化》と《意味付け》

《意味付け》の機能は，暗黙的であったとしても常に働き続ける機能として位置付けられる。従って，当然《純化》されたことで《意味付け》が機能することが想定される。ただし， Panizza (2009)が指摘するように，しばしば《純化》された時に作り上げられた意味は，あまり正当化されることもなく，あたかも自明であるかのように取り扱われる。例えば図3−1においては，3×3の魔方陣の一般的な場合が，主体にとっては自明に《意味付け》されていると見做されるが，その正当性は必ずしも認識されていないかもしれない。従って《純化》されることで《意味付け》が機能した場合，その正当性に目を向ける必要があると共に，主体が感じている自明さを反省することが要請されると言える。

–《純化》と《発見》

《純化》は正当性に目を向けないという特性上，ある種の飛躍がそこに生じ得る。2.2.4節で述べた《発見》の本性は見出された一般性に対する自覚的な反省と価値付けであるから，《純化》された一般性に対して《発見》が働くことは重要である。例えば図3−1の場合，縦ないしは横方向の（等しくなるはずの）和の合計が9つの数全ての合計である以上，中央に配置される数が，大小関係に準じて並べて5番目の数

でなければならないことを《発見》することが期待される。この意味で，《純化》が働くことは《発見》のための一つの契機として位置付けられる。

–《純化》と《社会化》

既に述べたように，《純化》が働く場合においては，主体が自らにとって有用で正しいと考えさえすればよい。例えば図3–1のような解決は，その主体にとって極めて有用であったにせよ，他者が必ず受け入れてくれるとは考えにくいし，却って反対されるかもしれない（むしろ，Panizza (2009)が示唆するように，反対することが望ましいとさえいえる）。従って《純化》が働いたとき，他者が受け容れられる形へと高めるために，《社会化》を経る必然性が認められる。

以上のような場合においては，まず《純化》が機能していることを前提にしている。しかし，勿論ある程度の規則や構造を見抜いた上で《純化》することも考えられる。その場合は後述していくように，他の機能が先に働いた結果として《純化》が働いていることが指摘される。

3.2 《変数化》の機能と他の機能

《変数化》は《純化》と異なり，何らかの点での不変性や規則性を見付けることで，特定の属性を本質的ではないと見做す機能である。しかし，ここで「変数」ということは，表象としての記号を必ずしも意味していない。この機能が働く際に，いわゆる記号化が必要であるか否かは，その研究上の立場や関心において大きく異なっている (Malara, 2012, pp. 62-63)。《変数化》と記号が深い関係にあるのは事実であるが，Malara (2012)がDörfler (1991)とHejny (2003)を対比しながら述

べているように，本研究の関心においては，一般化過程に含まれる主体を考慮して《変数化》の結果として記号化もなされる，と考えるのが適切であろう。Dörfler (1991)自身も，活動の中で出現した不変性が，その記録や操作のために記号を必要とすると述べている(p.71)。従って，本研究の関心においては，主体の精神の内で例えばある三角形を基に「一般の三角形」を考察するといったことも《変数化》の内に含めている。

以上の様な《変数化》の本性を踏まえると，他の機能とは次の様な関係を有することが指摘される。

–《変数化》と《純化》

《変数化》によってある種の規則から本質的でないものが見出された結果，《純化》が機能することは頻繁に起こり得る。例えば，教科書などで少数の事例を見せた上で容易には求められない場合を求めよ，とするような問題を頻繁に見かけることがあり，その典型的な場合が図3−2である。

この場面では，正方形を20個作るときのマッチの本数を求めることが目的である。実際に並べたり図を描いたりしてマッチの本数を数えれば必ず答えは出るが，それは手間がかかるために出来れば避けたいことを下のキャラクター達の会話が示唆している。そのため，正方形が少ない場合（図の下で，具体的に5個の場合を示している）を考え，正方形を一つ増やす毎に必要なマッチが3本ずつ増える規則に気付き，そこから答えを求めることを期待している。これは（マッチの増え方を）《変数化》した結果として《純化》が起こることを期待していると言える。実際，一度この規則に気付きさえすれば，答えを求めるこ

と自体は非常に容易である。この場合の《純化》は前節の場合とは異なり，ある程度の規則や不変性，場合によっては構造さえも見抜いた上で，問題を簡単に解決しようと意図していることが指摘される。この意味で，《変数化》が機能することは，直観的に《純化》を機能させることが出来ない場面で，《純化》を機能させるための一つの契機になることが指摘される。

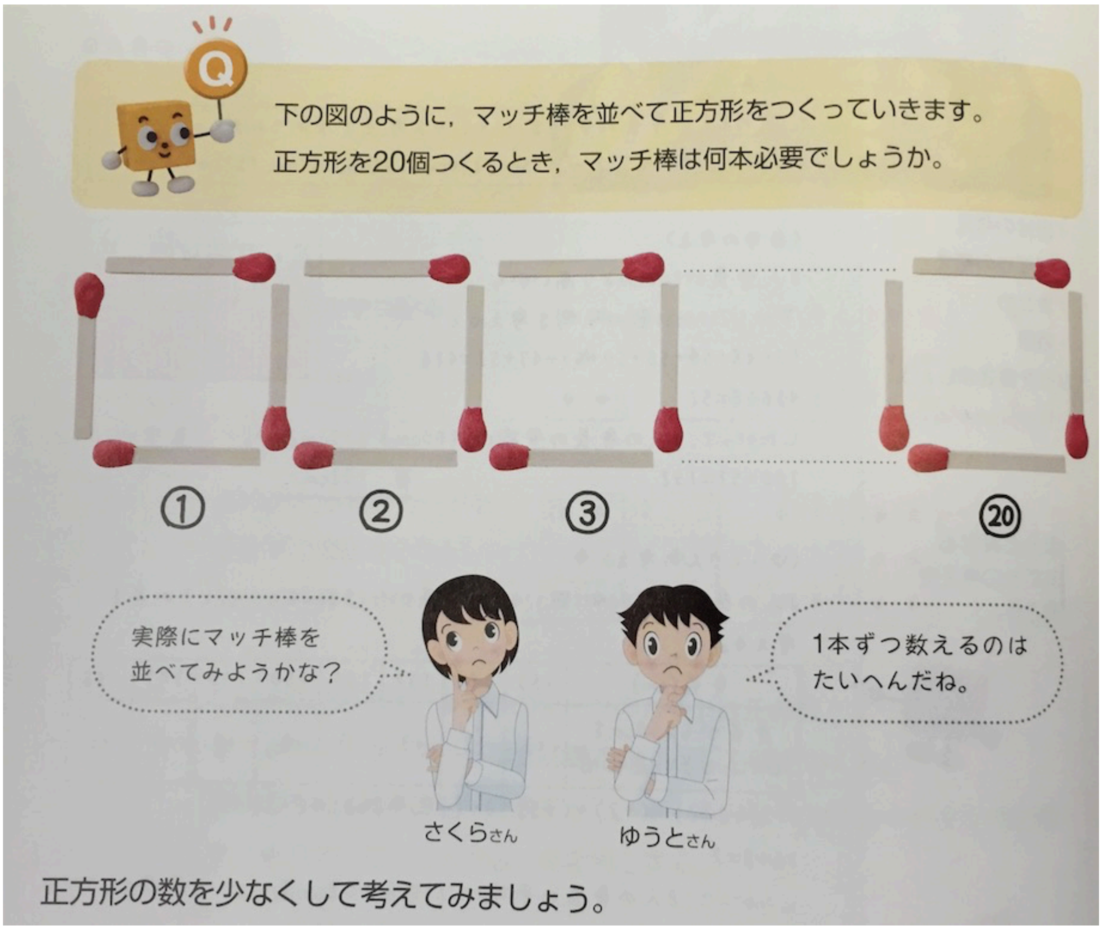


図3−2：《変数化》によって《純化》を期待する場面

(藤井 & 俣野ほか, 2012, p. 50)

–《変数化》と《統合》

《変数化》に続いて《統合》が働くことは非常に重要であり，一般化を通した学習においてもっとも重要な機能の働き方の一つであると

さえ言える。その理由は，《変数化》が働いたとき対象（特殊）の本質的ではないと見做された属性が《変数化》されているため，対象の特徴を強く残した状態で《変数化》が行われることに起因している。何故ならば《変数化》された結果として生まれたある一般性は，潜在的にはもっと広汎な適用範囲を持つ(cf. Dörfler, 1991, p. 72)からである。例えば，台形の面積を求める方法を特殊な台形に基づいて考え，上底，下底，高さを《変数化》することで，全ての台形について（上底＋下底）×高さ÷2という方法で面積を求めることが出来るようになる。しかしこの方法は，実際には平行四辺形，三角形などにも適用が可能である。これは台形と平行四辺形を別の物であると見做していることを前提とした例であるが，同様に《変数化》された事柄に何が含まれていて何が含まれていないかは，必ずしも主体にとって明らかではない。従って，《変数化》の結果として《統合》が働くことは知識の構成，特に《変数化》された事柄を具体的に扱うために極めて重要であり，Dörfler (2008)の言い方を借りるならば，ある一般性に含まれることではなく，ある一般性に帰することを明らかにすることが重要である(p. 146)と言える。このことが明らかになることで，《変数化》によって構成された一般的な諸事柄は，様々な特殊を取り込んで，次に具体として扱われることが期待される。この意味で，《変数化》が機能した後に《統合》が働くことは必須であり，《変数化》によって開かれた抽象的な世界を具体的に扱えるようにするために《統合》が機能することが指摘される。

注意することとして，図形に関わる学習においては，論理的には同じものが，見た目という強い属性によってしばしば別のものとして扱われがちである。従って図形の学習においては《変数化》に続く《統

合》が重要である一方，その様に機能が働きにくい場合が多いことが予想される。

–《変数化》と《意味付け》

《変数化》に続いて《意味付け》が働くことは，物理的には決して存在し得ない一般的な対象を構成する，あるいは少なくとも構成し始めるための重要な場である。例えば，正三角形でもなく，二等辺三角形でもなく，不等辺三角形でもない「一般的な三角形」は，物理的な対象としては当然この世界に存在しないにしても，想像することさえ困難な筈である。しかし一方で，我々は一般的な三角形について考えることが出来るし，初学者である小学生が推論の基礎として用いることさえ可能(伊藤, 1993)である。

これを可能にしているのがまさに一般化の《意味付け》の機能である。個々の具体的な三角形（の図）に対して，辺の長さや角度を《変数化》することで，一般的な三角形という対象を心的に構成していることが指摘される。この意味で，《変数化》が機能することで何らかの《意味付け》がなされ，それは程度の差こそあれ抽象的な，物質的ではない対象についての《意味付け》であることが指摘される。

–《変数化》と《発見》

繰り返しになるが，《変数化》においては対象の本質的ではないと見做された属性が無視される。従って，対象において既に見出された属性や関係と強く結び付いた一般性が構成される。このため，《変数化》に続いて新しいことを《発見》することはあまり期待できないであろう。例えば，ある具体的な二次方程式について，その解を求める方法を《変数化》によって一般化出来たとしても，その式の内に実数

解の個数を求める方法が潜在していることを《発見》するとは考えにくい。ただし同時に，《変数化》は特殊から離れはじめる最初の第一歩でもある。前述の例の場合，解を求める一般的方法が《変数化》されていなければ《発見》が生じないのは自明であり，主体が異なる文脈におかれたり，別の一般化を要請されることによって《発見》が生じ得る可能性が認められよう。このため，《変数化》は一般化の《発見》の機能が働くための必要条件であるが，《変数化》から直ちに《発見》が機能するとは考えにくいことが指摘される。

–《変数化》と《社会化》

個々人の考えを社会的に共有可能な状態に高める《社会化》を考えたとき，《変数化》が働くことで直ちに《社会化》が働くことが指摘される。例えば，いくつかの具体的な場合− 3＋4＝7，13＋22＝35など　−で計算した結果，偶数と奇数の和は必ず奇数になりそうだと気付いたとしよう。幾つかの場合で試すことは容易であるし，個々人にとってはそれで十分である場合も多く，むしろ日常生活であればたいていの場合その方が有益であり，自分が納得しさえすればそれでよい。しかし，他者を意識したとき「常に」成り立つことを示さない限り納得させることはできないし，実際に全ての場合を調べるのは不可能である。従って，本質的ではない要素を《変数化》することで，偶数と奇数の和が常に奇数になることが，他者にも認められる《社会化》された形で示されることが指摘される。この意味で，《変数化》が機能することで《社会化》も同時に機能することが指摘される。

3.3 《統合》の機能と他の機能

ここまでに述べてきたように，推論やコミュニケーションの適用範囲を拡げる機能としては《純化》《変数化》《統合》が挙げられる。《純化》はその妥当性が薄いまま適用範囲を拡げ，《変数化》は推論の対象となった対象の特徴を強く残して適用範囲を拡げる。

しかし，《統合》が働くとき，ある観念に含まれることが比較的自明な対象を《統合》していく場合も勿論あるが，主体がその観念に含まれるとは考えられなかったような対象が《統合》される場合も認められる。後者の様な場合，それまでは何らかの点で違うと見做されていたものを推論の対象にせざるを得ず，どうあっても当初の対象の特徴から離れざるを得ない。この意味で《統合》は，一般化された事柄が潜在的には制限の無い対象を有していく(cf. Dörfler, 1991)ために重要な機能であり，「数学は異なったものに同じ名前を与える芸術である」というH. Poincaréの金言(cf. ポアンカレ, 1953, p. 37)は，この機能に依るところが大きいといえる。。

以上の様な《統合》の本性を考えると，他の機能とは次の様な関係を有していることが指摘される。

–《統合》と《純化》

《統合》の結果として，それまで異なるものだと思われていた対象が同じものの違う様態として扱われるようになる。結果として，《統合》の元になった観念を新しい対象に適用することが可能になる。この結果として問題が容易に解決されることは，《変数化》と《純化》の場合ほど容易ではないにせよ起こり得る。

例えば，ある具体的な高さが等しい平行四辺形と台形の面積比を求めるという問題場面に直面していたとする。平行四辺形を台形の特殊な場合と見做していない場合，両者の面積を求めて比較する他に手は無い。しかし，台形の求積方法の適用範囲に平行四辺形が《統合》されたならば，上底と下底の和がその比になるため，問題の解決はより容易である。

この例に観られるように，ある一貫した方法によって問題が解けるということに起因して問題が簡単に解決できるように場合には，《統合》が機能することが《純化》が機能するための一つの契機となることが指摘される。

–《統合》と《変数化》

前述したとおり，ある対象とある対象が，主体にとってはまだ別のものと見做されているとき，《統合》が働くのは非常に困難である。例えば，ひし形とたこ型を別のものだと見做している主体の場合，ひし形の面積を求める方法にたこ型を《統合》することは困難であろう。この様な場合，主体の状態に応じて，特定の属性がまだ《変数化》されていないことが指摘される。上記の困難さに直面している主体の場合，対角線同士の交点が各々の対角線を内分している比が1：1のまま固定されていることが指摘される。ここで，観点の変更か何かによってひし形とたこ型に《統合》が機能しようとしたならば，これまで《変数化》されていなかった属性（上記の場合は比）の《変数化》が直ちに生じる。

Harel & Tall (1991)は再構成的一般化が一度生じると，直ちに容易な膨張的一般化が生じることを指摘している。《統合》は再構成的一般

化が，《変数化》は膨張的一般化がそれぞれ有する機能であり，まさに《統合》が働いた後には容易な《変数化》が働くことが指摘される。実際，一度ひし形の面積の求め方にたこ型を《統合》しようとした主体にとっては，比を《変数化》することは極めて容易であろう。この様な働き方は《変数化》が機能した後に《統合》が機能する場合とは異なるが，《統合》が機能する際には，不可分な形で《変数化》が機能するということを示している。

–《統合》と《意味付け》

《統合》が機能するとき，《意味付け》も伴って機能するわけであるが，その働き方は他の機能の場合と比べて重要である。というのも，ある観念の元に様々な対象を取り込んでいくことは，中島 (1981) が論じるように数学的な集合を作り上げていく活動そのものだからである。結果として，ある対象と別の対象が，何らかの観念に基づいて –中島 (1981)の言い方を借りれば構造に基づいて– 同じと見做される。従って，《統合》されることでこれまで違うものとして観ていた対象が同じものであると《意味付け》されるということに留まらず，何故それらが同じものであるかという点で《意味付け》されることが指摘される。ひし形とたこ型の《統合》の例の場合，単に見た目でひし形とたこ型を同じものであると《意味付け》するのではなく，対角線同士が直交する図形だから同じものであると《意味付け》することが期待される。換言すると，《統合》が機能することで《意味付け》が機能するが，そこではある構造に基づいた集合として対象が《意味付け》されるといえる。

–《統合》と《発見》

Harel & Tall (1991)によると，再構成的一般化（が有する機能である《統合》または《発見》）が生じたならば，直ちに膨張的一般化（が有する機能である《純化》または《変数化》が生じる。従って，《統合》に続いて直ちに《発見》が機能することは殆ど考えられないといえる。しかし，《統合》に続く《純化》や《変数化》が極めて容易に行われた場合，一見すると《統合》に続いて《発見》が生じたように見えることは想定されるであろう。

他方で，既に述べたように，《統合》は当初の対象の特徴から離れざるを得ない。これは後述するように，《発見》の機能が働くための前提条件でもある。例えばひし形とたこ型の求積方法が《統合》される場合，ひし形の求積方法がひし形以外へと適用され始める契機であり，他の機能が間に働くとしても，最終的には全ての四角形の求積方法の特殊な場合であると《発見》することが期待される。この意味で，《統合》が機能することは《発見》が機能するために，《変数化》以上に重要であるかもしれない一歩であるといえる。

–《統合》と《社会化》

ある対象と別の対象がたとえ数学的に同じものであったとしても，それが常に受け入れられる訳では無い。既に何度か挙げているように，図形に関しては見た目という強い制約が生じるために顕著である(cf. van Hiele & van Hiele-Geldof, 1958)。しかし，《統合》が働く際，ある観念に基づきながらある対象とある対象が同じであるとするため，単にある個々人が同じであるとか，見た目にそうであるといった点を超えて，他者にも受け入れられる形で同じものと見做すようになると

言える。このため，《統合》することで一見すると同じとは思えない対象が同じであるということが，《社会化》されて共有され得ることが指摘される。

3.4 《発見》の機能と他の機能

数学教育のみならず，数学や数理哲学においても，発見[1]が如何になされるかは興味の尽きない議論である。実際に，アブダクションによる発見(伊藤, 1993)，帰納による発見(ポリヤ, 1959)，証明による発見(DeVillers, 1990)など幅広い観点から発見について論じられている。

これら全てとの関わりを言及することは本論文の意図するところではないが，一般化の機能としての《発見》の特徴は，一般化過程で得られた一般性が独立した対象として振る舞う点に認められる。Dörfler (1991)が論じているように，ある一般性（を付与された記号）は主体が認知できないとしても，潜在的に無限の対象・適用範囲を持っており，それ故に様々な形で価値付けることが可能である。一元二次方程式の解を求める一般的方法の一部に，実数解の個数を見抜く方法が潜在していると価値付けることは《発見》の一例であろう。そのため，見出された一般性の反省と，それに伴う自覚的な価値付けこそが一般化における《発見》である。この意味で，《発見》は既に何らかの一般性を見出していることを前提にしなければ発現しない機能である。

以上の様な《発見》の本性を考えると， 他の機能とは次の様な関係を有していることが指摘される。

[1] 既に見出されていることを前提としない発明か，それとも発見かという有名な議論があるが，ここでは両者を特に区別しない。その理由として，アダマール (2002)が指摘するように，主体から観れば両者は心的に同じ働きだからであるということが挙げられる。

–《発見》と《純化》

反省と自覚的な価値付けを伴う以上，《発見》から直ちに《純化》が生じることは殆ど考えられない。後述するように，《発見》の後に続く膨張的一般化は《変数化》である。ただし，《発見》に続く《変数化》などを経て《純化》が生じることは考えられるであろう。前述した二次方程式の例の場合，実数解の個数を求める方法を《発見》したとしたならば，直ちに全ての一元二次方程式へと《変数化》された後に，《純化》によって（解の個数を求めるような）問題が簡単に解決されると考えられる。

–《発見》と《変数化》

一度《発見》が生じたならば，直ちに極めて容易な《変数化》が必ず生じることが指摘される。《発見》が働くとき，思考の対象は特殊な事柄ではなく，ある見出された一般性が具体的に思考の対象となっている。このため，《発見》された事柄は何らかの点で一般的に成立するものであるため，《発見》は《変数化》を伴わなければならない。前述した一元二次方程式の例の場合，解を求める方法に実数解の個数を見抜く方法が潜在していると《発見》したならば，思考の対象となっている解を求める方法の一般性故に，直ちにそれがあらゆる一元二次方程式に適用できると《変数化》される。《統合》に関する箇所で述べたように，再構成的一般化が一度生じたならば，直ちに容易な膨張的一般化が生じる(Harel & Tall, 1991)ことが明らかになっているが，この意味でもやはり《発見》が生じれば《変数化》が生じることが指摘される。従って，《発見》が機能することで，《変数化》が伴って機能することが指摘される。

–《発見》と《統合》

《発見》に伴って《変数化》が生じる以上，《発見》に続いて直ちに《統合》が生じることは無い。ただし，既に述べたように《変数化》の結果として《統合》が生じることは考えられる上に，《発見》に続く《変数化》は極めて容易であるため，見かけ上あたかも《発見》の後に《統合》が生じているように思われることは想定される。

–《発見》と《意味付け》

《発見》が働く際には，それまで《意味付け》られていたこととは異なる価値を付与することが指摘される。そのため，《発見》が働くことによってそれまでとは異なる《意味付け》をすることが要請される。一元二次方程式の例で，解を求める一般的方法の一部を意図的に使用することで実数解の個数が求められると《意味付け》される，ある一般性の反省によって《発見》された事柄は，その一般性と何らかの点で関わりを持つ。そのため，《発見》が機能する際には，既に見出されている一般性との関わりのもとに《意味付け》が機能することが指摘される。

–《発見》と《社会化》

《発見》はそれ単独ならば，《発見》する主体だけが有用であると納得する価値を付与すればよいとも解釈される。しかし通常，我々はその様な状態を教育的に是としない。そうではなく，一般化を通して何かを《発見》するとき，それが他者にとっても有用であり，しかもその様な有用さが受け入れられる形であることを期待する。この意味

で《発見》が機能した際にも《社会化》が機能し，他者にも受け入れられる形になるよう調整されることが必須である。

3.5 《意味付け》の機能と他の機能

新しい数学に対して人が何らかの意味を付与するとき，大別すると図的なモデルを作るか，既知の事柄との関係を見出すかという方法が採られる(cf. Howson, 2005)。後者の場合において，まさに既知の特殊から推論を経て一般的な対象が構成されることで，推論の土台となる重要な意味付けが行われる。しかし必ずしも有用な，あるいは教師などによって意図された《意味付け》が成されるとは限らない(Dörfler, 1991, p. 68)。従って，《意味付け》られた事柄は推論を推進させることもあると同時に，障害ともなり得る。例えば，いくつかの具体的な平行四辺形を基にして平行四辺形の諸性質を一般化したとするなら，そこでは平行四辺形の向かい合う辺が等しくないということまでも《意味付け》されるかもしれず，これはひし形を平行四辺形の特殊な形として見ることを要請する学習においては障害となり得る。

こうした重要性にも関わらず，何が《意味付け》されているかを，外部から推定することはできても，正確に同定することはほとんど不可能である。加えて，《意味付け》はそれ自体が単独で働くというよりも他の機能に付随して（暗黙的に）働くものであると考える方が自然である。このため，《意味付け》がまず最初に働くような場面を考えることは殆ど無益であろう。とはいえ，《意味付け》された対象を考慮しないことは学習を考察する上でよいアプローチであるとは言えない。《意味付け》された対象は主体にとって受け入れられているということでもあり，言うまでもなく，それを基にしない限り認識の発展は考えられないからである。

3.6 《社会化》の機能と他の機能

社会化の機能は他の機能とはやや異なる性格を持ち，一般化全体の調整役として機能し，他者に受け入れられる用に知識を構成するために不可分な機能である。従って，他の一般化の機能が働くとき，程度の差はあれ《社会化》と関わっているのはこれまで追ってきたとおりである。

この意味で《社会化》は他の機能が働いた際の調整役として位置付けられるため，《社会化》の機能が他の機能よりも先に働くということは（少なくとも本研究のように二つの機能同士の関係だけを観るときは）考えられない。既に主体自身の中に何らかの観念が一般化と関わって構成されていなければならず（即ち，他の機能が働いていなければならず），その様な観念が無いのに調整役である《社会化》が働くとは考えられないからである。

加えて，仮に《社会化》が先に働くような場合を想定したとしよう。その場合，主体はある一般化に関する何らの考えを持たないまま，社会的に構成された（又はされようとしている）観念を受け入れるよう努める，ということになる。Sierpinska (2005)が指摘するように，それは集団での思考ではなく，「思考の集団化」を招くと考えられる。少なくとも筆者はその様な学習を是とは思わないし，数学教育という学問領域もまた是としていないと信じている。この意味でも，《社会化》は他の機能が働いた際の調整役以上の役割を果たすべきではない，と筆者は考える。

以上のように，6つの一般化の機能について，二つの機能が働く順序に基づきながら，その構造を検討してきた。各々の関わり方が詳細に

明らかになったことが成果である。しかし，例えば《統合》と《発見》の関係はこれまであまり論じられてきておらず，今後に生きる新たな知見である。勿論，実際の学習において，一般化の機能はもっと複雑に関連しあいながら働いていることは明らかであろう。そうした，より複雑な様相は今後明らかにされていかなければならないが，本章で述べた事柄はその基礎になることが期待される。

次章の目的は一般化の機能と学習者がどの様に関わるかを実際の学習の中で明らかにしていくことであるが，その過程で本章で述べた一般化の機能に基づいた具体的な活動の設計（アプリオリ分析）が成される。

第3章の参考・引用文献一覧

DeVillers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in Mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. v. Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: comments and reflections. *ZDM Mathematics Education, 40*, 143-160.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic. *for the learning of mathematics, 11*, 38-42.

Hejny, M. (2003). Understanding and structure. In M. Mariotti (Ed.), *proc. CERME3 WG3* (pp. 1-8). Bellaria.

Howson, G. (2005). "Meaning" and school mathematics. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in mathematics education* (Vol. 37, pp. 17-38): Springer.

Malara, N. A. (2012). Generalization processes in the teaching/learning of algebra: students behaviours and teacher role. In M. B, Tatsis & T. K (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 57-90). Poland, Rzeszów: Rzeszów University.

Panizza, M. (2009). Generalization and control in algebra. In V. Durand, S. Soury & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 589-598). Lyon (France).

Sierpinska, A. (2005). Discoursing Mathematics Away. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 205-230).

van Hiele, P. M., & van Hiele-Geldof, D. (1958). A method of initiation into geometry at secondary schools. In H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry* (pp. 67-80). Gronigen: Qolters.

アダマール, J. (2002). 《数学における発明の心理》 (伏見康治, 大塚益比古 & 尾崎辰之助 訳). みすず書房 (原著版は1954年)

伊藤説朗. (1993). 《数学教育における構成的方法に関する研究（上）》明治図書出版

中島健三. (1981). 《算数・数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察》 金子書房

藤井 斉亮, 俣野 博 ほか. (2012). 《新しい数学1》 東京書籍

ポアンカレ, H. (1953). 《科学と方法》 (吉田洋一 訳). 岩波書店 (原著版は1908年)

ポリヤ, G. (1959). 《数学における発見はいかになされるか1 帰納と類比》 (柴垣和三雄 訳). 丸善株式会社 (原著版は1953年)

第4章：一般化の機能と学習者の関わり方

本章の目的は，実際の学習者が一般化の機能とどの様に関わるかを教授実験を通して観察し，第2章と第3章の成果の有効性と限界を示すことである。そのため，まずはこうした教授実験の方法論と目的を検討し（4.1節），第3章までの研究成果を用いた教材を具体的に提示し（4.2節），教授実験の前提となる学習観を明確にした上で理論的予測と教授実験の実際を比較・検討することで理論の有効性と限界を示す（4.4節）。

4.1 一般化の機能とその構造に基づく教授実験の目的と方法

前節まで，本研究は純粋に理論的な見地から一般化の機能を特定し，その順序に基づいた構造を述べてきた。他方，本研究を含め，如何なる数学教育研究も，その究極の目的は実際の学習の改善にあると言ってよい。そのためには，研究成果に対してある程度時間と空間を超えた一般性が要請される。こうした一般性を保証する方法を考えたとき，通常は量的研究という手法が採られる。量的研究とは，一定数以上の標本を対象にテストやアンケートなどを行い，その結果によって研究成果が一般的に成立することを示す研究手法である。特に，ある事柄（例えば「記号の対象化 (Dörfler, 1991)」や「繊細な注意の移行 (Mason, 1989)」を，ある条件に置かれた学習者達が達成できた/できないということ，またはそれらの傾向を調べる際には，非常に有用である。

他方で，我々の研究がそうであるように，実際の学習者が何を考えているか，あるいはどの様な実態であるかを知ろうとするとき，量的研究ではその様な点が見落とされるため，より繊細な分析が必要とされる場合もある。例えば，ある学習者が「記号の対象化」が出来なかったとして，その学習者が実際に何を考えているのか，あるいは何故

「記号の対象化」が出来なかったのか･･･少なくとも本研究はそういった事柄に関心があり，またその様な知見の方が本研究の目的にとって有益であると考える。

この様な関心を持つ場合，研究手法としては質的研究が採用される。ここで質的研究とは，単一（あるいは少数）の事例を詳細に分析することを通して，研究成果の一般性を多少犠牲にしてでも何か新しい知見を獲得することを意図した研究手法である[1]。我々は理論的見地から，一般化の機能とその構造を明らかにしてきた。しかしながら，学習者達が一般化の機能とどの様に関わるかは，十分に明らかではないし，明らかにされなければならない。

ここで注意するべきこととして，ある一般化の機能を，学習者がどの様に機能させたかを同定する基準の問題が考えられる。ある学習者が実際に一般化しているときに，例えば《変数化》しているのか，それとも《統合》しているのか，といったことをいかなる基準に基づいて特定するかは極めて困難であることが指摘される。また，仮にその様な基準が明らかになったとしても，その特定作業自体にもやはり高度な技術が必要とされるであろう。このため，表2−1に代表される一般化の機能を分析の枠組みとして使うことは，その学習指導を改善するための効果を大幅に制限してしまう恐れがあり，それは本研究の意図するところではない。仮にこうした問題点を全てクリアしたとして，第1章で指摘してきたように，何かの基準に基づいて学習者の活動を観察して，《変数化》が出来た / 出来ないといったことを判断したとしても，それは少なくとも本研究が真に知りたいことではない。

---

1 この様な研究手法を採った代表的な研究として，Erlwanger (1973)によるコンセプション（学習者の考え）の明確化が挙げられる。

そこである特定の機能が積極的に働くよう，学習の設計のために一般化の機能を用いることが有用である。この様な用い方をした場合，単に前述した基準の問題を回避出来るという理由のみならず，学習の設計のための強力な道具として一般化の機能を用いることが可能である。しかも，設計された活動と対比することで，明示的な基準に基づく観察が困難な学習者の活動や活動の様相を浮かび上がらせることが期待される。

また，異なる観点からは「実際の学習を観察し，そこから理論を導く」という手法を採るべきだという考え方があるかもしれない。しかしながら，序章でも述べたように，この様な手法には極めて慎重にならなければならない。科学哲学においてハンソン (1986)が明らかにしたように，観察は全く客観的ではなく（勿論，見えている映像は一緒であろうが），観察主体の持っている知識や考え方に全面的に依存している。ハンソン (1986)はこれを観察の理論負荷性と呼んでいるが，我々が観察を試みようとするときに，自身がどの様な理論に立っているか–即ち，どの様な理論負荷を掛けて対象を観ているか–に注意を払う必要が認められる。特に本研究が研究対象とする「一般化の機能」はこれまで明示的な問いの対象となってきていないものである。従って，感覚的・あるいは直観的な「機能」が多くの研究者に共有されていたとしても，明示的な理論として「一般化の機能」を明らかにした上で，観察を行わなければならない。

以上の様な背景から，我々はここで質的研究，特にその方法としてアプリオリ分析とアポステリオリ分析という研究手法(cf. Artigue, 1992; 宮川, 2011)を採用する。ここでアプリオリ分析とは，理論と数学から授業を設計し，実施される授業が成功的な例となるように実施する手

法である。しかしながら，理論が不十分であったり，別の要因が関係するなどの理由によって，理論的な予測が必ずしも実現しない場合が考えられる。このため，事後の分析としてアポステリオリ分析が実施され，アプリオリ分析（≒授業設計）に用いられた理論の適用範囲や限界を明らかにすることが意図されている。

後述するように，我々はアプリオリ分析によって実際の学習を2つ設計し，特定の一般化の機能が働く「期待される活動」をいくつか設定する。それらの活動自体は（アプリオリ分析の結果という理論的枠組みに基づいて）観察可能である。そこで，それらの活動を行ったことで対応する一般化の機能が働いたと見なすことで，前述した基準の問題をある程度クリアしつつ，アポステリオリ分析が可能であると考える。

4.2 アプリオリ分析による具体化

本節では，二つの教材に対してアプリオリ分析を実施していく。序章で述べたように，本研究の主たる関心は中学校におかれているため，選択された教材は二つとも中学校に該当する内容である。本稿が同定した一般化の機能は，その同定過程を見れば解るように，内容領域の固有性に依存していない。しかしながら，通常は内容領域の固有性に応じて一般化の様相が変化することが知られており，典型的な例として図形に関わる場合と，数と式に関わる場合の違いが指摘されている(cf. 岩崎, 2007)。このため，本節は図形に関わる場合として「円周角の定理」を，数と式やそのパターンに関わる場合として「正方形の個数問題」を選択し，アプリオリ分析を行う。ただし，期待される活動という観点から分析を行うため，活動として表出し辛い《意味付け》と《社会化》に関しては分析の枠組みとして用いていない（加え

て，《社会化》は調整役であるため，「期待される」活動としては尚表出し辛い）。

4.2.1 一般化の機能に基づく授業の構成：円周角の定理

円周角の定理は，中学校で扱われる幾何の代表的な定理の一つであり，ある円の弧が作る円周角に対して「中心角は円周角の半分である」，「円周角は常に一定である」という二つの命題を含んだ定理である。定理自体は比較的単純である一方で，その証明にいわゆる「場合分け」を必要とする点で豊かな内容を含んだ定理である。というのも，（中学校では）通常，この定理の証明は次の図4−1のように，三つの場合に分けて証明される。

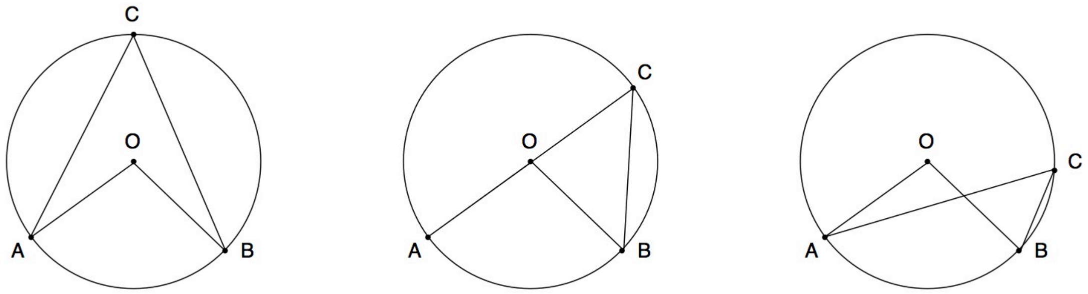


図4−1：円周角の定理の三つの場合

従って，ある図に基づいて《変数化》された一般性に含まれることを明らかにする必要が認められるという点で，価値ある場面である。しかし，我々が真に注目するのはそこではない。我々が真に注目するのは，なぜ上記三つに代表される場合で，全ての円と円周角について円周角の定理が成立すると言えるか，という点である。

通常，図4−1の一番左側の場面においては，点Cと点Oの間に補助線を引き，二つの二等辺三角形OACとOBCを作り，外角の性質に基づいて∠OBCと∠OCBの和と，∠OACと∠OCAの和が，中心角AOBに等し

くなるという考え方を以て定理が正しいことを示そうと試みる。他方で，図4−1の一番右側の場合は一見すると，やや複雑な考え方を要するようにも見える。しかしながら，もしも図4−1の真ん中の場合が，左側の場合の二等辺三角形OACの点Oが成す外角の角度が0の場合であると捉えられたならば，右側の場合は二等辺三角形OACの点Oが成す外角の角度が負の場合であることが《発見》され（当然，左側の場合は二等辺三角形OAC点Oが成す外角の角度が正の場合である），三つの場合が一つの考え方の基に《統合》されることが期待される。こうした活動によって，初めて「円周角の定理」という概念に，全ての円と円周角が含まれていると認識されると言える。このことを学習目標とするとき，図4−1に示した三つの場合について「円周角の定理」が成り立つことが認識された上で，それらを一つの考え方に纏めることができないか，ということが問いとして提示されなければならない。従って，次の活動が設定される。

活動1−4）三つの場合を一つの考え方で《統合》する

この活動を実施するにあたっては，3章の分析を参照すると，三つの場合それぞれについて円周角の定理を《変数化》を伴って見出しておくと共に，各々の場合に準じてどの特殊が《統合》されているかを認識している必要がある。このため，次の活動が活動1−4の前提として設定される。

活動1−3）三つの場合に分けて，それぞれ「円周角の定理」を示す
活動1−2）当該の特殊に含まれる一般性が限定されることに気付く

当然，これらの活動の実現のためには，何れかの特殊に基づいて（《純化》を経るかもしれない）《変数化》を伴って「円周角の定理」に気付いておくことが前提とされなければならない。従って，活動1−2と1−3の前提として，次の活動が設定される。

活動1−1）特殊な場合で「円周角の定理」を見出す

これらを，一般化の機能（表2−1）に照らし合わせ，またその認識論的な順序に基づくと，より詳細には次の様な活動が設計される。

活動1−1）特殊な場合で「円周角の定理」を見出す

ここでは，一般化の機能の内《変数化》が要請される。具体的な図（ここでは図4−1の一番左の図を用いると想定する）を基に，（いくつかの場合について）円周角と中心角を調べることで，円周角と中心角の間に常に一定の関係が成り立つであろうと，不要な属性である半径の長さ，具体的な角度などを《変数化》する。ここでは全ての円と円周角について《変数化》した事柄が成り立ちそうであると認識されるが，3章の《変数化》と《統合》の節で述べたように，必ずしもどの様な特殊をそこに帰することが出来るかは不明瞭なままである。

活動1−2）当該の特殊に含まれる一般性が限定されることに気付く

上記で《変数化》された事柄を証明する。証明の結果，《変数化》された性質に《統合》可能な特殊は全ての場合ではなく，特定の位置に点Cがある場合に限られる，ということを認識する。これは，《変数化》された事柄を具体的に扱うために必要である。

活動1−3） 三つの場合に分けて，それぞれ「円周角の定理」を示す

活動1−2の結果として，点Cの位置に応じて考える必要が見出され，残り二つの場合についてもそれぞれ「円周角の定理」が成り立つかが考察される。ここで，各々の場合についてもやはり不要な属性が《変数化》されると共に，点Cの位置に応じて特殊を《統合》することが要請される。

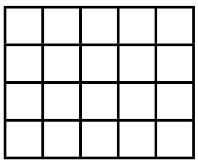
活動1−4） 活動1−3で展開された三つの場合を，一つの考え方で統合

活動1−3までを通して，三つの（代表的な）場合において「円周角の定理」が成り立つことが認識されている。ここで我々は三つの場合についての《発見》を期待しているわけであるが，何らの手立ても無しに《発見》が生じることは考えにくい。3章で明らかにしてきたように，《変数化》から直ちに《発見》が成されるとは考えにくいからである。そこで，三つの場合の内の二つ（ここでは，図4−1の左と真ん中の場合を想定する）を比較し，一つの考え方に纏められないかと《統合》を要請することが考えられる。要請の結果として，二等辺三角形AOCの点Oが成す外角の明示的な《変数化》が要請され， 図4−1の左の場合において，二等辺三角形AOCの点Oが成す外角の角度が0度になった特殊な場合が図4−1の真ん中の場合であることの《発見》が期待される。これは，やはり3章で述べたように，《統合》は《変数化》以上に対象の特徴から離れることを要請するため，《発見》が生じやすくなると考えられるためである。直ちに，二等辺三角形AOCの点Oが成す外角の角度が様々な角度へと《変数化》されると共に，それが負になる場合が図4−1の右側の場合であることが《発見》され，やはり様々な角度へと《変数化》される。結果として，二等辺三角形

AOCの点Oが成す外角の角度という観念に基づき三つの場合が《統合》され，全ての円と円周角について円周角の定理が成り立つことが認識される。

4.2.2 一般化の機能に基づく授業の構成：正方形の個数問題

パターンを発見し，踏査する活動は一般化する活動の典型的な場合であり，第1章で述べたように，代数的な能力を育むという観点からも注目されている。ここでは，一つの典型例として次の様な問題を考えてみたい。

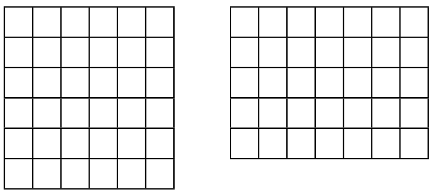


左の図のように，大きさの等しい正方形がならんでいる。この図の中に，正方形はいくつあるか？

上記の図の場合，最小の正方形の1辺の長さを1とするなら，大きさ1の正方形は4×5で20個あることはすぐ見出されよう。しかし，正方形はそれだけではない。大きさが2〜4の正方形もまた認めることが出来る。恐らく，最初は大きさが2〜4の正方形の個数を一つ一つ数えていくことしかできないであろう。しかし，注意深く観察すれば，正方形の大きさが1増えるごとに，縦・横それぞれに並べることが出来る正方形の個数は1個ずつ減っていくことが認められる。結果的に，大きさ2の正方形は3×4で12個，大きさ3の正方形が2×3で6個，大きさ4の正方形が1×2で2個あり，合計すると正方形の個数は50個になる。この様に正方形をならべたとき，縦横の枚数にかかわらずこの規則は常に成立する。

この問題は，様々な一般化が可能であり，それらの一般化の内どれを志向するかによって多様な展開が可能である。従って本研究で取り扱う価値のある問題であり，この問題，あるいはこれに類する問題を，便宜上「正方形の個数問題」と称する。

この問題に対しては様々な一般化が可能であるが，ここでは式を読むということにより注目し，《発見》することを目的とすることにしたい。具体的に言うと，この問題において周の長さが一定であるならば，正方形状にしたときに正方形の個数が最も多くなることの《発見》（と《変数化》）を意図したい。前節では《統合》によって《発見》を促すアプリオリ分析を行ったため，ここでは《純化》によって《発見》が促されるような活動を想定し，次の様な問題場面を設定して考えてみたい。



上の図のように，1辺が1である正方形を，それぞれ6×6，5×7に並べた。それぞれの図形の中にある正方形の個数は，どちらの方が多いだろうか？

ここでは，周の長さを決定するに際して，《変数化》または《純化》を期待するために，あまり正方形の個数が多くなりすぎず，少なくもなりすぎない値として24を選択し，二つの場合を提示している（尚，6×6には91個，5×7には85個の正方形がある）。

この問題に直面した学習者が，直ちに答えを得るとは考えにくい。また，最終的に《発見》を期待するためにも，まずは《変数化》や

《純化》を期待したい。従って，まずは具体的に正方形の個数を調べていくことが想定されるため，次の活動が設定される。

活動2−1）具体的に正方形の個数を調べる

こうした方法は確実に答えを求められるものの，手間がかかるため出来れば回避したくなる。そこで学習者は《純化》を機能させることが期待される。しかし，この問題において《純化》を機能させるためには，何らかの点で正方形の個数の増え方に関する規則に着目せざるを得ないため，同様に《変数化》を機能させることも期待される。従って，《変数化》の後に《純化》される場合と，《純化》の後に《変数化》される場合が考えられる。ただし，3章の成果において，《純化》の後に《変数化》が働く場合の前提として，何らかの一般性が（直観的に）把握されていなければならないことが解っている。この問題について，その様な一般性が何らの手立ても無しに直ちに把握されるとは考えにくい。この様な場合は，《変数化》によって規則を認めることで《純化》されることが期待される。この様な場合として，次の様な活動が考えられる。

活動2−2A）縦・横にならぶ正方形の枚数に注目しその個数を求める

これは既に述べた通り，正方形の大きさが1増える毎に縦・横に並ぶ正方形の個数が一つずつ減っていくということを《変数化》することで，6×6の正方形の個数であれば6×6＋5×5＋･･･＋1×1で求めることが可能になり，問題を簡単に解決できるようになった− 《純化》の機能が働いた −と言うことが出来る。しかしながら，《変数化》出来るの

は縦・横にならぶ正方形の個数だけではない。下の表は，正方形の1辺の大きさに対応した，それぞれの図の場合における個数であるが，いくつかの規則を認めることが出来る。

表4−1：正方形の長さと個数

正方形の一辺の長さ	1	2	3	4	5	6
6×6に認められる正方形の個数	36	25	16	9	4	1
5×7に認められる正方形の個数	35	24	15	8	3	0

具体的には，同じ長さの正方形の個数が1ずつ違うという規則，あるいは正方形の一辺の長さを1増やす毎に，正方形の個数が11個，9個，7個･･･と2個ずつ減っていくという（階差数列になる）規則を見出すことができ，それぞれ《変数化》が可能である。従って，

活動2−2B）正方形の個数自体の規則を見付け，正方形の個数を求める

が設定される。ここで活動2−2がAとBと並記されるのは，個々人の着目の仕方に応じて，どちらを選んでも，一般化の機能として《変数化》に続く《純化》が達成されており，問題を容易に解決できるためである。ただし，活動2−2Bの規則は，活動2−2Aで示した縦・横に並べられる正方形の枚数の減少に基づくものである。ここで《変数化》された規則は，同様の（正方形を敷き詰めた）場面であれば，その縦・横の枚数に関わらず適用することが出来るため，個々の特殊を《統合》することが出来る。3章で述べたように，これは敷き詰められた正方形の縦・横の個数の《変数化》を伴う。このため，

活動2−3）見出した規則が，敷き詰めた正方形の縦横の個数を問わず全ての場面で用いることが出来ると《統合》する。

が設定される。

先に述べたように，我々はこの問題において，最終的にこの問題において周の長さが一定であるならば，正方形状にしたときに正方形の個数が最も多くなることの《発見》（と《変数化》）を意図したい。しかし，3章で分析したように，《変数化》は《発見》に到るための条件ではあるが，十分に《発見》を促すとは言えない。そこで，《純化》によって《発見》を促すことが想定され，次の様な活動を設定することができる。

活動2−4）正方形の個数を求める計算同士を比較し，周の長さが一定ならば，正方形状に配列したときに正方形の個数が最も多くなることを《発見》する

これは6×6の図中の正方形の個数が6×6＋5×5＋4×4＋3×3＋2×2＋1×1となり，5×7の図中の正方形の個数は5×7＋4×6＋3×5＋2×4＋1×3となり，大きさが1〜5の正方形の個数同士を比較すると，常に6×6の図中の方が大きいことの《発見》を意図している（加えて項数自体も少なくなる）。この《発見》を《変数化》して全ての場合へと広げたならば，この問題（あるいは類似した問題）において，正方形の個数を比較するのは極めて容易である。

以上の様に，2章と3章の成果を利用してアプリオリ分析に取り組んだ。二つのアプリオリ分析は，節の冒頭で述べたように内容の違いも

あるが，分析方法も若干異なっている。円周角の定理の場合，我々は目標である三つの場合の《統合》に必要な活動と一般化の機能は何か，それらの活動と機能が働く前提となる活動と機能は･･･と，期待される活動の順序からみて逆向きに分析を行った。一方，正方形の個数問題の場合，目標である《発見》を意識しつつも，基本的には問題場面に対してどの様な活動と一般化の機能が働くと期待されるか，その結果としてどの様な活動と機能が･･･と，期待される活動の順序に従って分析を行った。勿論，どちらかの方法が優れているというわけではない。問題場面・状況・目標などに応じて，柔軟に分析方法を使い分けられることが重要なのであり，この意味でも2章・3章の成果は有用であろう。

4.3 教授実験の分析

4.3.1 問題解決学習と一般化

4.2節のアプリオリ分析を基に，次節では実際の授業の指導案を設計し，実践し，アポステリオリ分析に取り組む。しかしながら，授業の実践にあたっては，必ずしも理論化されていない側面もある。そこで，本研究が授業設計にあたって本研究が依って立つ前提を概観しておくことにする。

我が国の授業への関心が集まる切っ掛けになった，TIMSS Video Researchの報告書「The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom (Stigler & Hiebert, 1999)」に見られるように，我が国の授業には幾つかの特徴が有り，世界的に高い評価を受けている。こうした授業は，その殆どが経験的な事柄の積み重ねであり，理論化が未だに不十分であるため批判されているという面

もある。そうした点を加味しなければならないにせよ尚，我が国が育んできた実践は有用であると我々は考える。

一般的に，我が国の授業は問題解決型の授業であると言われる。通常，この授業は「問題提示（問題把握）」，「自力解決」，「練り上げ」，「振り返り」の4つの段階を経て（「振り返り」は時間の都合で省略されることも多いが）実行される。ただし，これらの用語は我が国に限っても広く行き渡っており，その使われ方が多様になっている。本研究は，こうした問題解決学習を提示したFESMの理念と，その用語の用い方を基本的に踏襲している(cf. 田中, 尾崎, & 前田, 2009)。ここでまず注意すべきは，諸外国（例えばNCTMスタンダード(能田, 清水, & 吉川, 1997)に見られるように）で見受けられるように「問題解決」という能力，方法などを指導することを第一の目標とはしていないという点である。諸外国の場合，どちらかといえば困難であったり，数学的モデリングを必要とするような（実世界の場面の）問題を解決することが出来るようになる能力を育む，という意味で問題解決という用語を用いることが多い。いわゆる，応用問題やその解決能力に近い。対して，我が国で問題解決という用語を用いるとき，問題解決を通して学ぶことを意図している点が挙げられる。即ち，ある問題の解決が要請されたとき，そこで既有の知識を駆使して問題を解決し，その結果として新しい知識を生み出し，かつその生み出すプロセス自体で学ぶということが意図されている（その結果として，NCTMなどが意味する問題解決能力を育むということの達成も期待される）。

その様な背景の元で，授業の核心は「練り上げ」という社会的な知識構成の場にあることが指摘される。そこでは，教室全体に共有され

た問いに対して，個々人の認識を基にした，教室全体で共有可能な解決を構成していくことが意図される。言うまでも無く練り上げは単なる意見の発表や共有の場ではないし，授業は練り上げのために構築されるものである。従って，自力解決のため（その共有や発展など）に練り上げという時間が設定されているのではなく，練り上げを実施するために，個人差に応じた指導を行う自力解決という時間が設定されているのである。

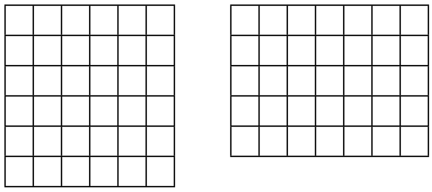
次節で提示する指導案は，アプリオリ分析の成果とこうした授業に対する姿勢を前提としている。従って，例えば設定された「期待される活動」に対して，学習者の個人差に応じるための支援が設計されているし，社会的な知識構成の場は練り上げのみに設定されている。

4.3.2 実施の概要

本研究の教授実験の対象は，日本にある私立中学校1年生の生徒30名（男16名，女14名）である。私立学校であるが，生徒達の数学に対する能力は広範にわたっており，我が国における平均的な能力の教室であると言ってよいと思われる。実験は2014年の11月11日に実施されたものであり，その時点で我が国の通常のカリキュラムに則り，初歩的な代数と，初歩的な関数（比例と反比例）についての学習が良好に達成されている。尚，私立学校であるため通常の学校よりも進度が若干速いが，教授実験が実施された時点では文字式を用いた証明は学習していない。

この生徒達に対して，50分間の授業を一時間，筆者が実践した。ただし，この教室の数学を普段から担当しているのも筆者であり，2014年の4月から，生徒達は筆者に数学を教わっている。尚，筆者自身の教員歴は実験実施日においておよそ1年である。授業のデータはビデオと

写真，そして生徒達が用いるワークシート（図4−2と同じ図と問題が書いてある他は白紙である）によって収集された。生徒達は授業中，全ての事柄をワークシートに書き，原則として書いたことを消さないよう求められている。また，第2章と第3章で同定された一般化の機能，ならびにそのアプリオリ分析である前節の「正方形の個数問題」の内容に基づいて，我々は次の様な問題を用意した。



上の図のように，1辺が1である正方形を，それぞれ6×6，5×7に並べた。それぞれの図形の中にある正方形の個数は，どちらの方が多いだろうか？

図4−2：教授実験に用いた問題

ここで「正方形の個数問題」が実験対象として選択されている理由は，一般化研究の主たる関心がパターンとその一般化に関わる点に依っているということがまず挙げられる。それに加えて，「円周角の定理」よりも多くの一般化の機能が有機的に連関することが期待されるため，教授実験として有用なデータを提供することが期待されるためである。

この授業で設定された「期待される活動」はアプリオリ分析の成果，授業観，学習者の実態に基づいており，図4−3の通りである。

活動Cはアプリオリ分析の活動2−1に，活動B−1とB−2は活動2−1Bと2−2Bに活動2−3を合わせたものに，活動Aは活動2−4にそれぞれ対応している。注意することとして，活動B−2（階差数列の考え）から活動C

を達成することは，学習段階（階差数列の学習は，通常高等学校である）を考慮すると困難であることが予想される。このため，活動B−2を達成した生徒に対しては，活動B−1を促し，集約した上で活動Cへと取り組むよう構造化がなされている。加えて，活動Aで《発見》したことの正当性を証明するのは，二次関数を知らないこの学習段階においては困難であるため，命題の真贋を帰納的に判断するに留めている。

期待される活動C

個々の正方形の個数を具体的に数えて（計算して），調べていくことが出来る。
支援1：何か増え方に規則性は無いか？
支援2：正方形の大きさが1増えると，縦・横に並べられる枚数はどのくらい減る？

期待される活動B−1：『変数化』・『統合』と『純化』

1辺1の正方形が6×6，1辺2の正方形が5×5･･･と，正方形の個数と縦・横の並びに関する規則性に気付き，それを用いて答えを求めることが出来る

支援1：正方形の個数と周りの長さの間に，何か関係は無いだろうか。
支援2：同じ大きさの正方形の個数の計算同士を比較すると，どちらが大きいだろう。

期待される活動B−2：『変数化』・『統合』と『純化』

正方形の個数そのものに関する規則性に気付き，それを適用して答えを求めることが出来る

支援1：正方形の個数を大きさ1の正方形のように計算することは 出来るだろうか？
支援2：縦・横の正方形の個数は，どの様に減ってるだろう？

期待される活動A：『純化』と『発見』・『変数化』

1辺1の正方形を長方形上に並べて正方形の個数を調べたとき，周の長さが一定ならば，正方形状に配列したときに正方形の個数が最大になることを発見し答えを求めることが出来る。但し，この命題の真贋は帰納的に判断するものとする。

図4−3：アプリオリ分析に基づき設定された期待される活動

また，各活動に対して設定されている支援1は，一般化の機能を働かせるよう促すことが意図されている。活動Cに対する支援は規則への注目に基づく《変数化》を，活動B−2に対する支援は意図した規則への注目に基づく《変数化》を，活動B−1に対する支援は《純化》とそれに続く《発見》をそれぞれ意図している。また，支援2は支援1を受けても尚，活動がうまくいかないときに，より具体的な行為を指示するものとして設計されている。

授業の狙いは，まさに練り上げにおいて活動Aを達成することであり，《発見》によって新たな知識を構成することが意図されている。このため，練り上げの実施に際しては全学習者が活動Cを達成した上で，活動Bに少なくとも取り組んでいることが要請される。

4.3.3 結果の分析

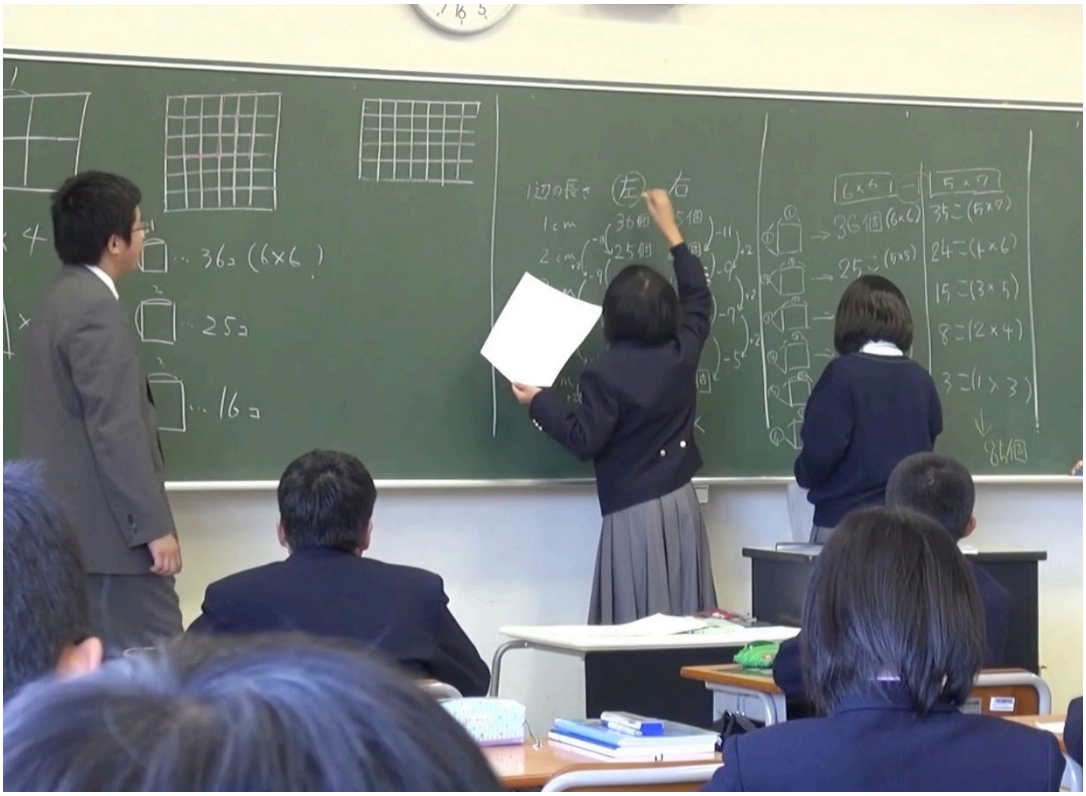


図4−4：自力解決終盤，練り上げに入る直前の授業の様子

活動Cについては，全ての生徒が問題無く取り組んだ。更に，個々の生徒の調べ方や注目に応じて，活動B−1とB−2のどちらに取り組んだかという違いは認められたが，規則を見出そうとすることについては，全ての生徒が問題無く取り組んだ。従って，個数を数えさえすれば答えは求められるものの，問題を簡単に解決するという《純化》が機能したことが指摘される。

3章のアプリオリ分析において，我々は問題場面を直観的に《純化》できないような場合，《変数化》が機能することで《純化》が機能することを述べた。支援を受けたか受けなかったという違いはあるにせよ，これは《変数化》とそれに基づく《純化》に関して，アプリオリ分析と支援設計が基本的にうまくいったことを示している。勿論，このことは全員が実施したという量的な根拠について述べているのではなく（傍証してはいるだろうが），学習者のワークシートの様相においてみることが出来るのである。図4−5と図4−6は，それぞれ活動B−1とB−2を達成した典型的な学習者のワークシートであり，その表記（特に図4−5の場合，正方形の大きさを1増やす毎に縦も横も1枚ずつ減っていく事を明らかに見抜いている）を見れば，いずれもアプリオリ分析ならびに設計された期待される活動と合致した活動を展開したと考えるのが合理的である。

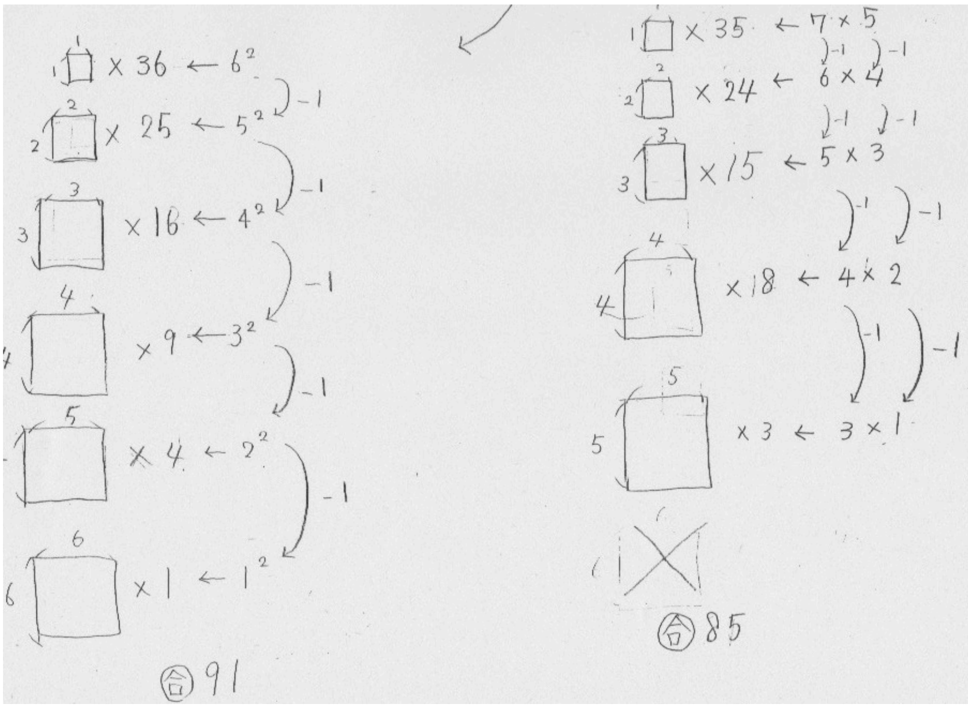


図4−5：生徒Aの解決活動B−1

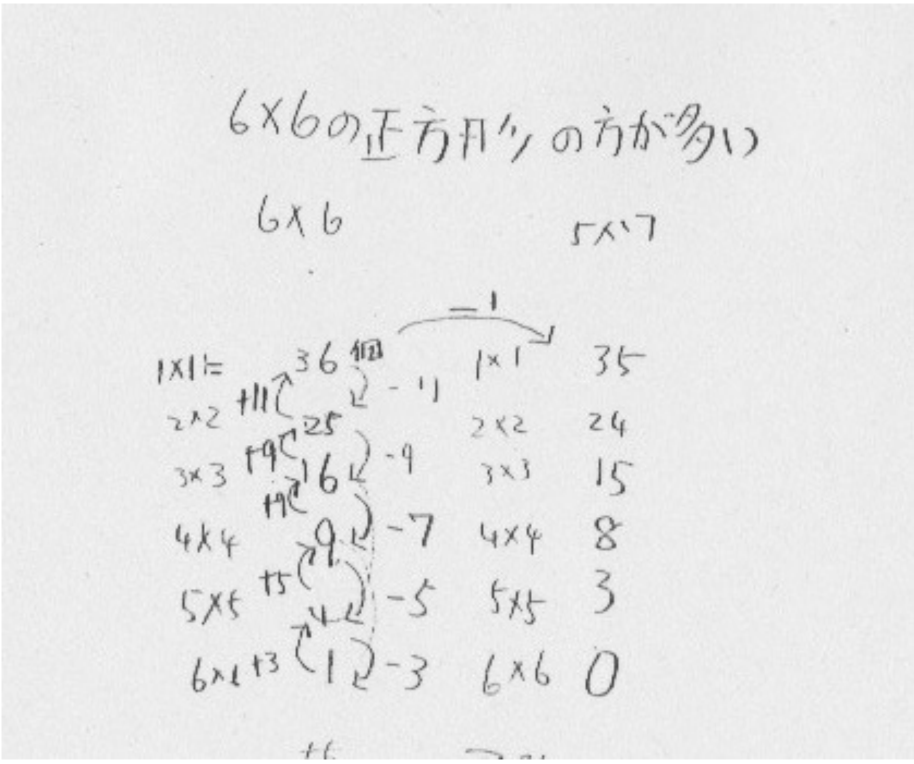


図4−6：生徒Bの解決活動B−2

ところが，活動B−1に関して極一部の生徒は《変数化》に関して十分ではなかった。次の図4−7はその様な生徒Cのワークシートの一部である。生徒Cは活動B−1に取り組み，「縦横の長さが m の正方形に対して，正方形の個数は $m^2+(m-1)^2+...2^2+1^2$ である」ことを，かなりの時間をかけて（図4−7の左上にその跡が見えるように）見出した。単に数値上の規則だけではなく，図4−7の「1列ずつずらす」という表記に現れているように，正方形の大きさを1増やす毎に，縦と横にならぶ枚数が1枚ずつ減っていることも見出していた。従って，6×6の正方形に含まれる正方形の個数について《変数化》を達成していると判断できる。しかし，5×7の長方形に取り組む際，容易に求められる大きさ1の正方形を別として，大きさ2の正方形については明らかに同じ考えを適用できていなかった。これは，図4−7の右側で，大きさ2の正方形に対して「6コ × 2」という表記を2回繰り返していることにも現れている（実際の活動としては，計算するのではなく数えていた）。生徒Cのこの状態は，大きさ1の正方形が縦・横に並べられたとき，その差が0である（正方形である）ということを《変数化》できていないと捉えることが出来る。これは学習者の心的な状態に起因しており，図形を見た目で捉えている以上，6×6の場面と5×7の場面を違うものとして捉えていたために生じたのである。

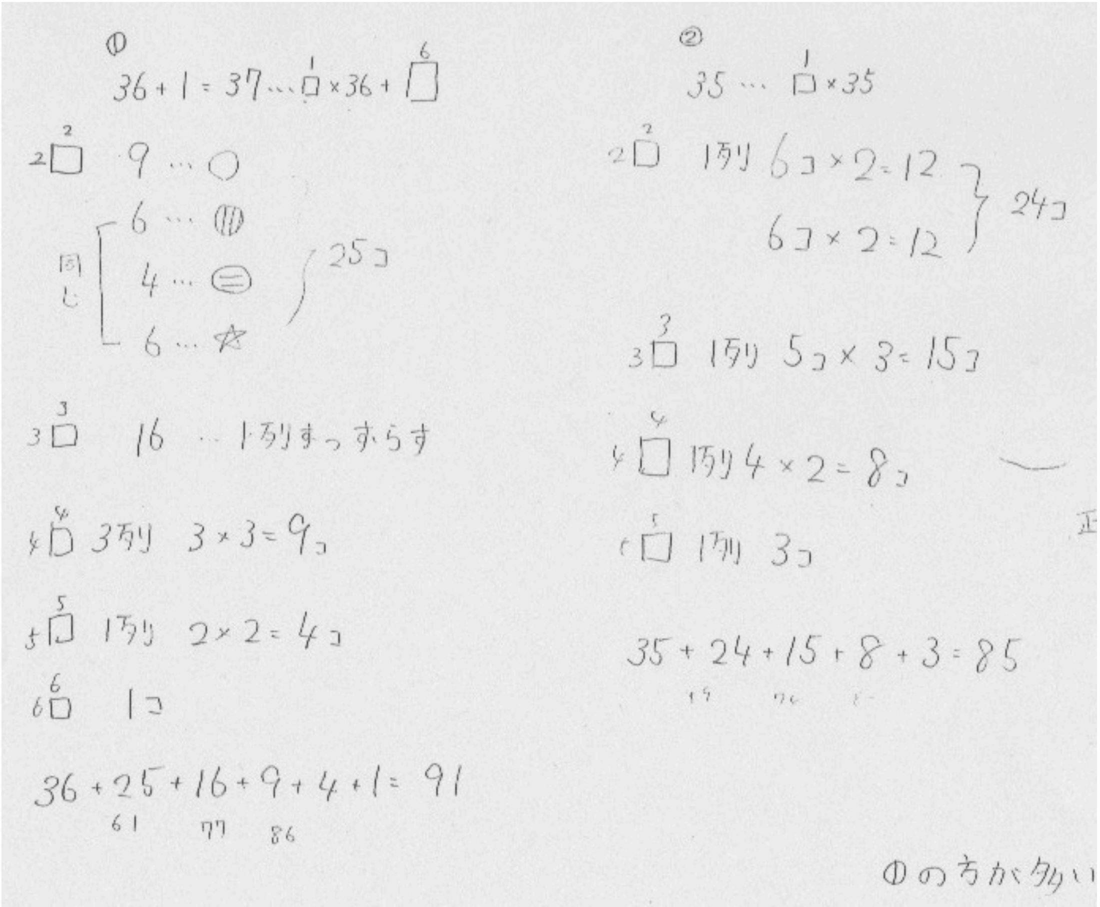


図4−7：《変数化》が不十分であった生徒Cのワークシート

教師はしばらく机間巡視をしながら観察していたが，5×7の図における大きさが3の正方形の個数についても数えることから脱却できていなかったため，計画にはなかったが「左（6×6）と右（5×7）で正方形を調べるとき，同じようなことはなかった？」と支援した。これは，「左（6×6）の場合の正方形の求め方」という一つの観念の基に両者の《統合》を要請していると解釈される。生徒Cはしばらく6×6の図と，関わった計算を見つめ考え，結果として大きさが1増えると縦・横に並ぶ正方形の個数が1ずつ減ることに気付いた。図4−7にも，3×3の正方形の個数を明確に計算で求めていることが記録されている。

3章のアプリオリ分析で，我々は《統合》は，《変数化》と不可分な機能であることを述べた。上記事例において，生徒Cは縦・横になら

ぶ1×1の正方形同士の差に関して《変数化》が出来ていなかったものの，教師の支援によって《統合》が機能することで，それに伴って《変数化》が機能せざるを得なかったと解釈される。これは，3章のアプリオリ分析によって予想されたことと一致している。

さて，学習は順調に進み，授業の練り上げにおいて生徒達は活動C，B−1，B−2を振り返り，正方形の大きさが1ずつ増える毎に，縦・横の正方形が1枚ずつ減ること，それによって5×7，4×6･･･のように正方形を求める計算式に規則が見出されることが確かめられた。また，この様な規則の結果として，活動B−2のような数の規則を生み出していることが確かめられた。その上で，見出された規則が縦・横に並べた枚数に関わらず適用可能なものであることを確かめ，教室全体での合意が達成された（繰り返しになるが，ここで所謂代数的な表記は行っていない）。その後，生徒達は教師から《純化》を要請された。即ち，活動B−1で提示された計算を比較し，1×1の正方形を長方形状に並べた際，周囲の長さが等しければ，正方形の個数が最大になるのは1×1の正方形を正方形状に並べたときであると計算式に価値付け，《発見》することを期待していたのである。教師による問いとして「計算して答えを求めたけど，同じ大きさの正方形同士の計算を比較すると，もっと簡単に答えを求められないだろうか？」と問われた。これは，既に述べたように《純化》を機能させることによる《発見》の期待である。しかしながら，この様な観点の変換は生徒から自発的には出てこなかった。計算式同士の比較自体を行い，いくつかの規則（差が常に1であるなど）には気付いたものの，周の長さに着目することはなかった。最終的に，教師から「（黒板に描かれた6×6の図と5×7の図とその計算を指さしながら）どちらの場面をみても周りの長さは

24で同じだよね。計算だと，掛ける数と掛けられる数の和は12だよね･･･半分だから。何か気付くことは無い？」と，2つの場面の周の長さが共に24であることへの着目を促されることで，意図した《発見》が達成された。《発見》を達成した生徒の殆どはワークシートにその旨を記述しており，その様な生徒の様相が，例えば図4–8の「足して同じ数でも，正方形の方が大きい」という文言に現れている。

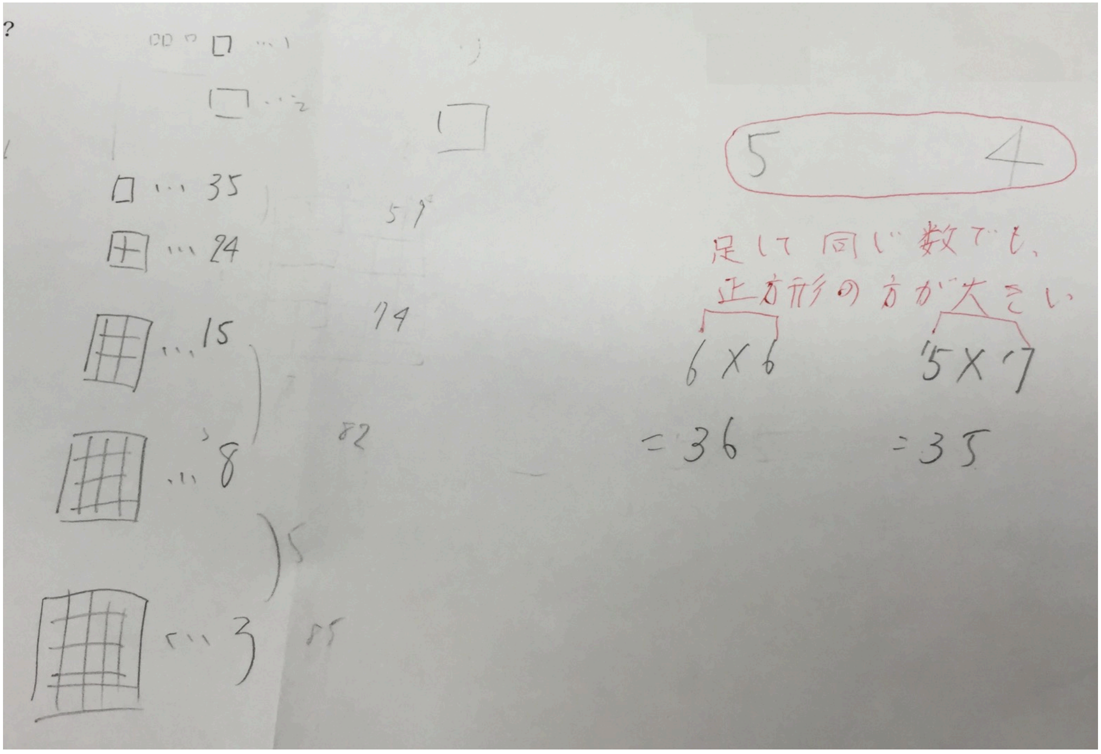


図4–8：意図した《発見》を達成した生徒

この結果は，事前の問題設定・支援設計，それらの前提となるアプリオリ分析の不十分さに帰着させることができる。少なくとも，周の長さを固定した状態に注目した上でその対象の特徴から離れられるような《変数化》や《統合》を意図することが有用であったことが予想される。具体的には，提示する場面に4×8を付け加えたり，周の長さを24で固定した様々な場面で正方形の個数の変化を見るといったことが有用であったかもしれない。また，関連して《意味付け》や《社会

化》との関わりを含めた分析が今後必要とされるかもしれない。例えば，活動C・B−1・B−2で何が《意味付け》されるかを明らかにした上で，《意味付け》されたことと活動Aの関係を見るといったことが有用であろう。

以上の様に，本章では2章・3章の成果を基に，その具体化であるアプリオリ分析と，理論の有効性と限界を調べる教授実験・アポステリオリ分析を行った。最初に断りを入れたように，本研究は質的研究という手法を採ったため，結論の一般性は十分保証されてはいない。しかしながら，アプリオリ分析で予想された事柄の内，少なくとも《変数化》を機能させることで《純化》が機能すること，《統合》が機能することで《変数化》が機能することについては理論的予測と一致する実験結果が得られた。同時に，一般化の機能に基づく授業の設計がある程度有用であったことも指摘される。しかしながら，《純化》が機能することによって《発見》が機能するという予想がうまくいかったというところに理論の限界が認められる。《純化》と《発見》の関係について改めて検討する必要もあろうが，それよりも二つ以上の機能同士のより複雑な様相を捉えたり，ひょっとすると一般化の機能では無い事柄との関係を考えなければ，この点について改善されないかもしれない。

実際の学習の設計にあたっては，活動の設計よりもむしろ支援と一般化の機能の関わりが深かった。言うまでも無く，学習者の活動を促すという目的を持つ支援と，一般化の認識論的な推進力として位置付けられる一般化の機能は親和性が高い。実際，その様な支援によって学習者は一般化を達成するか，少なくとも取り組むことができた。し

かしながら，今回の実験にあたって，支援の設計は一般化の機能を参照しながらも，経験的に構築したものであった。このことは，《発見》がうまくいかなかったことの原因の一つであると考えられる。

第4章の引用・参考文献一覧

Artigue, M. (1992). Didactical engineering. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), Research in Didactique of Mathematics: Selected papers (pp. 41-65). Grenoble: La Pansée Sauvage.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in Mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. v. Dormolen (Eds.), Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching (pp. 63-85). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. Journal of Children's Mathematical Behavior, 1(2), 7-26.

Mason, J. (1989). Mathematical Abstraction as the Result of a Delicate Shift of Attention. for the learning of mathematics, 9(2), 2-8.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom Free Press.

岩崎秀樹. (2007). 《数学教育学の成立と展望》 ミネルヴァ書房

田中光一, 尾崎正和, & 前田静香. (2009). 《FESMインタビュー》 未公開インタビュー記録

能田伸彦, 清水静海, & 吉川成夫. (1997). 《21世紀への学校数学の創造 米国NCTMによる「学校数学におけるカリキュラムと評価のスタンダード」》 筑波出版会 (原著版は1989年)

ハンソン, N. R. (1986). 《科学的発見のパターン》 (村上陽一郎 訳). 講談社 (原著版は1958年)

宮川健. (2011). 「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格−わが国における「学」としての数学教育研究をめざして−」. 《数学教育学論究》, 94, 37−68

終章：本研究の総括と今後の課題

本章では，本研究の主題である「数学学習における一般化の機能」に関する，これまでの理論的検討を振り返り，得られた知見を整理する。

本研究の成果

本研究における研究目的は以下のとおりであった：

《 本研究の目的 》
数学学習における一般化の機能を学習者の観点から同定すると共に，それらの機能と学習者が，学習の中でどの様に関わりあっているかを明らかにする。

この目的に対して，本研究では以下の三つの研究課題を設定し，その解決を試みた：

［研究課題1］ 数学学習において一般化が有する機能の全体像を同定すること
［研究課題2］ 研究課題1で明らかにされた一般化の機能がどの様な構造を持つかを明らかにすること
［研究課題3］ 研究課題1と2を踏まえ，実際の学習において学習者は一般化の機能とどの様に関わるかを明らかにすること

これらの課題に対する取り組みと成果を各章ごとにまとめ，論文全体を整理・俯瞰する。

第1章：数学学習における一般化研究の成果と課題

本研究の主題である，数学学習における一般化の機能は，これまで検討されてきていない研究対象である。しかし，数学教育研究においては検討されていない研究対象であるということと，研究として価値が認められるものであるかは別の話である。そこで，第1章は一般化に関する先行研究を概観し，成果と課題を整理した。

国際的な動向としては「数学学習における一般化とは何か」ということが課題としてあがっており，Dörfler (1991)を初めとする研究が成果を挙げている。近年では，この問いに対しては或る程度答えが出たものと見做され，一般化を用いた学習や，一般化を用いて特定の能力（代数など）を育むといったことが研究対象となってきていることを示した。我が国の動向としては，国際的な動きとはやや一線を画した独自の動きが認められ，幾つかの点で優れた成果を残しており，特に一般化と拡張(cf. 中島, 1981)という極めて重要な区別を，時代を先取りする形で認めていることを示した。これに倣い，本研究も一般化と拡張を区別し，拡張を研究の対象から外している。

こうした成果を挙げる一方で，学習者の観点から一般化を捉える試みの不足を指摘した。例えば，Dörfler (1991)によって提示された一般化モデル (Dörfler, 1991, p. 74)は，明らかに理想的な学習者を観察者の視点からモデル化したものである。更により重要な課題として，一般化の個々の様相が何故促進されるのかということについて言及していない点が挙げられる。結果として，一般化する能力と傾向は幼い学習者にさえ備わっているにも関わらず，一般化しようとしない場合があるという実態が知られている(Tatsis & Tatsis, 2012)。

この点について，個々人の興味や関心，メタ認知といった，認知的な観点からの検討は行われてきており，一定の成果を挙げている。しかし，そもそも一般化自体がどの様な状況で要請されるものかという点についてはあまり議論されてきていない。例えば，「3＋5＝8」という計算一つからゴールドバッハの予想へと一般化することは可能であるが，実際にその様な一般化が生じることは殆ど考えにくい。後者のような一般化の推進力を個々人に依存せず，普遍的に求められる認識論的な推進力として捉えたとき，そこには一般化の意味・目的・実用性が該当すると考えられる。我々はこれらを纏めて，一般化の機能と呼ぶことにした。

以上二つの課題から，我々は一般化の機能を学習者の観点から同定する必要があることを示した。

第2章：数学学習における一般化の機能

第1章の課題より，学習者の観点から一般化の機能を同定すべく，まず学習者の観点から一般化という活動そのものの本性について考察した。ここで，我々はHarel & Tall (1991)による，ある事柄の適用範囲を単純に広げる「膨張的一般化」と，ある種の再構成によって適用範囲を広げる「再構成的一般化」という分類に注目した。氏らの一般化の区分は学習者の観点に基づいており（従って，本研究の言う拡張に該当する選言的一般化も同定されている），本研究の目的のために有用だからである。ただし氏らの分類において，「再構成」の意味がやや漠然としているため，ある種の再解釈も含むものとして捉え直すこととした。

この様に考えると，「膨張的一般化」に対応して，ある事柄の適用範囲を単純に広げることそれ自体が機能を有する場合と，広げることによって何らかの機能を発現させる場合があることが指摘される。前者として，我々は本質的ではないと見做した事柄を変数にして推論の適用範囲を広げる《変数化》を，後者として問題を簡単に解決するために本質的ではないと見做した事柄を無視する《純化》を同定した。同様に，「再構成的一般化」に対応して，再構成・再解釈それ自体が機能を有する場合と，再構成・再解釈によって何らかの機能を発現させる場合があることが指摘される。前者として再解釈・再構成によって推論の適用範囲を広げる《統合》を，後者として再解釈・再構成によってある事柄を数学的に価値付ける《発見》を同定した。

更に，Harel & Tall (1991)は理解という観点から一般化と意味の関係に言及している。Dörfler (1991)が強調するように，一般化過程においては個人が見出す意味と，社会的に交渉され共有される意味の二つがあると考えられる。前者として既知の対象と推論から意味を作り上げる《意味付け》を，後者として個々人の認知を社会的に共有可能な認識へと高める《社会化》を同定した。

以上6つの一般化の機能の同定が第2章の成果であり，表5−1（表2−1と同じものである）に纏められる。この表5−1（2−1）の6つの機能が，「研究課題1：数学学習において一般化が有する機能の全体像を同定すること」に対する答えである。これは，例えばDavydov (2008)が観察者の視点から述べる，一般化がある種の不変性を探究した上で単語によって指示し，結果として一般化が便利な構造や体系化をもたらす(pp. 74-75)といった機能とは異なっており，学習者の観点から同定された機能となっている。

表5-1：数学学習における一般化の6つの機能

純化の機能	問題を簡単に解決するために，本質的ではないと見做した属性を無視する
変数化の機能	推論の適用範囲を広げるため，本質的では無いと見做した属性を変数にする
統合の機能	一つの観念に様々な対象を取り込むことで，推論の適用範囲を広げる
発見の機能	ある問題の解決等に潜んでいる対象を数学的に価値付ける
意味付けの機能	新たな事柄を既知の事柄と推論のみから作り上げ意味を付与する
社会化の機能	主観的な認知をより客観的で共有可能な認識へ高める

第3章：一般化の機能の順序に基づく構造

第2章で明らかにされた一般化の機能は，活動の中で様々な形で働くことが予想される。このとき，各機能が互いに排他的な関係に無いことは明らかである。二つの機能が続けて機能するような場面を想定したとき，機能する順序に応じて認識の様相が異なると考えられる。

従って，この様な機能二者間の関係，それも認識論的な順序を入れた関係を明らかにすることで，一般化の機能についてよりよく理解することが出来ると期待される。なぜならば，2機能の関係は，機能全体の関わりを見る上での最小単位となり得，しかも順序が大きな影響を与えると予想されるためである。

第3章全般に渡って個々の機能同士の順序に基づく関係を述べた。その中で，例えば《変数化》と《統合》が働くとき，働いた順序に応じ

て違いはあるにせよ，必然的に他方の機能が働くことを示した。他にも，対象の特徴から離れて再解釈を行う《発見》が，対象の特徴から離れる《統合》が機能した結果として機能し得ることを論じた。

これら個々の様相が，「研究課題2：研究課題1で明らかにされた一般化の機能がどの様な構造を持つかを明らかにすること」に対する答えである。

第4章：一般化の機能と学習者の関わり方

第4章では，実際の学習者が一般化の機能とどの様に関わるかを教授実験を通して観察し，一般化の機能に関する，第2章・第3章での理論的成果の有効性と限界を明らかにした。我々の目的を鑑み，研究成果の理論的一般性を保証する量的研究ではなく，一般性を犠牲にしてでもより詳細な実態が明らかになることが期待される，質的な分析を行った。また，そのための方法として，アプリオリ分析とアポステリオリ分析という方法を採用した。具体的なアプリオリ分析として，幾何に関わる内容である「円周角の定理」と，数とパターンの踏査に関わる内容である「正方形の個数問題」の分析を行った。

中学校1年生に対する「正方形の個数問題」の教授実験の結果，第3章の成果と，それに基づくアプリオリ分析によって予想された学習者と一般化の機能の関わり方が，ある程度正しかったことが示された。例えばある《変数化》が十分に達成できていない状況で，教師の支援によって《統合》を機能させることで，不十分だった《変数化》が機能したことが観察された。その一方で，《純化》が機能することで《発見》が機能するのではないかと予想したが，実際には自発的な《発見》は機能しなかった。実践上の原因としては，学習者の活動を

促す支援設計の不備に集約することができる。理論的には，《純化》と《発見》の構造に関わる議論を再度行う必要がある。しかしそれ以上に，三つ以上の一般化の機能の構造に関わる議論が不足していること，一般化の機能ではない事柄との関係の議論が不足していること，一般化の機能を授業設計に活かす際の理論的枠組み（特に支援に関して）の不足が考えられる。

こうした成果によって第2章・第3章の成果の有効性と限界が明らかになった。加えて，「研究課題3：研究課題1と2を踏まえ，実際の学習において学習者は一般化の機能とどの様に関わるかを明らかにすること」に対して，一定の様相が明らかになった。ただし，質的研究という方法論の制約から一般性を犠牲にしており，しかも僅か一つの実践であって，一般化の機能全てを網羅しているわけではないことに留意する必要がある。

以上の様に，本研究は，先行研究において明示的な研究対象となっていなかった一般化の機能を研究対象とし，その研究対象としての価値を明らかにしながら，理論的に全体像を提示した。この点が本研究の新規性であり，主たる成果は表5-1（表2-1と同じものである）に示す一般化の6つの機能である。第3章と第4章の成果は，これら6つの機能についての理解を助け，今後取り組むべき課題をも明らかにしている。こうした機能が明らかになったことで，次の様な教育実践上，並びに研究上の意義が認められる。

まず教育実践上の意義を三つ述べておきたい。第一に，我々がアプリオリ分析で示したように，教師は数学学習において，学習者にとって一般化の機能が意味を持つような状況を設計しなければならないと

いう点が示唆される。これは本研究の出発点である，学習者が一般化する能力があるにも関わらず一般化に取り組もうともしないという状態に対して，一般化の機能という認識論的な推進力が寄与することが期待されるためである。例えば《純化》や《統合》といった機能（繰り返すが，本稿における「機能」は学習者にとっての意味・目的・実用性である）を学習者が実感できるような場面を設計することで，一般化に取り組むことが期待される。

第二に，第3章で示した一般化の機能の順序を伴う構造は，授業を設計する上で，特に教師の支援を設計する上での指針となる点が挙げられる。例えば，《統合》が機能するとき《変数化》を伴うことを我々は示したが，実際に学習を設計するとき《統合》を期待する活動と《変数化》の関わりを分析したり，支援の設計に活かすことが可能である。

第三に，おそらく最も重要な教育的示唆として，こうした機能の構造に基づいた授業が日々の実践で繰り返されることを通して，学習者達の中に一般化に関するある種の習慣が形成されることが期待される点である。例えば，何か新しいことを見出す必要があるときに《発見》の機能を用いるために一般化したり，何か全く新しい事柄を見出したときに，既存の対象にも適用範囲を広げるために《統合》の機能を用いるなどの活動を我々は期待したい。しかし，初学者にとってその様な活動を達成することはもとより，取り組むこと自体が何の教授学的手立ても無いままに実現できるとは考えにくい。しかしながら，日々の実践の繰り返しで，それぞれの機能のよさや，3章で述べたようなある種の順序性が精神的習慣として身につくことで，学習者達が自ら一般化の機能を活用し，手がかりとし，数学をする活動に取り組ん

でいくことが期待される。例えば，「ある対象を《統合》出来たのだから，何か《発見》できないだろうか？」と学習者が自発的に考えられるようになったとすれば，それは日々の学習における非常に大きな力である。

次に，研究上の意義について二つ述べたい。まず第一に，本研究の成果が一般化研究に対して新たな対象を提供したことで，いくつかの問題に対して重要な示唆を提供することが挙げられる。例えば，第1章で述べたように，一般化を通して代数的能力を育むということが国際的に広く研究されている。しかし，その成果は未だ十分ではなく，Dörfler (2008)は《統合》の機能に注目するよう（勿論，その様な言葉遣いを直接しているわけではないが）促している。筆者の予想するところでは，他の機能にも注目しなければ，真に代数的な能力を育むことは出来ないであろう。例えば，ある一般性に再解釈を与える《発見》は事象に対して代数記号を用いる決定的な利点の一つである。

第二に，一般化の認知的な推進力に関わる研究への寄与が期待される。第1章で述べたように，一般化を促進するような状況を如何に構築するかは，一般化研究に関わる重要な課題の一つである。これまでは，関心やメタ認知(cf. 岩崎, 2007)といった認知的な推進力に焦点があたって来ていることは既に述べた。例えばある一般化に学習者が取り組もうとしなかったとき，欠けていたのは認知的な推進力なのか，認識論的な推進力である一般化の機能なのかを議論し，また両者の関連を明らかにすることで，より一般化を促進するような状況に関する研究が進展することが期待される。

本研究に残された課題

本研究は，既に述べたように「一般化の機能」という新しい研究対象を価値付けると共に，これまで不明瞭であったその全体像を明らかにした。しかしながら，本研究は基礎研究であり，未着手の課題も多く残されている。特に取り組まれなければならない課題は，次の4つである。

［課題1：内容領域等の固有性に応じた違いの検討］

序章で述べたように，またその導出過程に見られるように，本研究で述べた「一般化の機能」は学習段階や領域を問わず認められるものである。しかしながら，機能の仕方（例えばどの機能が働き易いか，あるいは働きにくいか）は学習段階や領域によって異なり，むしろそれらを特徴付けるであろうことが容易に予想される。この点を明らかにすることは，今後に残された重要な課題である。有力な観点として，代数領域と幾何領域における違いを検討することが考えられる。

［課題2：他の推論の機能との関わりの検討］

実際の学習において，一般化は他の様々な活動・推論と関わる。論証する活動や，拡張する活動は典型的に一般化と関わる活動であるが，それらの活動・推論の機能と一般化の機能がどの様に関わるかを明らかにしなければならない。例えば，De Villers (1990)が明らかにした証明の機能と，一般化の機能の関係（特に，様々な意味で共通点の多い「発見」など）を明らかにすることは，今後に残された重要な課題である。

［課題3：研究成果の妥当性の更なる検証］

本研究が明らかにした事柄は，第4章の授業実験によってある程度妥当性が裏付けられている。しかし，全ての機能について網羅しているわけではないし，また量的な手法を採っていない以上，研究成果の一般性は十分に保証されていない。本研究とは異なる手法の研究によって，研究成果の妥当性を保証していくことが課題である。質的研究としても，例えば抽出された学習者に対するインタビューに基づき，学習者と一般化の機能のより詳細な関わりを明らかにすることが考えられる。

［課題4：一般化の機能の構造に関する全体像の検討］

一般化の機能同士の関係・構造については，本論文ではその最小単位についてしか述べておらず，より複雑な様相が明らかにされるべきである。第4章のアポステリオリ分析で認められた本章の理論の限界は，まさにこの点に帰着できると言える。特に《意味付け》と《社会化》に関しては，観察が困難であることも手伝ってまだ未解明のことが多く，今後明らかにされる必要がある。

以上のように，一般化の機能に関する研究はまだ今後に多くの課題を残している。この新たなる研究対象に対して，恐らくは数学教育研究者と実践者，相互の協力のもとで，更なる検討・発展が実行されることで，時代に応じて求められることを超え，学習がよりよく発展していくことが期待される。

終章の参考・引用文献一覧

Davydov, V. (2008). Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study. NewYork: NY: Nova Science Publishers.

DeVillers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in Mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. v. Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: comments and reflections. *ZDM Mathematics Education, 40*, 143-160.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic. *for the learning of mathematics, 11*, 38-42.

Tatsis, B., M., & Tatsis, K. (2012). *Generalization in mathematics at all educational levels*. Rzeszów, Poland: Rzeszów University.

岩崎秀樹. (2007). 《数学教育学の成立と展望》 ミネルヴァ書房

中島健三. (1981). 《算数・数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察》 金子書房

本論文の引用・参考文献

引用・参考文献一覧

Artigue, M. (1992). Didactical engineering. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactique of Mathematics: Selected papers* (pp. 41-65). Grenoble: La Pansée Sauvage.

Beth, E. W., & Piaget, J. (1966). *Mathematical epistemology and psychology*. Dordrecht, Holland: D. Reidel.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment*. Netherlands: Springer.

Cusi, A., & Navarra, G. (2012). Aspects of generalization in early algebra. In B. Tatsis, M. & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 182-192). Poland, Rzeszów: Rzeszów University.

Davydov, V. (2008). *Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study*. NewYork: NY: Nova Science Publishers.

DeVillers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in Mathematics. In A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen & J. v. Dormolen (Eds.), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 63-85). Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Dörfler, W. (2008). En route from patterns to algebra: comments and reflections. *ZDM Mathematics Education, 40*, 143-160.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et la pansée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuals*. Berne: Peter Lang.

English, L. D., & Warren, E. A. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher, 91*(2), 166-170.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behavior, 1*(2), 7-26.

Freudenthal, H. (1973). *MATHEMATICS AS AN EDUCATIONAL TASK*: D.Reidel.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing: Preface to a Science of Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic. *for the learning of mathematics, 11*, 38-42.

Hejny, M. (2003). Understanding and structure. In M. Mariotti (Ed.), *proc. CERME3 WG3* (pp. 1-8). Bellaria.

Howson, G. (2005). "Meaning" and school mathematics. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in mathematics education* (Vol. 37, pp. 17-38): Springer.

Kieran, C. (1989). A perspective on algebraic thinking. In G. Vergnaud, J. Rogalski & M.Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 163-171). Paris, France.

Krygowska, A. Z. (1979). *Zarys dydaktyki matematyki* (Vol. część 3). Warszawa: WSiP.

Malara, N. A. (2012). Generalization processes in the teaching/learning of algebra: students behaviours and teacher role. In M. B, Tatsis & T. K (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 57-90). Poland, Rzeszów: Rzeszów University.

Mamede, E., & Soutinho, F. (2012). Young children solving additive structure problems. In B. Tatsis, M. & K. Tatsis (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 93-102). Poland, Rzeszów: Rzeszów University.

Mason, J. (1989). Mathematical Abstraction as the Result of a Delicate Shift of Attention. *for the learning of mathematics, 9*(2), 2-8.

Mason, J. (1996). Future for Arithmetic & Algebra: Exploiting Awareness of Generality. In N. Bernardz, K. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Müller, G., & Wittmann, E. C. (2013). *Das Zahlenbuch 2*. German: Klett.

Panizza, M. (2009). Generalization and control in algebra. In V. Durand, S. Soury & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 589-598). Lyon (France).

Radford, L. (1996). Some reflections on teaching algebra through generalization. In N. Bernarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra* (Vol. 18, pp. 107-111). Netherland: Springer.

Sierpinska, A. (2005). Discoursing Mathematics Away. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in Mathematics Education* (pp. 205-230).

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom* Free Press.

Tatsis, B., M., & Tatsis, K. (2012). *Generalization in mathematics at all educational levels*. Rzeszów, Poland: Rzeszów University.

Ursini, S. (1990). Generalization processes in elementary algebra: Interpretation and symbolization. In G. Booker, P. Cobb & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proc. 21th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 149-156). Lahti: PME.

van Hiele, P. M., & van Hiele-Geldof, D. (1958). A method of initiation into geometry at secondary schools. In H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry* (pp. 67-80). Gronigen: Qolters.

Vinner, S. (2012). Generalization in everyday throught processes and in mathematical contexts. In M. B, Tatsis & T. K (Eds.), *Generalization in mathematics at all educational levels* (pp. 22-37). Rzeszów: Wydawnictwo.

Wittmann, E. C. (1995). Mathematics education as a “Design Science”. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 355-379.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of Patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*(3), 379-402.

アダマール, J. (2002). 『数学における発明の心理』 (伏見康治, 大塚益比古 & 尾崎辰之助 訳). みすず書房 (原著版は1954年)

伊藤説朗. (1993). 『数学教育における構成的方法に関する研究（上）』明治図書出版

岩崎秀樹. (2007). 『数学教育学の成立と展望』 ミネルヴァ書房

岩崎浩. (2003). 「メタ知識の構造化，意味の明確化の試み–概念の相補性の視座から–」. 『全国数学教育学会第17回研究発表会配布資料』

大滝孝治. (2014). 『確率概念の形成におけるミスコンセプションの研究』 広島大学未刊行学位論文

小山正孝. (2010). 『算数教育における数学的理解の過程モデルの研究』 聖文新社

近藤祥逸 & 好並英司. (1964). 『論理学概論』 岩波書店

ジェスティ, E. (1999). 『数はどこから来たのか–数学の対象の本性に関する仮説』 (斉藤憲 訳). 共立出版 (原著版は1999年)

真野 祐輔. (2010). 『算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究 :「数」領域の展開を中心に』 広島大学未刊行学位論文

田中光一, 尾崎正和, & 前田静香. (2009). 『FESMインタビュー』 未公開インタビュー記録

ディリクレ, P & デーデキント, R. (1970). 『整数論講義〈現代数学の系譜5〉』 (酒井孝一 訳). 共立出版 (原著版は1864年)

友定章子, 姫田恭江, & 溝口達也. (2006). 「授業設計における一般化と拡張を志向した算数的活動の構成の様相」. 『鳥取大学数学教育研究』, 9(1), 1-10

中島健三. (1981). 『算数・数学教育と数学的な考え方　その進展のための考察』 金子書房

能田伸彦, 清水静海, & 吉川成夫. (1997). 『21世紀への学校数学の創造 米国NCTMによる「学校数学におけるカリキュラムと評価のスタンダード」』 筑波出版会 (原著版は1989年)

ハンソン, N. R. (1986). 『科学的発見のパターン』 (村上陽一郎 訳). 講談社 (原著版は1958年)

平林 一榮. (1987). 『数学教育の活動主義的展開』 東洋館出版

藤井 斉亮, 俣野 博 ほか. (2012). 『新しい数学1』 東京書籍

ポアンカレ, H. (1953). 『科学と方法』 (吉田洋一 訳). 岩波書店 (原著版は1908年)

ポリヤ, G. (1954). 『いかにして問題をとくか』 (垣内賢信 訳). 丸善株式会社 (原著版は1945年)

ポリヤ, G. (1959). 『数学における発見はいかになされるか1 帰納と類比』 (柴垣和三雄 訳). 丸善株式会社 (原著版は1953年)

溝口達也. (2003). 「学習指導における子どものコンセプションの変容に関する研究」. 『鳥取大学教育地域科学部教育実践総合センター研究年報』, 13, 31-41

宮川健. (2011). 「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格−わが国における「学」としての数学教育研究をめざして−」. 『数学教育学論究』, 94, 37−68

文部省. (1940). 『尋常小学算術 第五学年児童用 下』 東京書籍

本論文に関わる筆者の主要な先行研究

Hayata, T., & Koyama, M. (2012). Generalization, mental object, and stability of import. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), Proceedings of the 37th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 3, pp. 17-24). Kiel, German.

早田 透. (2012). 「数学教育における一般化で一般性を認識するための活動」. 『数学教育論文発表会論文集』, 45(2), 455-460

早田透. (2013a). 「数学教育における一般化とその妥当性判断に関する考察 －図の具体性を捨象することに着目してー」. 『全国数学教育学会誌 数学教育学研究』, 19(1), 47-53

早田 透. (2013b). 「数学教育における一般化と論証の相補性に関する一考察」. 『日本数学教育学会誌 数学教育学論究臨時増刊』, 95, 281-288

早田 透. (2014a). 「一般化過程における一般性の認識に関する研究」. 『全国数学教育学会誌 数学教育学研究』, 20(1), 91-98

早田透. (2014b). 「数学学習における一般化の機能に関する研究」. 『全国数学教育学会誌　数学教育学研究』, 20(2), 31-38

Hayata, T., & Koyama, M. (2014c). A theoretical framework for the function of generalization in mathematics learning. In S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol & D. Allan (Eds.), *Proceedings of the 38th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 257-264). Vancouver, Canada.

早田 透. (2014d). 「「特殊と一般」が記述された算数教科書の改善に関する基礎的研究—《数の本》とわが国の教科書の比較を通した課題の同定—」. 『中研紀要「教科書フォーラム」』, 12, 33-43

謝辞

どなたに，いつごろ言われたことだったろうか。定かでは無いが，「修士論文は研究をする練習だが，博士論文は研究者をする練習だ」と言われ，印象に残ったことを覚えている。この言葉を背景に，博士課程で学ぶものとして研究者たろうと，知の縮小ではなく，新しい事を積み重ねようと努めてきた。しかし，実のところもっと単純に，『「一般化は数字を文字で置き換える」という程度の活動ではない筈だ』ということを主張したかっただけであるような気もする。

こうした個人的な想いを背景に，本論文を書くにあたっては新しい研究対象を提示し，その基礎を探求するよう努めた。これらが実現出来ているかは読者の方々の判断に委ねるしかないが，一方で明らかにまだ荒削りであるという，数学教育研究としてはあまりないタイプの博士論文である。このような論文になったのは偏に筆者の我が侭であり，しかも一般化の機能という研究対象を見出すに到るまでには迷い抜いた。こうした論文と筆者の性格から，極めて多くの方々にご助力を頂いており，それらは本論文のどこかに潜在している。以下では，正にそれらの方々に足りない言葉を尽くして御礼を申し上げたい。

指導教官の小山正孝先生におかれましては，何よりも研究室に受け入れて頂き，私自身の望むように研究をさせて頂いたことに何よりも深く感謝致しております。先生ご自身の専門に基づきながら重要な点への指導を頂く4年半でした。また，特別研究や授業でのお姿・アドバイスを通し，どの様に研究者として生きていくかについても間接的に教えて頂きました。この場を借りて厚く御礼を申し上げます。

退官されるまで副査としてご指導を頂いた岩崎秀樹先生におかれましては，一般化を探求された研究者としてのアドバイスのみならず，広島大学の教授として，ヒロシマが培ってきた精神を教えて頂いたと思っております。また，同時に様々な勉強の機会を頂きましたことも併せて，深く感謝致します。

数学教育学講座の皆様方にも，この場では言い尽くせないほど大切にして頂きました。影山和也先生におかれましては，国際学会等でお供させて頂く機会が大変多く，その中で様々な研究に関するアドバイスを頂きました。入川義克先生におかれましては，実践を重視する立場からのアドバイスのみならず，大学生相手に授業をするという貴重な機会を頂きました。また，寺垣内政一先生，池畠良先生におかれましては，数学者という立場から研究へのアドバイスや見解を頂くのみならず，先生方個人としても非常によくして下さりました。事務の森満緑さんには，様々な手続き等でご迷惑をおかけしたにもかかわらず，いつも朗らかに対応して頂きました。講座では，多くの先輩と後輩にもお世話になりました。何よりも大滝孝治さんには，自分の先を行く同級生として，そして信頼出来る研究者として目標にさせて頂き，励みにさせて頂きました。高井吾朗さんには，小山研究室の先輩として様々なことを教えて頂き，また温かく研究室に迎え入れて下さいました。杉野本勇気さんにはお忙しい最中，研究上の相談を快く受けて下さいました。上ヶ谷友佑さんには頼りにならない先輩を黙って支えて頂き，筆者の預かり知らない色々なところで手助けして下さいました。他にも多くの先輩，後輩達に不出来な筆者を支えて頂きました。数学教育学講座の皆様に，この場を借りて改めて御礼申し上げます。

学外の先生方にも大変目を掛けて頂きました。特に，岡山大学の岡崎正和先生には，PME等での参加を通してよくして頂き，学会でも多くの鋭いご意見を頂戴致しました。鳥取大学の溝口達也先生におかれましては，修士時代の指導教官としてのご恩は言うまでもありませんが，重箱に喩えて研究生活の根幹を成す鋭い叱咤激励を頂きました。熊本大学の山本信也先生におかれましては，研究がもっともうまくいっていなかった時期に，私の迷いを的確に見抜き，非常に効果的な助言を頂きました。他にも，この場には書き切れないほど多くの先生方に，そしてヒロシマを中心とする数学教育学研究者コミュニティに支えて頂き，ようやくこの論文が形になったというのが率直に思う所です。改めまして，ここに書き切れない程多くの方々にも深く感謝致します。

学会参加に際して快く休暇を下さった勤務先の近畿大学附属東広島中・高等学校の皆様，学会等でお話をさせて頂いた他大学－特に鳥取大学，大阪教育大学，埼玉大学－の院生の方々，多くの友人に知人達，研究生活を理解し全面的に支えて下さった平元由希子さん，こうした方々にもまた深く感謝致しております。

最後になりましたが，回り道をすること実に30年。研究生活に限定しても10年間を支えてくれた両親と兄弟に，この場を借りて改めて感謝申し上げます。

2015年6月24日

早田　透