

論文審査の要旨

| | | | |
|--|----------------|-----|--------------------|
| 博士の専攻分野の名称 | 博 士 (理 学) | 氏名 | 松 原 和 樹 |
| 学位授与の要件 | 学位規則第4条第①・2項該当 | | |
| 論文題目 Existence and Construction of Balanced Incomplete Block Designs with Pairwise Additivity (組加法性をもつ釣合い型不完備ブロック計画の存在性と構成法) | | | |
| 論文審査担当者 | | | |
| | 主 査 | 教 授 | 若木 宏文 |
| | 審査委員 | 教 授 | 井上 昭彦 |
| | 審査委員 | 教 授 | 松本 眞 |
| | 審査委員 | 教 授 | 景山 三平 (広島工業大学環境学部) |
| 〔論文審査の要旨〕 | | | |
| <p>組合せデザイン論はある種の正則性をもつデザインの存在性、構成法および数え上げを主に扱う。また、組合せデザインの1つの主要概念である釣合い型不完備ブロック計画 (Balanced Incomplete Block Design; BIB デザイン) は Fisher らにより農場実験において統計的解析の有用性の視点から導入された。これまで、様々な性質をもった BIB デザインの研究がなされており、松原ら (2006) は組加法性という性質を組合せ論的視点から導入した。組加法性をもつ BIB デザインの集合の存在性、構成法およびその応用が本論文の主題である。</p> <p>点集合 V ($V = v$) とその k-部分集合 B ($B = b$) との順序対 (V, B) に対して、(i) 任意の点はちょうど r 個のブロックに生起し、(ii) 相異なる任意の2点はちょうど λ 個のブロックに同時に生起するとき、この順序対を BIB デザインと呼び、$\text{BIBD}(v, b, r, k, \lambda)$ と表す。ただし、ブロックとは B の元であり、k をブロックサイズ、λ を会合数と呼ぶ。また、同じパラメータをもつ ℓ 個の $\text{BIBD}(v, b, r, k, \lambda)$ について、その生起行列 N_1, \dots, N_ℓ が次の条件をみたすとき、組加法性をもつ BIB デザインの集合と呼び、ℓ PAB(v, k, λ) と表す。</p> <p>(条件) 任意の異なる $i, j \in \{1, \dots, \ell\}$ に対して、$N_i + N_j$ は $\text{BIBD}(v, b, 2r, 2k, \lambda^*)$ の生起行列である。</p> <p>本論文では、組加法性をもつ BIB デザインの集合が存在するときのパラメータ間の関係が示され、組加法性をもつ BIB デザインの集合の様々な構成法が与えられ、その存在性が調べられた。</p> <p>第1章では、本論文で扱う様々な組合せ構造と、それらの諸性質が述べられた。特に組加法性をもつ BIB デザインの集合が存在するための必要条件が示され、いくつかの例が提示されている。また、他の組合せ構造の存在性についてもいくつか知られている結果が紹介されている。</p> <p>第2章では、組加法性をもつ BIB デザインの集合の構成法として、直接的構成法、再帰的構成法および他の組合せ構造を用いての構成法が紹介されている。直接的構成法では、有限体の原始根等を用いた方法が与えられ、デザインのいくつかの系列の存在性が示された。また、再帰的構成法では、ℓ PAB(v, k, λ) および ℓ PAB(v', k, λ)</p> | | | |

から l PAB(vv', k, λ) を構成する方法が与えられた。他の組合せ構造を用いての構成法では、Pairwise Balanced Design, Nested BIB Design および Self-Orthogonal Latin Square を利用した方法が与えられた。

第3章では、 l PAB($v, k, 1$) の存在性についての結果が示されている。PAB(v, k, λ) が存在するための必要条件から、会合数が1のとき、ブロックサイズは $k = 2$ または 3 となり、ここでは任意の v に対して 2 PAB($v, 2, 1$) および 3 PAB($v, 2, 1$) の存在定理と、 2 PAB($v, 3, 1$) の存在性に関する結果が部分的に与えられた。また、一般的な l PAB(v, k, λ) についても考察されている。

第4章では、奇素数 k に対して、 $k = 2\lambda + 1$ をみたすような組加法性をもつ BIB デザインの集合の存在性が考察された。Wilson による Pairwise Balanced Design の漸近存在定理、および有限体の原始根を用いた組加法性をもつ BIB デザインの集合の構成法が提示され、それらを利用して、組加法性をもつ BIB デザインの集合についてもその漸近的存在性が証明された。これは、与えられた l, k に対して、ある値が存在し、その値より大きな v に対しては l PAB($v, k, \lambda = (k - 1)/2$) が存在するための必要条件は必要十分条件となることを保証する結果である。

第5章では、 $l = v/k$ をみたす組加法性をもつ BIB デザインの集合 (以下、AB(v, k, λ) と表す) に関する結果が示された。AB(v, k, λ) の l 個の生起行列は $\sum_{i=1}^l N_i = J_{v \times b}$ をみたす。ただし、 $J_{v \times b}$ は $v \times b$ 行列で成分がすべて1であるものである。 l PAB(v, k, λ) が存在するとき、 $l' < l$ に対して l' PAB(v, k, λ) が存在することがわかることから、与えられたパラメータ v, k, λ に対して、AB(v, k, λ) を構成することは最も難しい構成問題と言える。また、 $\sum_{i=1}^{v/k} N_i = J_{v \times b}$ という性質を利用した AB デザインの一つの再帰的構成法が与えられ、デザインの系列が得られた。比較的小さなパラメータの値に対して、存在が知られているもの、および未知のものリストが提示されている。

第6章では、組加法性をもつ巡回型 BIB デザインの集合 (以下、 l PACB(v, k, λ) と表す) が扱われている。巡回型 BIB デザインは Difference Family や巡回型の他の組合せ構造と密接な関係があることはよく知られている。本論文では、新たに定義されるいくつかの Special Array を用いて、 2 PACB デザインの集合の直接的構成法、再帰的構成法を与えた。さらに $k = 2$ のときの 2 PACB デザインの集合の存在性を証明した。また、PACB デザインの集合の不存在性についての結果も得られている。

第7章では、分解問題の解の構成を扱っている。 $l = v/k$ 個の生起行列に対して、 $\sum_{i=1}^l N_i = J_{a \times b}$ をみたす N_1, N_2, \dots, N_l を分解問題の解と呼ぶ。分解可能 BIB デザインが存在するとき、同じパラメータで分解問題の解となる v/k 個の生起行列が構成できることが示された。さらに、Skolem の構成法を用いて分解可能でない BIB デザインの生起行列で分解問題の解が構成できることが証明された。

第8章では、組加法性をもつ BIB デザインの集合の応用が扱われている。組加法性の性質から、 l PAB(v, k, λ) が存在するとき、いくつかの異なるブロックサイズをもつ BIB デザイン (Pairwise Balanced Design) を構成できることが示された。また、組加法性をもつ BIB デザインの集合から Multiply Nested BIB Design が得られることが示され、本論文で得られている l PAB(v, k, λ) の系列から得られるいくつかの Multiply Nested BIB Design の系列が提示された。

以上、審査の結果、本論文の著者は博士 (理学) の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

- (1) The construction of pairwise additive minimal BIB designs with asymptotic results,
K. Matsubara and S. Kageyama,
Applied Mathematics (2014a), to appear.
- (2) The existence of 3 pairwise additive $B(v, 2, 1)$ for any $v \geq 6$,
K. Matsubara and S. Kageyama,
Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing (2014b),
to appear.
- (3) Some pairwise additive cyclic BIB designs,
K. Matsubara and S. Kageyama,
Statistics and Applications, 11(2013a), 55–77.
- (4) The Existence of Two Pairwise Additive BIBD($v, 2, 1$) for Any v ,
K. Matsubara and S. Kageyama,
Journal of Statistical Theory and Practice, 7(2013b), 783–790.
- (5) Decomposition of an all-one matrix into incidence matrices of a BIB design,
M. Sawa, K. Matsubara, D. Matsumoto, H. Kiyama and S. Kageyama,
Journal of Statistics and Applications, 4(2009), 455–464.
- (6) The Spectrum of Additive BIB Designs,
M. Sawa, K. Matsubara, D. Matsumoto, H. Kiyama and S. Kageyama,
Journal of Combinatorial Designs, 15(2007), 235–254.
- (7) An addition structure on incidence matrices of a BIB design,
K. Matsubara, M. Sawa, D. Matsumoto, H. Kiyama and S. Kageyama,
Ars Combinatoria, 78(2006), 113–122.