

強化用セラミック繊維の強度の統計的性質を
考慮した金属基複合材料の強度分布特性

1989年

合 田 公 一



①

強化用セラミック繊維の強度の統計的性質を
考慮した金属基複合材料の強度分布特性

1989年

合 田 公 一

目次

第1章. 緒論 1
1.1節 本研究の目的と意義 1
1.2節 本研究の内容 2
1.3節 従来の研究 3
1-3-1. セラミック繊維の強度の統計的性質に関する従来 of 取扱い	
1-3-2. FRMの強度分布に関する従来 of 確率論的取扱い	
1-3-3. FRMの強度分布に関する従来 of 力学的取扱い	
第2章. セラミック繊維の強度分布評価 9
2.1節 はじめに 9
2.2節 解析方法 9
2-2-1. 単一および多重モードワイブル分布とワイブル母数の推定法	
2-2-2. 寸法効果による強度分布および平均値の表示	
2.3節 実験方法および実験結果12
2-3-1. 基材	
2-3-2. 試験および破面の観察方法	
2-3-3. 破面観察結果	
2-3-4. ワイブルプロット	
2.4節 解析結果および考察17
2-4-1. ワイブル母数の推定値の比較	
2-4-2. 強度分布曲線および平均値の予測	
2-4-3. Rosenモデルによる多重モードワイブル分布適用の検討	
2.5節 まとめ24
第3章. 反応層を有するセラミック繊維の強度分布評価26
3.1節 はじめに26
3.2節 解析方法26
3-2-1. 反応層き裂を破壊原因とする強度の分布関数	
3-2-2. 競合リスクモデルによる繊維強度分布の表示	
3-2-3. ワイブル母数の推定法	
3.3節 実験方法および実験結果29
3-3-1. 基材および処理方法	
3-3-2. 繊維強度のワイブルプロットとその平均値および変動係数	

3. 4節 解析結果および考察31
3-3-1. 繊維強度の平均値および変動係数の予測	
3-3-2. き裂の方向性を考慮したワイブル解析	
3. 5節 まとめ35
第4章. 複合材内の繊維破断を利用した強化繊維の新しいワイブル母数推定法37
4. 1節 はじめに37
4. 2節 解析方法37
4-2-1. 複合材内における繊維の強度分布と順序統計量の結合分布	
4-2-2. ワイブル母数の推定法	
4. 3節 解析結果および考察39
4-3-1. ワイブル母数の推定精度	
4-3-2. 再帰法によるデータの対象となるシングルレット数の評価	
4. 4節 まとめ43
第5章. ホットプレス法によるホロン繊維強化アルミニウム複合材の調製と強化繊維のワイブル母数の推定45
5. 1節 はじめに45
5. 2節 実験方法45
5-2-1. 基材およびFRMの調製方法	
5-3-2. AE測定法	
5. 3節 結果および考察47
5-3-1. B-B ₄ C/Al複合材の引張試験結果と破面観察	
5-3-2. ワイブル母数の推定結果	
5. 4節 まとめ52
第6章. 再帰法によるFRMの強度分布評価54
6. 1節 はじめに54
6. 2節 解析方法54
6-2-1. 再帰法とFRMの具備すべき前提	
6-2-2. 繊維の強度分布と無効長さ	
6. 3節 解析結果および考察56
6-3-1. 実験結果と再帰法による分布曲線の比較	
6-3-2. 他繊維を用いた再帰法による強度分布曲線の予測	

6. 4節 まとめ60
第7章. シアラゲ理論によるFRM内の応力集中係数とその統計的取扱い62
7. 1節 はじめに62
7. 2節 解析方法62
7-2-1. シアラゲ理論による応力分布の導出と応力集中係数	
7-2-2. 境界条件と未知定数の計算方法	
7. 3節 解析結果および考察68
7-3-1. 繊維間隔が一定の場合の応力集中係数	
7-3-2. 繊維間隔が一様分布にしたがう場合の応力集中係数とその統計的取扱い	
7. 4節 まとめ72
第8章. シアラゲ理論によるFRMの強度シミュレーションとその評価73
8. 1節 はじめに73
8. 2節 解析方法73
8-2-1. シアラゲ理論による力の釣合い方程式	
8-2-2. シアラゲ方程式の差分近似と数値解法	
8-2-3. シミュレーションの手順	
8. 3節 解析結果と考察81
8-3-1. シミュレーション結果と実験結果の比較	
8-3-2. FRMの強度分布に及ぼす構成因子および構成の不確かさの影響	
8. 4節 まとめ87
第9章. 総括89
9. 1節 総括89
9. 2節 今後の展望95
参考文献97
付録104
発表文献116
謝辞118

第1章. 緒 論

1. 1 節 本研究の目的と意義

複合材料の繊維強化効果を表わす理論的取扱いは、繊維とマトリックスの強度を確定的に重ね合わせた複合則に代表される。たとえば、金属繊維のように強度のばらつきが小さい強化材を用いた複合材では複合則の適用が可能である⁽¹⁻¹⁾。しかしながら、近年めざましく発展したカーボン繊維、炭化けい素繊維あるいはボロン繊維などのセラミック繊維を強化材として使用するとき、その強度の大きなばらつきのために、平均値で記述される複合則によって強化効果を予測するには問題がある。そのため、強化材強度の統計的性質を考慮した複合材料の強度分布に関する知見が、これまでに確率論的手法あるいは力学的手法を用いた理論的観点から、特に複合材料の最も基本形態である一方向繊維強化材を対象にして明らかにされてきた⁽¹⁻²⁾。前者の確率論的手法とは、繊維強度の分布関数の関数として確率定理から複合材の強度分布曲線を表わすものであり、後者の力学的手法とは、境界値問題にモンテカルロ法を組み込んだシミュレーション技法である。しかしながら、これらの対象となる複合材は母地をプラスチックとしたFRP (Fiber Reinforced Plastics)に関するものがほとんどであり、母地が金属であるFRM (Fiber Reinforced Metal)を想定したものは非常に少ないのが現状である。すでにFRMはそのすぐれた性質のために一部実用化され、今後は機械・構造用材料として広範な使用が期待されている。また高性能な航空・宇宙機器材料としても適用される可能性が高まりつつある。したがって、材料強度における信頼性向上の見地からFRMの強度分布特性に関する知見を実験的に明らかにし、理論の適用性を検討しておく必要がある。

本研究は以上述べた観点から、数種のセラミック繊維の強度特性に適した確率分布関数の選択および母数推定法について検討するとともに、ホットプレス法によるFRM (ボロン繊維強化アルミニウム複合材)の強度分布を、上述した確率論的手法および力学的手法によって評価することを目的とし、FRMの強度の信頼性向上に資するものである。

1. 2節 本研究の内容

本論文は緒論および総括を含め9章からなっている。以下に各章の概略を記述する。

第1章は緒論であり、本研究の目的と意義について述べるとともに、従来の研究をまとめた。

第2章では、強化用セラミック繊維の強度分布に関する統計的取扱いを明確にするために、ボロン繊維、炭化けい素繊維およびアルミナ繊維の単繊維引張試験および破面観察を行ない、2母数ワイブル分布および多重モードワイブル分布を用いて適合性の良否を検討した。

第3章では、反応層を有するセラミック繊維の強度分布モデルを提案するとともに、炭化けい素繊維にアルミニウムを被覆・反応させた試料を用いてモデルの妥当性について吟味した。またセラミック繊維の強度分布に及ぼす反応層き裂の方向性を考慮し、ワイブルの多軸分布関数を用いて強度特性の推移を考察した。

第4章では、従来の単繊維引張試験に対し、順序統計量を利用したワイブル母数の新しい推定法について提案した。さらにこの手法の有効性をモンテカルロ法によって検討した。

第5章では、ホットプレス法によってボロン繊維強化AI複合材料を調製し、FRMの強度特性に及ぼすホットプレス温度の影響および寸法効果について調査した。さらに、前章で提案された新しいワイブル母数推定法の有効性について検討を加えた。

第6章では、FRMの強度分布特性を確率論的手法によって評価することをめざし、HarlowとPhoenixによって提案された再帰的解析手法を用いて強度分布特性を予測し、前章の結果と比較・検討した。また、複合材の強度分布特性に及ぼす2母数ワイブル分布および二重モードワイブル分布の影響について考察を加えた。

第7章では、マトリックスが弾線形硬化塑性体であることを想定し、FRM内の応力分布および応力集中係数の厳密解をシアラグ理論によって導出した。さらに繊維間隔を確率変数とみなし、モンテカルロ法を用いて破断繊維に隣接した繊

維に作用する応力集中係数の累積分布特性を予測した。

第8章ではFRMの強度特性を力学的手法によって予測することをめざし、シアラグ理論によるFRMの強度シミュレーション手法を提示した。この手法による値を実験結果と比較するとともに、FRMの強度分布特性に及ぼす構成因子の諸性質および構成形状の不確かさの影響について考察を加えた。

第9章は総括であり、本研究で得られた結果の要約と今後の展望について述べた。

1. 3節 従来の研究

1-3-1. セラミック繊維の強度の統計的性質に関する従来の取扱い

セラミック繊維の強度の統計的性質に関する従来の取扱いは、既存の確率分布関数を強度データに適合させて評価する方法が大半であり、その主な関数として正規分布⁽¹⁻³⁾、対数正規分布⁽¹⁻³⁾およびワイブル分布等があげられる。なかでもワイブル分布はぜい性材料の破壊モデルを表わす最弱リンク説に立脚した関数形⁽¹⁻⁴⁾⁽¹⁻⁵⁾なので、セラミック繊維の強度分布特性を表わす関数として頻繁に利用されている。たとえば、仁木⁽¹⁻⁶⁾はガラス繊維の強度の分布が正規分布および2母数ワイブル分布によって表わされることを指摘し、三木ら⁽¹⁻⁷⁾⁽¹⁻⁸⁾はさらにカイ二乗検定によってこれらの適合度を保証した。またカーボン繊維、ボロン繊維および炭化けい素繊維(以下、SiC繊維と記す)においても、その強度の分布が2母数ワイブル分布と良好に適合するとした多くの報告を手にすることができ⁽¹⁻⁹⁾。たとえば、Chwastiakら⁽¹⁻¹⁰⁾はカーボン繊維のおおよそ93%のデータ点がワイブル確率紙上で直線近似されることを指摘している。また、Streetら⁽¹⁻¹¹⁾はボロン繊維の強度特性を調査し、あるゲージ長さの範囲ならば2母数ワイブル分布によってその強度の分布を良好に近似できることを示した。同様な2母数ワイブル分布への当てはめは、SiC繊維においても小原ら⁽¹⁻¹²⁾、香川ら⁽¹⁻¹³⁾およびSimonら⁽¹⁻¹⁴⁾によって試みられ、良好な適合性が示されている。

ところで、ガラス繊維、カーボン繊維あるいはボロン繊維等において、破壊の起点となる欠陥の種類によってその強度特性が大きく異なることが報告されてき

た。たとえば、ガラス繊維の欠陥の大きさと強度を関連づけたのは Griffith⁽¹⁻¹⁵⁾に始まり Thomas⁽¹⁻¹⁶⁾らの論文にその詳述がみられる。しかしながら、ガラス繊維の欠陥の種類によって強度の分布域が変化することに注目し、具体的な分布関数を与えたのは著者の知る限り Metcalfeら⁽¹⁻¹⁷⁾の研究が最初であろう。彼らはガラス繊維の引張強さを統計的に検討することによって、取扱い時に生じる欠陥とプロセス中に生じる内在欠陥の2種類あることを予測し、ガラス繊維の強度の分布を2つの分布関数を用いて近似する、いわゆる複合分布⁽¹⁻¹⁸⁾による取扱いを推奨した。一方、カーボン繊維において破壊起点となる欠陥を強度の分布と関連づけた報告は数多い⁽¹⁻¹⁹⁾。たとえば、JohnsonとThorne⁽¹⁻²⁰⁾、JonesとWilkins⁽¹⁻²¹⁾らはカーボン繊維の強度において頻度のピークが2つ以上現れることを示唆した。先述した Chwastiakら⁽¹⁻¹⁰⁾も低強度側のプロット点は表面傷が破壊原因であるために、全体の分布特性がワイブル確率紙上で直線性を示さないことを指摘している。なかでも、Beetz⁽¹⁻²²⁾⁽¹⁻²³⁾は種々の欠陥を含むカーボン繊維の強度の統計的性質に関する問題を定量的に扱った最初の一人であろう。彼は、破壊の起点となる欠陥は表面欠陥および内部欠陥の2種類が支配的であることを示し、その分布関数に混合ワイブル分布⁽¹⁻¹⁸⁾を推奨した。またボロン繊維⁽¹⁻²⁴⁾⁽¹⁻²⁵⁾やSiC繊維⁽¹⁻¹⁴⁾においても破壊起点となる欠陥の多様性について触れられており、その種類によって強度の分布域の変化に注目した報告もまたいくつかみられる⁽¹⁻²⁶⁾⁽¹⁻²⁷⁾。

一方、Bolotin⁽¹⁻²⁸⁾はぜい性材料内に多数の表面欠陥と内部欠陥が存在するのであれば、その破壊は競合リスクモデル(Multi-risk model⁽¹⁻²⁹⁾)によって表わされると考え、二重モードワイブル分布を誘導した。さらに松尾ら⁽¹⁻³⁰⁾はそれを一般的に解釈して多重モードワイブル分布と呼んだ。しかしながら、セラミック繊維の強度の分布に二重モードワイブル分布(文献には"double Weibull" distributionと記されている)を推奨したのは HarlowとPhoenix⁽¹⁻³¹⁾が最初と考えられる。彼らの一人、PhoenixはSexsmithと連名⁽¹⁻³²⁾で、セラミック繊維の強度はゲージ内破壊とクランプ内破壊の競合リスクによって決定されると考え、以前から二重モードワイブル分布を導いていたが、欠陥同士の競合による考え方

はHarlowとの論文が最初のものと思われる。しかしながら、彼らは実験によって二重モードワイブル分布の適合性を実証したわけではない。以上のように、破壊原因となる欠陥の種類に依存して繊維の強度特性が大きく異なるのであれば、上述した競合リスクモデルに基づく多重モードワイブル分布がセラミック繊維の強度分布を最適に表わす関数と考えられる。したがって破面観察などの実験的手段に基づいて、多重モードワイブル分布の有用性を吟味する必要がある。

一方、FRMの強化用繊維としてしばしば使用されるカーボン繊維、ボロン繊維およびSiC繊維などは、FRM製造時に母地金属と反応劣化し、その強度特性が大きく低下することが知られている⁽¹⁻³³⁾。この原因は、反応によって生じた脆弱な化合物層(以下、反応層と記す)は負荷によってき裂を含むので、その応力集中によって繊維を破壊に至らすという概念によって説明される。MetcalfeとKlein⁽¹⁻³⁴⁾に始まり、BakerとBonfield⁽¹⁻³⁵⁾、Ochiaiら⁽¹⁻³⁶⁾⁻⁽¹⁻³⁸⁾および SakaiとWatanabe⁽¹⁻³⁹⁾など多くの研究者はこのような反応層を有する繊維の強度を反応層厚さの関数として理論的に評価している。しかしながら、彼らの用いた手段は破壊力学に基づく決定論的手法であり、確率論的に扱ったものではない。したがって、このような反応層を有するセラミック繊維の強度分布を与える確率モデルについても検討する余地がある。

1-1-2. 一方向繊維強化複合材の強度分布に関する従来の確率論的取扱い

強化繊維の強度の分布関数に基づいて一方向強化複合材の強度を表す方法は、繊維束の破壊強度の分布関数を表す手法⁽¹⁻⁴⁰⁾を利用してRosen⁽¹⁻⁴¹⁾によって最初に報告された。これより以前に、Coleman⁽¹⁻⁴²⁾は繊維束における繊維強度のばらつきと束強度の相関をいち早く報告しているが、複合材の強度を表すまでには至っていない。Rosenは複合材内で繊維が破断しても繊維末端からある程度離ればマトリックスのせん断力によって耐荷能を回復するために、破断繊維による応力の乱れの影響は耐荷能の未回復範囲に限られると考えた。そしてこの長さを無効長さと呼び、無効長さのリンクを束ねたものの鎖として一方向強化複合材をモデル化した。これは後にchain-of-bundles probability modelまたはRosen

モデルなどと呼ばれ、このような複合材料の強化効果に関する分野は（複合材料における）微視強度論と呼ばれるようになった。Rosenは1本の繊維が破断したとき、その繊維が受持っていた荷重は他の繊維に均等に分配されると仮定し束理論を適用したが、Zweben⁽¹⁻⁴³⁾は破断繊維により近い繊維ほどその影響が大きいと考えた。そして複合材中に破断した繊維が2本あるいは3~4本連鎖したときに複合材の破壊が生じると考えたが、破壊確率曲線の一般形は導いていない。このようなRosenおよびZwebenの理論は、複合材料における微視強度論の基礎を与えたといつてよい。以後の微視強度論を扱った報告では、(1)複合材中の強化繊維はRosenモデルに従った配列をする、(2)破断繊維によって与えられる応力集中係数は最近接繊維のみを対象とする、とした彼らの仮定が多々用いられている。

以降、ArgonとScop^{(1-44), (1-45)}、RosenとZweben⁽¹⁻⁴⁶⁾およびFukudaとKawada⁽¹⁻⁴⁷⁾らによって微視強度論が展開されてきた。彼らはZwebenの概念に基づいて、複合材中に破断した繊維がある本数連なったときに破壊が生じるようなクライテリオン（破断繊維がある本数連なると負荷を増さなくても応力集中によって次々に繊維が破断するため、それは複合材の破壊を意味している）を考え、破壊強度の分布特性を論じたが、複合材内の繊維破断の連鎖数は限定されたものであった。この分野を大きく発展させた扱いとしてHarlowとPhoenix^{(1-48), (1-49)}の研究が注目に値する。彼らは繊維の破壊確率を応力集中係数に依存したいくつかの区間に分割し、確率定理を用いて複合材中で破断繊維がk個連鎖する確率曲線を導いた。そして一方向強化複合材の強度分布を与える一般的な解釈を示し、この手法を再帰法(Recursion Analysis Technique)と呼んだ。残念ながら再帰法では単層板しか扱えない（二層板における再帰法⁽¹⁻⁵⁰⁾も提案されているが、破断繊維の連鎖数は2本に限られている）。Smith^{(1-51), (1-52)}およびBatdorf⁽¹⁻⁵³⁾は、ほぼ同じ時期に同じ考え方でHarlowとPhoenixの扱いに対する近似モデルを独立に発表した。これは破断繊維がk個連鎖する確率は、1, ..., k個独立して連鎖を与える分布曲線の重ね合わせであるという概念である。これによると多層板における強度分布の扱いも可能である。このように一方向繊維強化複合材における強度の確率論的扱いは理論上大きく発展してきたにもかかわらず、実験的にこれ

を証明した報告は数少ない。しかもそのほとんどが複合材強度の平均値を扱ったものであり、分布の扱いには至っていないのが現状である。したがって上述した微視強度論的観点からFRMの強度分布特性を検討する必要がある。

1-1-3. 一方向強化複合材の強度分布に関する従来の力学的取扱い

微視強度論では前述したように応力分布の与え方がきわめて単純である。これに対して、モデルは比較的小さなものにならざるを得ないが、力学的手法によってより正確な応力分布の計算が可能である。たとえば、マトリックスを弾性体とみなし厳密解⁽¹⁻⁵⁴⁾や有限要素法⁽¹⁻⁵⁵⁾によって繊維端末まわりの応力分布を導出した報告は数多い。また弾塑性有限要素法によって短繊維まわりの金属マトリックスに働く応力分布を計算した報告⁽¹⁻⁵⁶⁾、あるいは応力分布を実験的に調査した報告⁽¹⁻⁵⁷⁾などもいくつかみられる。しかしながら破断した繊維が隣りの繊維を干渉するような問題を扱うとき、多くの場合シアラグ理論⁽¹⁻⁵⁸⁾によってその応力分布が導出されている。この理論は繊維は軸力のみを負担しマトリックスはせん断力を伝えることが前提であり、力の釣合い条件は一方向においてのみ考えればよい。したがって多数の繊維からなる複合材においては、2次元問題などに比べその応力分布を非常に簡単に求めることができるという利点をもつ。この概念はCox⁽¹⁻⁵⁹⁾の論文に早くから紹介されているが、当初もまた繊維強化効果を推定するためにマトリックス中に埋め込まれた短繊維1本の応力分布を表すものであった。これに対し、破断繊維に隣接した繊維の応力集中係数を求める手段としてシアラグ理論を利用したのはHedgepeth⁽¹⁻⁵⁸⁾が最初である。彼は一方向繊維強化複合材からなる無限平板を想定し、破断繊維まわりに働く応力集中係数を力の釣合い方程式から導出した。このとき、FRP等の樹脂をマトリックスに用いた複合材ではそのせん断変形が弾性体として見積られるのに対し、塑性変形する金属をマトリックスに用いたFRMでは取扱いがやや複雑になる。この扱いでは最初、HedgepethとVan Dyke⁽¹⁻⁶⁰⁾によってマトリックスを弾完全塑性体とみなした解析がなされた。さらにGoreeとGross⁽¹⁻⁶¹⁾はマトリックスにき裂が生じた場合を、Zweben⁽¹⁻⁶²⁾はシアラグ近似解法を提案した。また落合ら⁽¹⁻⁶³⁾

(1-64)は、マトリックスを弾線形硬化塑性体とみなして近似解法を改良した。これらのモデルは繊維間隔をすべて一定に扱っていることが共通点であり、そのため応力集中係数は決定論的にしか与えることができない。一方、Fukuda (1-65)は実際の複合材内では繊維間隔にばらつきがあることに注目し、モンテカルロ法を用いてシアラグ解による応力集中係数の増分が2母数ワイブル分布に従った確率変数であることを示した。しかしながら、Fukudaの手法はマトリックスが弾性体の場合にしか用いることができない。

ところで、繊維強化材の破壊過程は一般にランダムな繊維破壊や界面割れによって最終破断に至る確率事象であるため、微視強度論以外にモンテカルロ法によるシミュレーション技法によって引張強さを明らかにした報告がみられる。これは当初、金原ら (1-66)、Fukudaら (1-67) (1-68)、奥野ら (1-69) および Mandersら (1-70) などによって報告されたように、破断繊維まわりの応力集中係数や無効長さを一義的に与えることによって繊維破断の進行や破断面を予測するものであった。しかしながらシアラグ理論は混合境界値問題なので、境界条件の与え方によって複合材の受持つ最大応力、すなわち引張強さを求めることができる。このことにいち早く注目し、単層板における強度シミュレーションに着手したのはOh (1-71)である。彼はシアラグ方程式における2階の微分形を差分近似して各節点に働く変位を逐次式加速緩和法によって導き、さらに強制変位を繰返し与えることによって複合材に働く最大応力を求めた。また金原ら (1-72) - (1-74) はマトリックス破壊の条件を導入し、Ohの手法を改良した。Ohおよび金原らの手法はFRPを想定したマトリックスが弾性体の場合の解法である。一方、落合ら (1-75) はマトリックスを弾塑性体としたシアラグ方程式に対する厳密解を求め、FRMの引張強さや破壊過程を明らかにした。この方法は破断繊維の一つおいた隣りの繊維に働く応力を負荷応力と等価とみなし平衡条件を限定した解法である。以上のように、微視力学モデルによるFRMの強度シミュレーションに関する扱いは現在発展途上にあり、これを利用した強度の信頼性に関する報告は皆無に等しい。そこで、このようなシミュレーション手法に関する提案を行なうとともに、この方法による強度分布特性について吟味し、本研究の主要課題の1つとして追究する。

第2章 セラミック繊維の強度分布評価

2.1節 はじめに

緒論でも触れたように、ガラス繊維、カーボン繊維あるいはボロン繊維に代表されるセラミック繊維は、破壊の起点となりうる欠陥がいくつか存在し、その種類によって強度特性が大きく左右されることが報告されてきた⁽²⁻¹⁾。それにもかかわらず、強度の分布関数は1つの形状母数を材料定数とみなした2母数ワイブル分布で代用することが多い。

本章では、セラミック繊維内の種類の異なる欠陥集団をそれぞれ独立したリスクとみなし、ボロン繊維、炭化けい素繊維およびアルミナ繊維の強度分布を競合リスクモデルに基づいた多重モードワイブル分布⁽²⁻²⁾で適合させることを試みる。まず引張試験およびSEM観察によってこれらの破壊起点となる欠陥の種類を明らかにし、2母数ワイブル分布および多重モードワイブル分布による強度のワイブル母数を推定した。これらの母数から寸法効果によって生じる平均強度および分布曲線の推移を予測し、両者による適合性の良否を検討した。またRosenモデルによる複合材の強度評価法を利用し、適合性についてさらに検討を加えた。

2.2節 解析方法

2-2-1. 単一および多重モードワイブル分布とワイブル母数の推定法

はじめに、解析の対象となるセラミック繊維は次の前提を満足するものとする。

- (1) 各試験片ではいくつかの種類の欠陥が多数存在し、その破壊はそれらの中の最弱欠陥によって決定される。
- (2) 欠陥同士の相互干渉は無視できる。
- (3) 破壊応力の下限値を0とする。

セラミック繊維に単純引張応力 σ が負荷されたとき、多くの報告においてこれら3つの仮定から次式の2母数ワイブル分布(以下、多重モードワイブル分布と区別するため、単一ワイブル分布と記す) $F(\sigma)$ がその強度の分布を表わす関数として採用されている。

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right\} \quad (1)$$

ここで、 m 、 σ_0 ：ワイブル母数、すなわち形状母数および尺度母数をそれぞれ表わす。一方、同一試験片内に破壊起点となる欠陥が k 種類混在しているとすると、それぞれの集団を独立したリスクとみなすことによって、その強度の分布関数は次式のように表わすことができる。

$$F(\sigma) = 1 - \prod_{i=1}^k \{1 - F_i(\sigma)\} \quad (2)$$

ここで、 $F_i(\sigma)$ ：第 i 番目の欠陥集団の強度分布関数を表わす。前述のように欠陥は無数に存在するため、 $F_i(\sigma)$ が単一ワイブル分布によって表わされるとすると、

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \sum_{i=1}^k \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0i}} \right)^{m_i} \right\} \quad (3)$$

となる。式(3)は松尾らによって多重モードワイブル分布と呼ばれている⁽²⁻²⁾。

数種類の欠陥が同一繊維内に混在する場合、Metcalfらは複合ワイブル分布⁽²⁻³⁾を用いてガラス繊維の強度分布を、またBeetz⁽²⁻⁴⁾は混合ワイブル分布⁽²⁻³⁾を用いてカーボン繊維の強度のばらつきを説明した。しかしながら、複合ワイブル分布や混合ワイブル分布では、その物理的意味から1つの試験片内には1種類の欠陥しか存在できないため、個々の試験片内における他種類の欠陥での破壊確率が考慮されない。またBeetzが用いたワイブル母数の推定法は直接探索法の一様であるシンプレックス法が用いられており、混合比を決める基準が明確とは言えない。むしろ混合ワイブル分布は異種繊維を混合した場合に適用したほうが物理的意味から合理的であると考えられる。なぜなら混合比が明確に決定でき、さらにはハイブリット材等の強度解析への応用が期待されるからである⁽²⁻⁵⁾。このため本研究では複合ワイブル分布および混合ワイブル分布による解析は行なわなかった。

本研究では得られた強度データに対し、式(1)では最尤法を、また式(3)では多段最尤法⁽²⁻²⁾を用いてそれぞれのワイブル母数の推定を行なう。式(1)の尤度関数 L_F は一般に次式のように与えられる。

$$L_F = \prod_{i=1}^n f(\sigma_i) \quad (4)$$

ここで、 n ：サンプル数、 $f(\sigma)$ ：式(1)の確率密度関数である。式(3)において尤度 L_F を最大にする m と σ_0 が最尤推定量である。したがって、これらを求めるための尤度方程式は次式のように表わすことができる。

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \sigma_j - \frac{\sum_{j=1}^n \sigma_j^m \cdot \ln \sigma_j}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^m} = 0 \quad (5)$$

$$\sigma_0 = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sigma_j^m \right)^{1/m}$$

式(5)では、Newton-Raphson法によって第1式の m を求め、これを第2式に代入して σ_0 を求めた。

一方、式(3)は競合リスクモデルに基づくために、尤度関数は次式のように表わすことができる。

$$L_F = C \prod_{i=1}^k L_{Fi} \quad (6)$$

ただし、

$$L_{Fi} = \prod_{j=1}^{n_i} f_i(\sigma_j^{(i)}) \prod_{h=1}^k \prod_{j=1}^{n_h} \{1 - F_i(\sigma_j^{(h)})\}$$

である。ここで、 C ：定数 ($= n! / \prod_{i=1}^k n_i!$)、 n_i ： i 番目の種類の欠陥によって破壊した繊維本数である。 $L_{F1} \sim L_{Fk}$ は欠陥 "1", ..., "k" によって記されるワイブル母数を独立に含んでいるため、各 L_{Fi} をそれぞれ最大にするワイブル母数を求めれば良い。これから、多段最尤法による尤度方程式は次式のように書くことができる。

$$\frac{1}{m_i} + \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \ln \sigma_j^{(i)} - \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \sigma_j^{m_i} \cdot \ln \sigma_j^{(i)}}{\sum_{j=1}^{n_i} \sigma_j^{m_i}} = 0 \quad (i=1, \dots, k) \quad (7)$$

$$\sigma_{0i} = \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \sigma_j^{m_i} \right)^{1/m_i}$$

式(7)は式(5)と同様に解くことができる。多段最尤法は多重モードワイブル分布の他の母数推定法であるJohnson法⁽²⁻⁶⁾、ハザードプロット法(Nelson法)⁽²⁻⁷⁾あるいは多段相関係数法⁽²⁻⁸⁾に比し、推定精度の点ですぐれていることが証明されている⁽²⁻⁸⁾、⁽²⁻⁹⁾。

2-2-2. 寸法効果による強度分布および平均値の表示

実験値に対する式(1)および式(3)の適合性の良否は、複合材の強度解析の際に繊維の無効長さに相当する強度分布が用いられる場合が多いことを考慮し、短ゲージ長さにおける強度分布曲線とその平均値の予測値を比較することによって判断した。ゲージ長さLを変化させた場合の単一および多重モードワイブル分布式は、寸法効果によってそれぞれ次のように書くことができる。

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \frac{L}{L_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right\} \quad (8)$$

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \frac{L}{L_0} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0i}} \right)^{m_i} \right\} \quad (9)$$

ここで、 L_0 ：ワイブル母数の推定時に用いられたゲージ長さを表わす。式(8)の平均値 μ は一般に次のように表わされる。

$$\mu = \sigma_0 \left(\frac{L}{L_0} \right)^{-1/m} \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) \quad (10)$$

ここで、 Γ ：ガンマ関数である。式(9)の平均値は解析的に得られないために、次式を数値積分することによって求めた。

$$\mu = \int_0^{\infty} \{1 - F(\sigma)\} d\sigma \quad (11)$$

2. 3節 実験方法および実験結果

2-3-1. 基材

セラミック繊維には、直径の異なる2種類のボロン繊維(AVCO社製、それぞれ4milおよび5.6milと表示されている。以下、B100繊維およびB140繊維とそれぞれ略記する)、ボロンカーバイド(B₄C)が被覆されたボロン繊維(以下、B-B₄C繊維と略記する)、炭化けい素繊維(日本カーボン社製、商品名：ニカロン、以下、

表2-1. 各繊維の特性値

Fiber	B100	B140	B-B ₄ C	SiC	Al ₂ O ₃
Diameter μm	100	140	139.6 ^{*1}	14.1 ^{*2}	18.0 ^{*2}
Tensile strength GPa	4.13 ^{*3}	4.07 ^{*3}	3.85 ^{*4}	3.51 ^{*5}	1.67
Elastic modulus GPa	377	377	377	196	382
Specific gravity	2.55	2.47	2.47	2.55	3.90

- *1. レーザ外形測定機による実測値
- *2. 光学顕微鏡による実測値
- *3. ゲージ長さ50mmにおける測定値
- *4. ゲージ長さ30mmにおける測定値
- *5. ゲージ長さ10mmにおける測定値

SiC繊維と略記する) およびアルミナ繊維(Du Pont社製、商品名：Fiber FP、以下、Al₂O₃繊維と略記する)を用いた。それぞれの繊維の物性値を表2-1に示す。ボロン繊維はCVD(Chemical Vapor Deposition)法によって1本ずつ連続的に製造されるため、直径のばらつきが小さい特徴を有す。なかでも、B-B₄C繊維は金属母地との反応を抑制するためFRM用に開発された繊維である。またSiC繊維は溶融紡糸法によって製造された大量生産の可能な繊維であり、近年金属母地強化用繊維として大いに注目されている。

2-3-2. 試験および破面の観察方法

ボロン繊維の引張試験片は繊維を適当な長さに切断し、その両端のつかみ部を厚さ0.1mmの軟質のアルミニウム板ではさみ⁽²⁻¹⁰⁾、接着付けすることによって作製した。ゲージ長さは3種類ともに10、50および200mmとし、直径は光学顕微鏡に測微マイクロメータを取り付けて測定した。引張試験はインストロン形引張試験機(島津製、オートグラフIS-5000)を用い、ひずみ速度0.05/minとして行なった。なお、試験本数は各条件について30本程度とした。一方、SiC繊維およびAl₂O₃繊維の試験片はJIS規格(JIS R 7601、炭素繊維試験方法)に基づいて作製した。ゲージ長さはSiC繊維が5、10および50mm、またAl₂O₃繊維は10mmとし、同様な方法で直径を測定した。また、引張試験はインストロン形の小型試験機(東洋ボールドウィン社製、テンシロンSTM-50PB)を用いて、ひずみ速度0.02/

minで行なった。試験本数はそれぞれの条件で30~45本程度である。なお、セラミック繊維はぜい性質であるため破断した瞬間に細かい破片となり一次破面（最も初めにき裂が入った面）を紛失するおそれがあるので、繊維の表面をゼリー状のバック液で包み、一次破面の紛失を防止する方法⁽²⁻¹¹⁾をとった。試験終了後、水中（約70°C）で繊維表面のバックを溶解し、一次破面を有する破片を抽出した。また、破面観察はSEM（Scanning Electron Microscope、日立製、S-150形）を用いて行なった。このときボロン繊維はすべての試験片を、SiC繊維とAl₂O₃繊維ではゲージ長さ10mmの試験片を対象にし、破壊起点となった欠陥を逐一調査した。

2-3-3. 破面観察結果

ボロン繊維の引張破断面を観察した結果、どの種類においても図2-1(a)に示すような表面を起点（図中矢印）として破壊するもの、および図2-1(b)に示すような内部を起点（図中矢印）として破壊するものの2種類が観察された。前者はだ円状ピットによるものと、こぶ状突起物との境界を起点とする破面が観察された。両者による強度特性のちがいはほとんどみられなかったため、以後一括してこれらを表面欠陥として扱う。一方、内部欠陥の形態そのものは同定できなかったが、破壊の起点はタングステン芯内および芯-蒸着ボロン界面に存在することが認められた。したがって、以下ではボロン繊維の破壊起点となる欠陥を2種類、すな

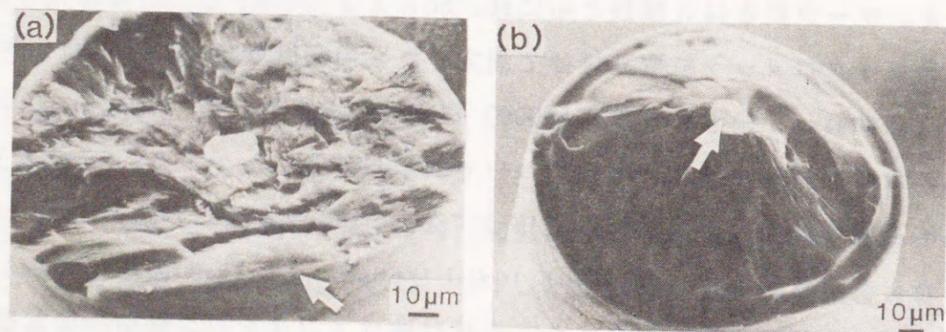


図2-1. SEMによるボロン繊維(B140繊維)の破面写真
(a)表面欠陥を起点として破壊 (b)内部欠陥を起点として破壊

わち $k=2$ とする。

図2-2にSiC繊維の破面観察した結果を示す。SiC繊維もボロン繊維と同様に表面を起点（図(a)中矢印）として破壊するものと内部を起点（図(b)中矢印）として破壊するものの2種類が観察された。前者は表面傷のようにみられるが、ピット形を呈したものの、また同定しにくいものもいくつか観察された。一方、後者の内部欠陥はボイドと思われる。同様にこの場合も $k=2$ として扱う。これに対してAl₂O₃繊維では、図2-3(a)に示すように破壊起点となった場所すら見出すことが困難であった。Nunes⁽²⁻¹²⁾は、Al₂O₃繊維では屈曲部を有する箇所が多々存在し、そこを起点として破壊する試験片がいくつか観察されることを報告している。本研究でも同様に直線部（図(b)）だけでなく屈曲部（図(c)）でも破壊する試験片が観察された。Nunesは両者の破壊形態によってその強度特性が大きく異なることを指摘したが、本研究でも同様な傾向であった。そこでAl₂O₃繊維の場合も $k=$

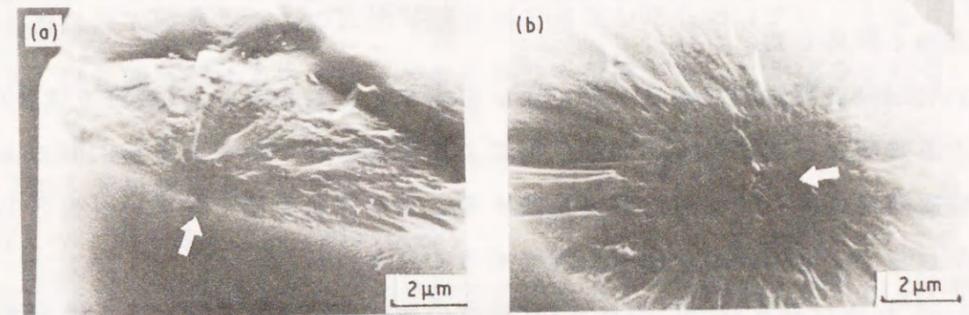


図2-2. SEMによるSiC繊維の破面写真
(a)表面欠陥を起点として破壊 (b)内部欠陥を起点として破壊

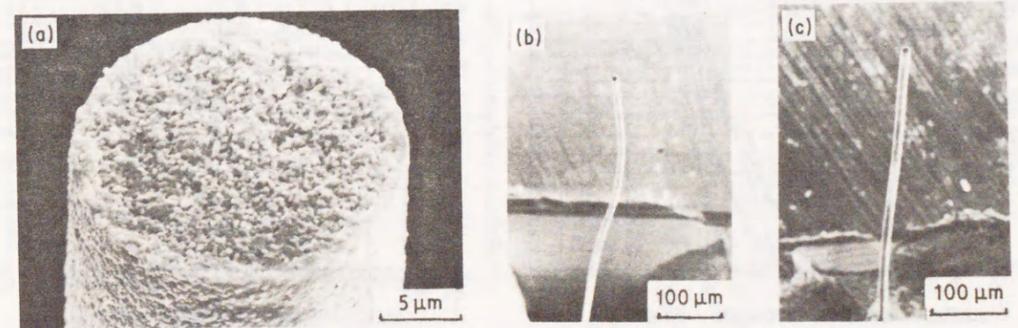


図2-3. SEMによるAl₂O₃繊維の破面写真
(a)微視的破面 (b)屈曲部で破壊 (c)直線部で破壊

2として扱い、以下では Nunesの強度データを採用し解析を行なう。

2-3-4. ワイブルプロット

図2-4(a)および(b)にB100繊維およびB140繊維の強度のワイブルプロットをそれぞれ示す。このときプロット点の縦軸は平均ランク法 (i 番めに破壊した繊維の累積確率を $i/(n+1)$ によって見積もるプロット法) によって与えた。これによると、両繊維ともに表面欠陥で破壊したものは、プロット点が低強度側にばらついて存在していることがわかる。これに対して内部欠陥で破壊したものは、高強度側に位置しばらつきが小さい。また、表面欠陥で破壊する繊維の本数はゲージ長さの減少に伴って大きく減少し、逆に内部欠陥で破壊する繊維は大きく増加することが今一つの特徴である。したがって、全体の強度のばらつきはゲージ長さの減少とともに小さくなることがわかる。なお、実験の範囲内でクランプ内で破壊した繊維はゲージ長さ10mmで両繊維ともに3~4本程度存在したが、今回はプロット点から除外した。

図2-5にB-B₄C繊維のワイブルプロットを示す。これからB-B₄C繊維では表面欠陥による破壊が非常に多く、内部欠陥による破壊はわずかであるがB100およびB140繊維同様に同じく高強度側に位置する。また分布の傾きはゲージ長さの増減にかかわらず、ほぼ同様な傾きで推移することがわかる。

図2-6にゲージ長さ10mmにおけるSiC繊維の強度のワイブルプロットを示す。こ

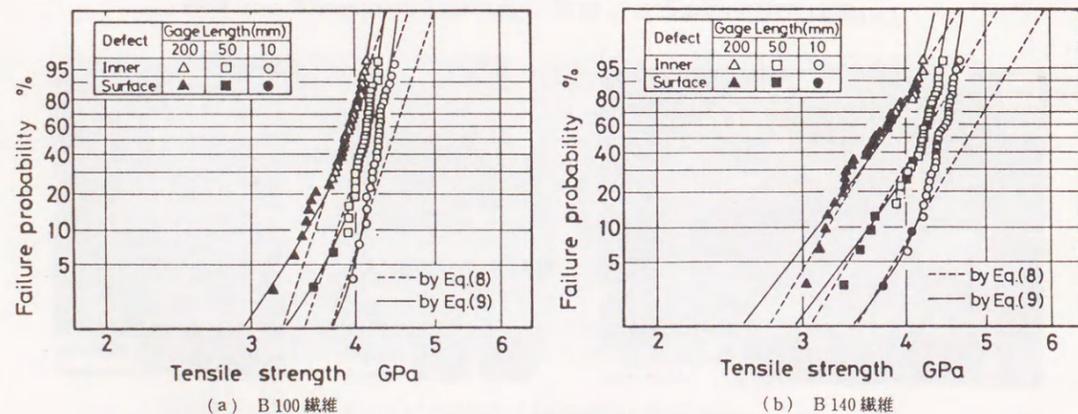


図2-4. ボロン繊維の引張強さのワイブルプロット

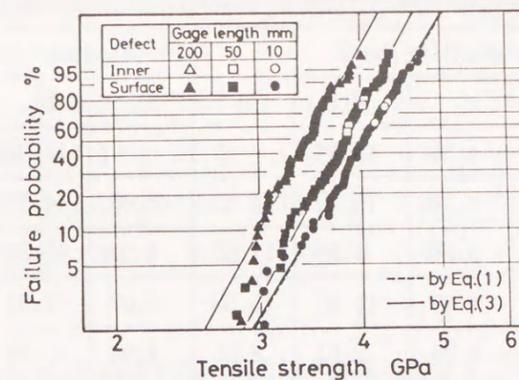


図2-5. B-B₄C繊維のワイブルプロットと累積分布曲線

の場合もボロン繊維と同様に、表面欠陥で破壊したものは低強度側に、内部欠陥で破壊したものは高強度側に位置していることがわかる。図2-7にNunesのデータより抜粋したゲージ長さ254mmにおけるAl₂O₃繊維のワイブルプロットを示す。これから直線部で破壊したものに比べ屈曲部で破壊したもの(プロット点上に"C"と表示)は低強度側に大きなばらつきを有して位置することが認められる。

2. 4 節 解析結果および考察

2-4-1. ワイブル母数の推定値の比較

B100およびB140繊維のワイブル母数を最尤法および二段最尤法によって推定した結果を表2-2に示す。形状母数は一般に材料固有のパラメータとして解釈され

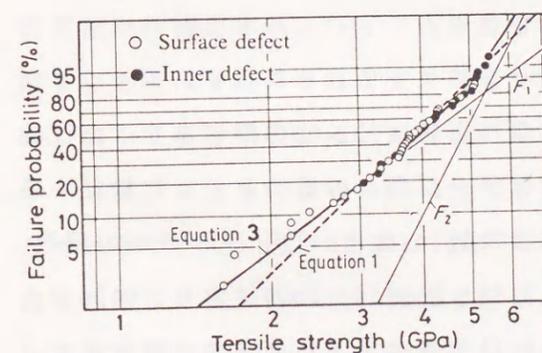


図2-6. SiC繊維のワイブルプロットと累積分布曲線

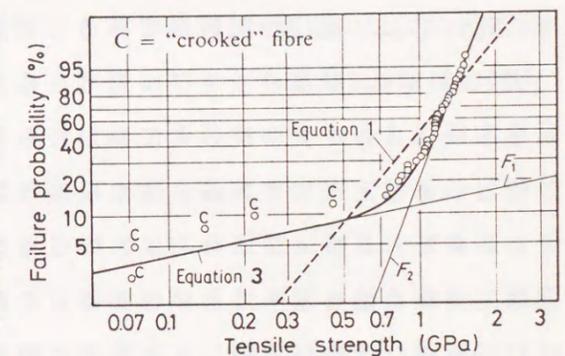


図2-7. Al₂O₃繊維のワイブルプロットと累積分布曲線

表2-2. ボロン繊維の単一および二重モードワイブル分布による母数推定

Fiber	G.L. mm	Uni-modal Weibull			Bi-modal Weibull				
		m	σ_0	MLL	m_1	σ_{01}	m_2	σ_{02}	MLL
B100	10	41.08	4.30	18.94	—	—	41.08	4.30	18.94
	50	37.26	4.14	19.07	8.42	5.66	44.74	4.15	23.00
	200	22.48	3.94	4.65	11.63	4.23	45.39	4.03	13.81
B140	10	32.67	4.47	11.67	15.58	5.07	37.61	4.50	12.72
	50	22.81	4.24	2.01	8.95	4.94	36.40	4.30	8.96
	200	12.48	3.84	-10.62	9.78	3.93	41.40	4.15	-4.18

ているが、単一ワイブル分布によると形状母数 m はゲージ長さの増加とともに大きく低下していくことがわかる。一方、二重モードワイブル分布によると形状母数 m_1 はほぼ8~16、 m_2 は36~46の範囲内にあり、おおむね一定値として推定されていることがわかる。また、尺度母数は一般に形状母数に依存した寸法効果を含んだパラメータとして解釈されるが、 σ_{01} および σ_{02} は m_1 および m_2 に依存してその値が増減していることが認められる。したがって、B100繊維およびB140繊維では二重モードワイブル分布が母数の性格をより合理的に表わしていると考えられる。さらに最大対数尤度MLLは、すべてにおいて二重モードワイブル分布によるものが大きい。尤度を大きく与える関数が真の分布により近いと解釈する理論的観点⁽²⁻¹³⁾にしたがうと、この場合二重モードワイブル分布が単一ワイブル分布に比べてより適した関数形であると判断される。

表2-3にB-B₄C繊維のワイブル母数を推定した結果をそれぞれ示す。単一ワイブル分布によると、ゲージ長さにかかわらず形状母数は12~14の間にあり、ほぼ同じ値として推定されている。また尺度母数はゲージ長さの減少とともに増加する。また二重モードワイブル分布においても形状母数 m_1 は単一ワイブル分布の母数とほぼ同様な値を示すことがわかる。これに対し m_2 は16~23内にあり、B100およびB140繊維に比べ小さい。また最大対数尤度は単一ワイブル分布および二重モードワイブル分布のちがいがにかかわらずほとんど同じ値が得られていることがわか

表2-3. B-B₄C繊維の単一および二重モードワイブル分布による母数推定

Fiber	G.L. mm	Uni-modal Weibull			Bi-modal Weibull				
		m	σ_0	MLL	m_1	σ_{01}	m_2	σ_{02}	MLL
B-B ₄ C	10	12.45	4.18	-29.05	12.15	4.19	22.49	4.91	-29.08
	50	13.73	3.92	-18.03	13.57	3.94	16.42	4.67	-18.03
	200	13.48	3.54	-9.02	13.48	3.54	—	—	-9.02

表2-4. SiC繊維およびAl₂O₃繊維の単一および二重モードワイブル分布による母数推定

Fiber	G.L. mm	Uni-modal Weibull			Bi-modal Weibull				
		m	σ_0	MLL	m_1	σ_{01}	m_2	σ_{02}	MLL
SiC	10	4.70	4.24	-61.75	3.64	4.64	9.41	5.08	-57.16
Al ₂ O ₃	254	2.95	1.14	-21.97	0.51	57.59	6.52	1.24	5.25

る。これは二重モードワイブル分布の形状母数が特に大きくちがわないため、欠陥のちがいによるばらつきの度合いが明確に表われなかったと解釈できる。これからB-B₄C繊維は、どちらの分布を用いてもさほど適合性に有意差はないと思われる。図2-5にこれらのワイブル母数から予測される強度の分布曲線を示す。これから異なる欠陥が生じたゲージ長さ10mmおよび50mmにおいて、どちらの分布による曲線もほぼ一致することがわかる。

表2-4にSiC繊維およびAl₂O₃繊維の強度データに基づいて、最尤法および二段最尤法から推定されたワイブル母数を示す。これから、SiC繊維の2つの尺度母数 σ_{01} および σ_{02} にさほど大きな違いがみられないのに対し、Al₂O₃繊維では大きく異なることがわかる。また、二重モードワイブル分布による最大対数尤度は単一ワイブル分布によるものに比べて、どちらの場合も大きな値をとることがわかる。ところで、図2-6および図2-7にこれらのワイブル母数による分布曲線をそれぞれ示す。図2-7のAl₂O₃繊維では明らかに両者の有意差が認められるが、図2-6のSiC繊維に関しては両者の適合性を目視で判断するにはむずかしいことがわかる。

2-4-2. 強度分布曲線および平均値の予測

図2-4にボロン繊維のゲージ長さ200mmで得られたワイブル母数をもとにして、式(8)および式(9)から予測された強度分布曲線をそれぞれ実線および破線にして示す。これから式(9)の二重モードワイブル分布による強度分布曲線は、両繊維ともに他のゲージ長さの実験点を非常に良好に予測していることがわかる。これは m_1 が m_2 に比べてかなり小さいために、ゲージ長さの減少に伴って $F_1(\sigma)$ はワイブル確率紙上で大きく高強度側へ推移するにもかかわらず、 $F_2(\sigma)$ はさほど変化しない。したがって、結果的に $F_1(\sigma)$ と $F_2(\sigma)$ の競合領域が消滅する側に向かい、全体の強度分布が $F_2(\sigma)$ に支配されるようになったためと考えられる。またこのことが、表面欠陥で破壊した繊維の本数がゲージ長さの減少とともに少なくなった原因と思われる。一方、式(8)の単一ワイブル分布の適合性が劣る理由は、形状母数を唯一として与えているためである。

同様に平均値についても二重モードワイブル分布による予測値が、実験結果と適度に一致することが認められた。図2-8は同じくゲージ長さ200mmで得られた母数をもとにして、式(10)および式(11)から予測されたゲージ長さの減少に伴うボロン繊維の平均強度の推移を両対数グラフ上に表わした結果である。これから両繊維ともに、多重モードワイブル分布による平均値曲線(式(11))と実験値はほ

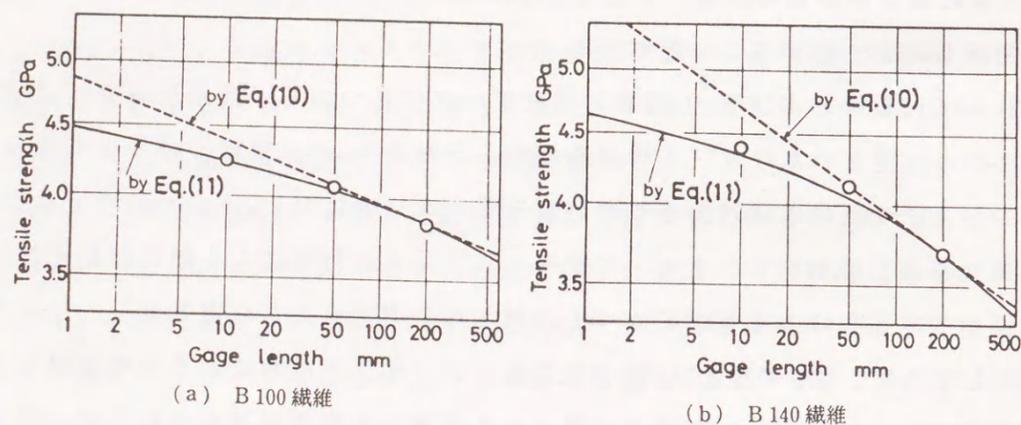


図2-8. ボロン繊維の平均強さと単一および二重モードワイブル分布による平均値曲線の予測(ただし、ワイブル母数はゲージ長さ200mmで推定されたものを用いた)

ぼ一致していることがわかる。これに対して、単一ワイブル分布による平均値曲線(式(10))は強度の過大評価を招くことがわかる。このように破壊起点となりうる欠陥が幾種か存在する繊維においては、ゲージ長さによって破壊を支配する欠陥が変化する可能性を持つため、無効長さに相当する平均強度やその分布を予測する際には十分な注意を要することがわかる。

図2-9にゲージ長さ5mmおよび50mmの実験結果に対するSiC繊維のワイブルプロットとゲージ長さ10mmで得られたワイブル母数に基づいて予測された強度の分布曲線を示す。また図2-10は実験結果の平均値と同様に予測された強度の平均値曲線である。これから、二重モードワイブル分布による予測は単一ワイブル分布に比べてわずかに適合性に秀でていることがわかるが、両者のちがいはさほど大きく現れない。これは図2-6で示されたように、曲線 F_1 と曲線 F_2 の傾きにさほど大きなちがいがみられず、また尺度母数 σ_{01} および σ_{02} もほぼ同程度の値をとったことが原因であると考えられる。

図2-11はゲージ長さ12.7mmおよび127mmにおける Al_2O_3 繊維のワイブルプロットとゲージ長さ254mmのワイブル母数に基づいて予測された分布曲線である。また図2-12に同様にして予測された平均値曲線を示す。ボロン繊維と同様に Al_2O_3 繊維ではそれぞれのワイブル母数が大きく異なるため、二重モードワイブル分布による予測は明らかに単一ワイブル分布に比べ有意差が認められる。以上のように、セラミック繊維の強度のばらつきに対する多重モードワイブル分布の適合性は非常に良好であり、2つの形状母数間に大きなちがいを有する繊維ではその特性をより発揮することがわかった。

2-4-3. Rosenモデルによる多重モードワイブル分布適用の検討

Rosen⁽²⁻¹⁴⁾は、複合材内で繊維が破断しても繊維末端からある程度をおけば繊維はマトリックスのせん断力によってその耐荷能を回復する現象を利用し、破断繊維の影響は無効長さ δ の範囲に限られるとし、長さ δ の束を連ねた鎖として一方向強化複合材をモデル化した。Rosenは繊維強度が式(7)の単一ワイブル分布に従うとし無効長さに束理論⁽²⁻¹⁵⁾を適用したが、ここでは多重モードワイブル

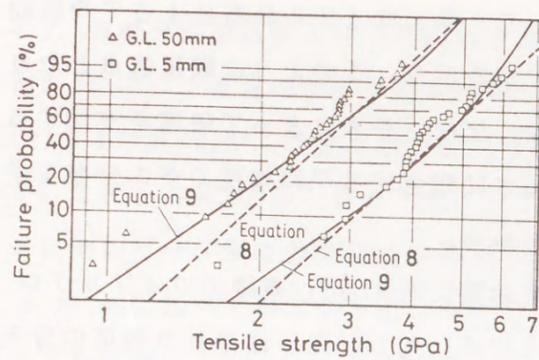


図2-9. SiC繊維(ゲージ長さ5mmおよび50mm)のワイブルプロットとゲージ長さ10mmのワイブル母数から予測された累積分布曲線

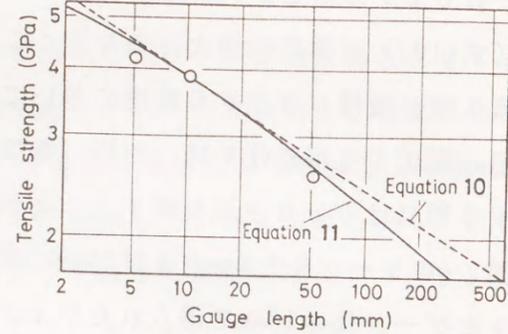


図2-10. SiC繊維の平均強さとゲージ長さ10mmのワイブル母数から予測された平均値曲線

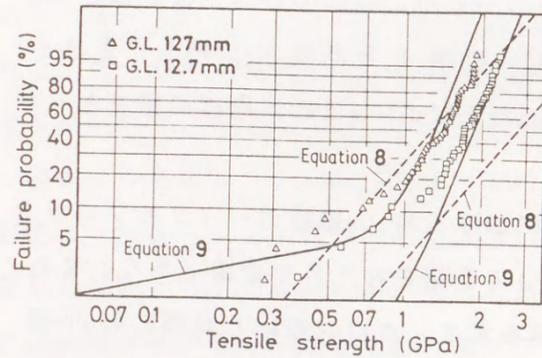


図2-11. Al₂O₃繊維(ゲージ長さ12.7mmおよび127mm)のワイブルプロットとゲージ長さ254mmのワイブル母数から予測された累積分布曲線

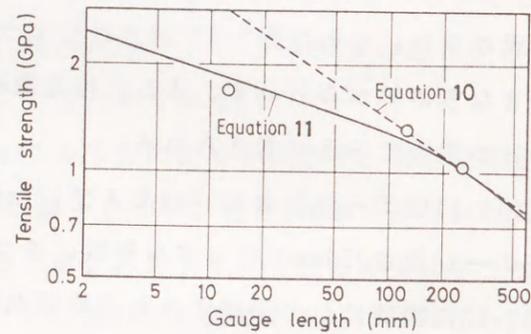


図2-12. Al₂O₃繊維の平均強さとゲージ長さ254mmのワイブル母数から予測された平均値曲線

分布を用いて解析を行なう。いま、長さ δ の束が負担する応力の期待値 E は次式のように表わされる。

$$E = \sigma \{1 - F(\sigma)\} \quad (12)$$

これに式(8)で示された単一ワイブル分布を代入すると、期待値の最大値として次式が導かれる。

$$E_{\max} = \sigma_0 \left(\frac{m \cdot \delta}{L_0}\right)^{-1/m} \exp\left(-\frac{1}{m}\right) \quad (13)$$

この式は破断繊維が及ぼす応力集中の効果を無視しているため、界面接着の弱い複合材への解析に有効であると考えられる。多重モードワイブル分布式(9)を式

(12)に代入し、 σ で一回微分すると次式のようなになる。

$$\frac{dE}{d\sigma} = \left\{1 - \frac{\delta}{L_0} \sum_{i=1}^k m_i \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0i}}\right)^{m_i}\right\} \exp\left\{-\frac{\delta}{L_0} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0i}}\right)^{m_i}\right\} \quad (14)$$

$dE/d\sigma = 0$ のとき、期待値の最大値が得られるので、

$$\frac{\delta}{L_0} \sum_{i=1}^k \left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{0i}}\right)^{m_i} - 1 = 0 \quad (15)$$

となる。ここで、 σ_{\max} : 束が最大応力を負担するとき未破壊繊維にかかる平均応力である。式(15)はNewton-Raphson法によって解くことができる。得られた σ_{\max} を式(12)に代入すると次のようになる。

$$E_{\max} = \sigma_{\max} \{1 - F(\sigma_{\max})\} \quad (16)$$

これは、繊維強度が多重モードワイブル分布に従う場合のRosenモデルによる束強度の期待値である。

以下に、ボロン繊維で推定されたワイブル母数(表2-2)を用いてRosenモデルによる束強度および束応力-ひずみ線図の解析を行なう。このとき、計算はすべてのゲージ長さにおいて2種類の破壊起点となる欠陥が現れたB140繊維についてのみ行なった。表2-5にRosenモデルによる束強度の期待値を示す。このとき無効長さとしてはアスペクト比10および100に相当する長さ(それぞれ1.4mmおよび14mm)を仮の値として与えた。これから、式(16)は式(13)に比べてゲージ長さを変

表2-5. RosenモデルによるB140繊維の束強度解析

Aspect ratio	G.L. mm	Strength GPa	
		Eq.(13)	Eq.(16)
10	10	4.14	4.14
	50	4.14	4.15
	200	4.31	4.11
100	10	3.86	3.77
	50	3.76	3.76
	200	3.58	3.64

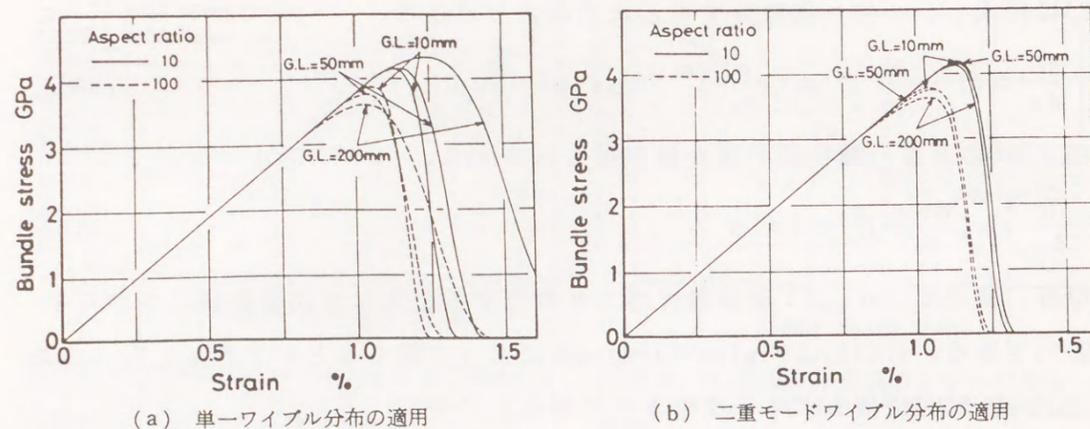


図2-13. ボロン繊維の束応力とひずみの関係

えても、両アスペクト比の場合ともにほぼ同程度の値が得られていることがわかる。図2-13は式(12)を用いて予測したRosenモデルによる長さ δ の束の公称応力-ひずみ線図である。図(a)および図(b)は単一ワイブル分布および二重モードワイブル分布によってそれぞれ予測されたものである^{*1}。図(a)に比べて図(b)は、どのゲージ長さで推定した母数を用いても、公称応力-ひずみ線図はほぼ同じ推移を経ていることが認められる。ワイブル母数が材料固有の定数ならば、どのようなゲージ長さを用いても束強度やその応力-ひずみ線図が同程度に得られるはずである。したがって、表2-5および図2-13の結果は、セラミック繊維の強度分布に二重モードワイブル分布が適用できることの合理性を証明するものである。

2-5節. まとめ

破壊起点となる欠陥を複数種有したセラミック繊維の強度分布を競合リスクモデルに基づいた多重モードワイブル分布によって評価することをめざし、実験データに対する平均値および分布特性の適合性を検討した。供試材としてボロン繊維、SiC繊維およびアルミナ繊維を用い、引張試験およびSEM観察によってこれらの破壊起点を明らかにするとともに、最尤法および多段最尤法によってそれ

*1. このとき、ボロン繊維の縦弾性率は377GPaとして計算した。

ぞれのワイブル母数を推定した。これから、以下に示す結論を得た。

(1)ボロン繊維において、ゲージ長さ(10,50および200mm)ごとにワイブル母数を推定した結果、単一ワイブル分布では形状母数がゲージ長さの増加とともに大きく低下したのに対し、多重モードワイブル分布では2つの形状母数をほぼ一定値として与えた。一方、ボロンカーバイトが被覆されたボロン繊維ではどちらの分布曲線を用いても、強度分布に対する有意差はほとんどみられなかった。また、ボロン繊維、SiC繊維およびアルミナ繊維の多重モードワイブル分布による最大対数尤度は単一ワイブル分布のそれに比べ大きな値を示すことがわかった。

(2)各繊維で得られたワイブル母数を用いて他のゲージ長さにおける強度分布曲線と平均値曲線をそれぞれ予測した。その結果、多重モードワイブル分布によるそれらは実験データに非常によく一致することが認められた。これに対して、単一ワイブル分布ではワイブル母数に依存はするものの、実験結果をいくらか過大評価することがわかった。

(3)ボロン繊維で得られたワイブル母数を用いて、Rosenモデルを利用した束強度の期待値およびその応力-ひずみ線図を予測した。その結果、多重モードワイブル分布による予測値は、単一ワイブル分布によるそれらと比べて、どのゲージ長さから得られたワイブル母数を用いても適度に一致することが認められた。

(4)以上より、数種の欠陥を含むセラミック繊維の強度分布解析に多重モードワイブル分布の適用を推奨する。

3.1節 はじめに

FRMの強化用繊維としてしばしば使用されるボロン繊維、カーボン繊維およびSiC繊維等のセラミック繊維は、FRM製造時に母地金属と反応しその強度特性が大きく低下することが知られている⁽³⁻¹⁾。この原因は、反応によって生じた脆弱な化合物層（以下、反応層と記す）は負荷によってすぐさまき裂を含むため、その応力集中によって繊維が破壊に至るといった概念によって説明されている。MetcalfとKlein⁽³⁻²⁾、BakerとBonfield⁽³⁻³⁾、Ochiaiら⁽³⁻⁴⁾⁻⁽³⁻⁶⁾あるいはSakaiとWatanabe⁽³⁻⁷⁾等多くの研究者は、このような反応層を有する繊維の強度を反応層厚さの関数として理論的に評価してきたが、彼らの用いた手段は破壊力学に基づく決定論的手法であった。緒論でも触れたように、微視強度論によって複合材の強度分布を評価するには、まず繊維の強度を適当な確率分布関数に適合させる必要があるが、反応層を有する繊維に対してこのような適合性を試みた報告はほとんど見当たらない。

そこで本章では、反応層を有するセラミック繊維の強度分布を表わす確率分布関数の導入を試みる。まず反応層を有するセラミック繊維の破壊の確率モデルが競合リスクモデルによって表わされると仮定し、その関数形が多重モードワイブル分布になることを示した。次に、SiC繊維にアルミニウムを被覆・焼鈍したものをモデル材とし、引張試験によって焼鈍時間に伴う強度の推移を調査した。これから得られたデータを上記モデルに当てはめ、平均値および変動係数の推移を予測して適合性の良否を検討した。さらにWeibull⁽³⁻⁸⁾および松尾^{(3-9), (3-10)}によって提案された多軸分布関数を用い、反応層を有するセラミック繊維の強度低下の要因について考察を加えた。

3.2節 解析方法

3-2-1. 反応層き裂を破壊原因とする強度の分布関数

解析に当たり、繊維表面上の反応層厚さ c に相当するき裂（以下、反応層き裂

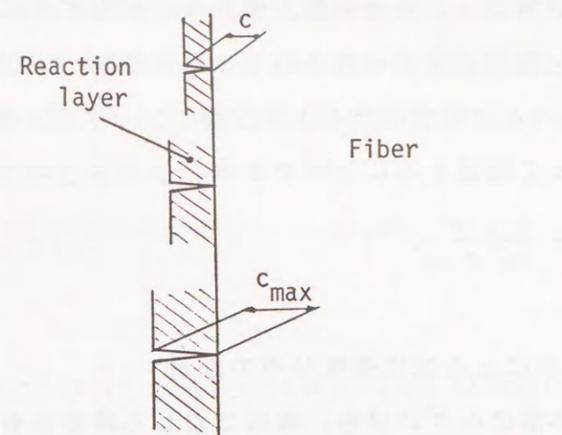


図3-1. 反応層モデル

と記す)はOchiaiら⁽³⁻⁴⁾⁻⁽³⁻⁶⁾およびShorshorovら⁽³⁻¹¹⁾によって示されたように、負荷方向と垂直に生じるものと仮定する。このとき、繊維に作用する無限遠応力 σ は次式のように表わされる。

$$\sigma = Y \cdot \kappa \cdot K_I / \sqrt{\pi c} \quad (1)$$

ここで、 Y : き裂の形状に依存する係数、 κ : 繊維および反応層の弾性率によって決定される定数、 K_I : モード I の応力拡大係数である。このとき、き裂の伝ば条件は $K_I = K_{Ic}$ (K_{Ic} : 破壊じん性値) である。反応層厚さは反応時の温度分布や繊維表面の不均質性に依存して均一な厚さでは生成しえないので、場所によって異なる変数と考えられる。たとえば、カーボン繊維/ニッケル間における反応層厚さは正規分布状にばらつくことが報告されている⁽³⁻¹²⁾。ここでは厚さ c を確率変数とみなし解析をすすめる。いま反応層を有する繊維の破壊が、図3-1に示すように反応層の最大厚さ c_{max} によって決定づけられるとすると、繊維の破壊強度 σ_f は次式のように表される。

$$\sigma_f = Y \cdot \kappa \cdot K_{Ic} / \sqrt{\pi c_{max}} \quad (2)$$

c_{max} もまたそれぞれの繊維によって変動する確率変数と考えられる。このとき、対象とする繊維に次のような仮定をおく。

- (1)各反応層き裂はすべて同形状に生じる。
- (2)各繊維における破壊じん性値の確率の変動は無視できるものとする。
- (3)反応層厚さ c の裾野の分布は単調に変化する。

仮定(1)(2)より c_{max} の分布は c の分布の最大値分布に相当することになる。 c_{max} と σ_f は式(2)によって一義的に決められるので、仮定(3)より反応層き裂を破壊原因とする強度 σ ($\sigma_f \rightarrow \sigma$ と書き改める) の分布 $F_R(\sigma)$ は、次式のような2母数ワイブル分布によって記述することができる。

$$F_R(\sigma) = 1 - \exp \left\{ -\frac{L}{L_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{OR}} \right)^{m_R} \right\} \quad (3)$$

3-2-2. 競合リスクモデルによる繊維強度分布の表示

反応層き裂の寸法が非常に小さい場合、繊維はむしろ繊維固有の内在欠陥によって破壊するであろう。いま両者の欠陥による相互干渉は無視できるとすると、元々の繊維の強度分布関数を $F_0(\sigma)$ と記述することによって、反応層を有する繊維の強度分布関数 $F(\sigma)$ は次式のように与えられる。

$$F(\sigma) = 1 - \{1 - F_R(\sigma)\} \{1 - F_0(\sigma)\} \quad (4)$$

これは前章同様に、破壊の確率モデルが競合リスクモデルによって表わされることを意味する。 $F_0(\sigma)$ が単一ワイブル分布で表わされるとき、式(4)は

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[-\frac{L}{L_0} \left\{ \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m + \left(\frac{\sigma}{\sigma_{OR}} \right)^{m_R} \right\} \right] \quad (5)$$

となる。一方、 $F_0(\sigma)$ に多重モードワイブル分布を用いると式(4)は次のように記述できる。

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[-\frac{L}{L_0} \left\{ \sum_{i=1}^k \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0i}} \right)^{m_i} + \left(\frac{\sigma}{\sigma_{OR}} \right)^{m_R} \right\} \right] \quad (6)$$

式(5)(6)は、構造的には多重モードワイブル分布であることがわかる。式(5)(6)の平均値 μ は解析的に得られないので、平均値の算出には次式を数値積分して解を求めた。

$$\mu = \int_0^\infty \{1 - F(\sigma)\} d\sigma \quad (7)$$

同様に変動係数 CV も数値計算によって次式のように求めることができる。

$$CV = \frac{\sqrt{2 \int_0^\infty \sigma \{1 - F(\sigma)\} d\sigma}}{\mu} \quad (8)$$

3-2-3. ワイブル母数の推定法

ワイブル母数は前章同様に多段最尤法によって推定した。なお式(5)は前章で述べた方法と同様なので、ここでは式(6)の解法のみ記す。式(6)に基づく尤度関数は次式によって与えられる。

$$L_F = C \left(\prod_{i=1}^k L_{F_i} \right) L_R \quad (9)$$

ここで、

$$L_{F_i} = \prod_{j=1}^{n_i} f_i(\sigma_j^{(i)}) \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq i}}^k \prod_{j=1}^{n_h} \{1 - F_i(\sigma_j^{(h)})\} \prod_{j=1}^{n_R} \{1 - F_i(\sigma_j^{(R)})\}, (i=1, \dots, k)$$

$$L_R = \prod_{j=1}^{n_R} f_R(\sigma_j^{(R)}) \prod_{h=1}^k \prod_{j=1}^{n_h} \{1 - F_R(\sigma_j^{(h)})\}$$

C : 定数 ($= n! / (\prod_{i=1}^k n_i! n_R!)$)、 n_i : 内在欠陥 "i" を破壊原因とした繊維の本数、 n_R : 反応層き裂を破壊原因とした繊維本数である。 L_1, \dots, L_k および L_R は欠陥 "1", ..., "k" および "R" のみを含むワイブル母数によって記されているので、それらをそれぞれ最大にする値が最尤推定量である。したがって、尤度方程式は次式のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{m_i} + \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \ln \sigma_j^{(i)} - \frac{\sum_{j=1}^{n_i} \sigma_j^{m_i} \cdot \ln \sigma_j}{\sum_{j=1}^{n_i} \sigma_j^{m_i}} = 0 \\ \sigma_{0i} = \left(\frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \sigma_j^{m_i} \right)^{1/m_i} \end{aligned} \right\} (i=1, \dots, k \text{ および } R) \quad (10)$$

このとき、計算はNewton-Raphson法によって第1式中の m を求め、これを第2式に代入して σ_{0i} を求めた。

3. 3節 実験方法および実験結果

3-3-1. 基材および処理方法

本モデル試料には金属強化用SiC繊維(日本カーボン社製、商品名:ニカロン)を用いた。まず繊維表面の有機系収束剤の除去を行なった後、繊維一本一本に真

空蒸着によってアルミニウムを被覆した。これを大気中700°Cで0.5、1、2および5min間の焼鈍処理を施した後、20%NaOH水溶液中に20h浸してアルミニウムの薄層を除去した（このような処理を以下、Al被覆・反応処理と呼ぶ）。このような焼鈍温度および焼鈍時間の選択は、FRMがスクイズキャスト法等の液相法によって製造されることを想定したものである。なお、繊維の引張試験および破面観察は前章で述べた方法と同様に行なった。

3-3-2. 繊維強度のワイブルプロットとその平均値および変動係数

Al被覆・反応処理によってSiC繊維は、図3-2に示すような反応によって生じたと考えられる層を起点として破壊する破面が新たに観察された。以下では、このような破面を呈した繊維を反応層き裂による破壊原因とし解析をすすめる。図3-3および図3-4に実験結果のワイブルプロットとその平均値および変動係数をそれぞれ示す。図3-3によると、Al被覆・反応処理にもかかわらず処理時間が0.5およ



図3-2. アルミニウム被覆後、700°C、0.5min間焼鈍処理したSiC繊維の破面

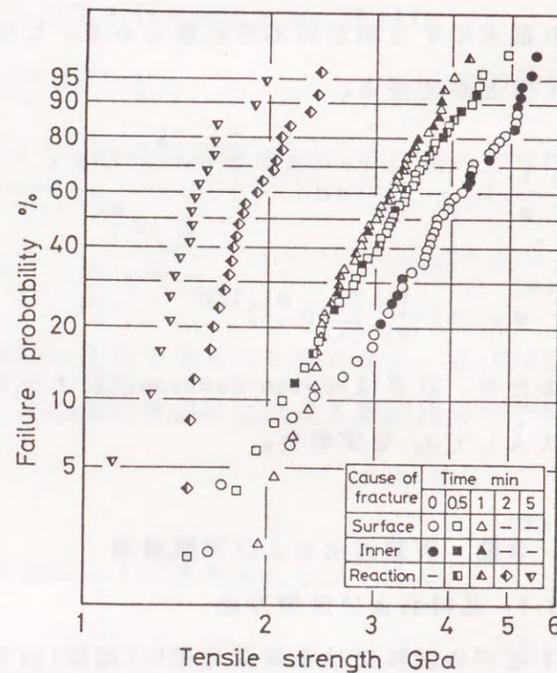


図3-3. 焼鈍処理時間ともなうSiC繊維のワイブルプロット

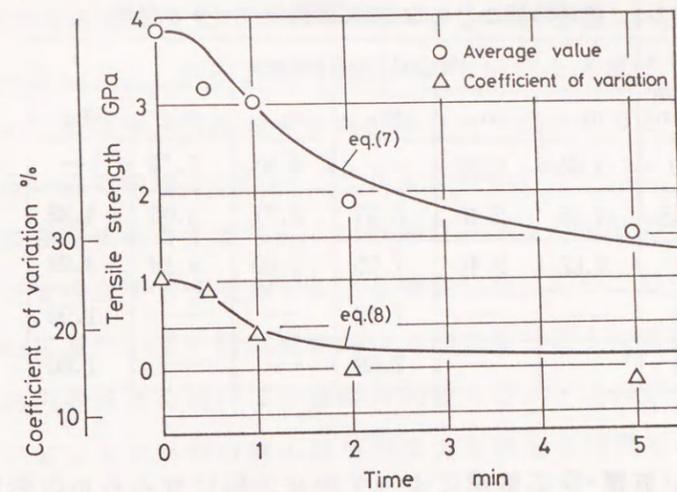


図3-4. 焼鈍処理時間ともなうSiC繊維の平均強度と変動係数およびそれらの推定曲線

び1minのとき内在欠陥（表面および内部欠陥）を破壊原因とした繊維がいくつか現れていることがわかる。これは破壊の確率モデルを競合リスクモデルとして仮定したことの信ぴょう性を裏付けるものである。一方、反応層き裂を破壊原因とする繊維は処理時間とともにその本数が増加し、処理時間が2min以上になるとすべてが反応層き裂を原因として破壊することがわかる。また、分布の傾きは徐々に大きくなるのがわかる。一方図3-4によると、強度の平均値は処理時間とともに大きく低下し、また変動係数もいくらか減少していることが認められる。

3. 4 節 解析結果および考察

3-3-1. 競合リスクモデルによる繊維強度の平均値および変動係数の予測

表3-1はSiC繊維強度の各処理時間におけるワイブル母数の推定結果を示す。これから、形状母数 m_1 、 m_2 および m_R はそれぞれ3.8~4.7、5.4~9.5および6.2~8.0の範囲内にあることがわかる。これらは、少数サンプルにおける推定値の変動による影響が表われていると考えられるが、 m_R についてはほぼ同じような値が得られたことは注目に値する。これに対して尺度母数 σ_{01} 、 σ_{02} および σ_{0R} は処理時間とともに低下し、特に σ_{0R} については大幅な減少が認められる。 σ_{01} および σ_{02} の

表3-1. 処理時間ともなうSiC繊維のワイブル母数

Time min.	Weibull parameter					
	m_1	m_2	m_R	σ_{01}	σ_{02}	σ_{0R}
0	3.64	8.06	—	4.53	5.14	—
0.5	4.35	5.40	6.27	3.71	5.06	4.88
1	4.68	9.44	7.95	3.60	4.19	3.93
2	—	—	7.13	—	—	1.99
5	—	—	7.59	—	—	1.60

低下の要因は、AI被覆・反応処理によって内在欠陥になんらかの影響がもたらされた結果と考えられるが、 σ_{0R} の低下は処理時間に伴う反応層の成長による体積効果（あるいは表面積効果）が大きな原因であると考えられる。そこで競合リスクモデルによって処理時間ともなう強度特性の推移を予測するにあたり、それぞれのワイブル母数に以下のような条件を与える。

(1) m_R は処理時間に依存しない独立した定数とみなす。

(2) σ_{0R} は、次式のような処理時間 t に依存した単調減少関数とする。

$$\sigma_{0R} = k' \cdot t^{-n'} \quad (11)$$

(3) m_1 、 m_2 、 σ_{01} および σ_{02} は未処理状態の値が維持される。

条件(2)において、最大反応層厚さ c_{max} の時間経過ともなう成長がべき乗則⁽³⁻⁶⁾によって近似されるものとする、 c_{max} は式(2)によって破壊強度と関係付けられているので、 σ_{0R} は式(11)にしたがうことが予想される。以上の条件より、 m_R の平均値として7.23を、 k' と n' は最小二乗法によって見積もった値3.45および0.52をそれぞれ用い、処理時間ともなう繊維強度の平均値およびその変動係数を式(7)(8)から予測した。その結果を図3-4に示す。これから両者は実験結果と適度に一致することが認められる。特にここで示した変動係数の変化は単一の分布関数では表わせないので、本モデルの妥当性を裏付けるものといえよう。以上、強度分布を反応層き裂および内在欠陥の競合分布として与えることによって、反応層を有する繊維の強度特性の推移が良好に再現できることが見出された。

3-3-2. き裂の方向性を考慮したワイブル解析

上述した解析においては、内在欠陥（き裂）の方向性を考慮せず単軸引張下において2母数ワイブル分布（欠陥が1種類の場合）が成立するとして解析を進めた。しかしながら、最近松尾⁽³⁻⁹⁾、⁽³⁻¹⁰⁾およびEvans⁽³⁻¹³⁾は、き裂がすべての方向に等確率に存在するのであれば、2母数ワイブル分布は3軸均等引張下（負の静水圧）において成立すべきであることを報告した。ここではワイブル⁽³⁻⁸⁾および松尾の理論に基づいて、反応層き裂の方向性を考慮した解析を行なう。

ワイブルは材料内の各点におけるき裂の方向性をランダムに表わす単位球を考え、多軸応力下におけるぜい性材料の破壊強度の累積分布関数を次のように示した。

$$F(*) = 1 - \exp \left\{ - \int_B (K \int_A \sigma_n^m dA) dV \right\} \quad (12)$$

ここで、 σ_n ：き裂面に作用する垂直応力を表わす。いま、き裂の方向が主応力軸とき裂面の垂直方向のなす角度 (ϕ, θ) によって表わされるとすると、 σ_n は次式のように表わされる。

$$\sigma_n = \sin^2 \phi (\sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta) + \sigma_3 \cos^2 \phi \quad (13)$$

ここで、 $dA = \sin \phi d\phi d\theta$ 、 A ：単位球半表面の面積、 B ：物体の体積、 K ：単軸引張下で式(12)が2母数ワイブル分布と一致すると定義したときの比較係数をそれぞれ表わす。これに対し、3軸均等引張下ではき裂はその方向のいかんにかかわらず同じ力学的環境下におかれるので、この状態で2母数ワイブル分布が成立すると考えるのが自然である。いま、 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma, \sigma, \sigma)$ とおくと、 $\sigma_n = \sigma$ が成立する。よって、比較係数は次式のようになる。

$$K = \frac{1}{2\pi\sigma^m} \quad (14)$$

単軸引張下では、 $\sigma_n = \sigma \cos^2 \phi$ なので、

$$\int_A \sigma_n^m dA = 2 \int_0^\pi \int_0^{\pi/2} \sigma \cos^{2m} \phi \sin \phi d\phi d\theta = \sigma^m \frac{2\pi}{2m+1}$$

となる。これから、単軸引張下における分布式は次のようになる。

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ -\frac{L}{L_0} \frac{1}{2m+1} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right\} \quad (15)$$

さらに、欠陥として円板状の内部き裂を考えることによって、き裂面に作用するせん断応力も考慮した分布式が次のように表わされる。

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ -\frac{L}{L_0} I \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right\} \quad (16)$$

ここで、

$$I = \int_0^{\pi/2} \left\{ \cos^2 \phi + \frac{4}{(2-\nu)^2} \sin^2 \phi \right\}^{m/2} \cos^m \phi \sin \phi d\phi$$

である。このとき σ_n を代替する確率変数は、き裂の伝ば条件が G クライテリオンで与えられるとして導かれる等価垂直応力 $z = \{ \sigma_n^2 + 4\tau_n^2 / (2-\nu)^2 \}^{1/2}$ によって表わされている。さて、式(15)(16)において尺度母数はき裂の方向性の影響を含むので、本研究で得られた内部欠陥を破壊原因とする強度分布が式(15)(16)によって近似的に表わされると仮定し、尺度母数を換算した。その結果を表3-2に示す。これから、表3-1で示した形式的尺度母数(単軸下のデータから得られる尺度母数)はかなり大きく見積もられていたことがわかる。これは3軸均等引張りでは、すべてのき裂に一様な負荷応力が作用しているのに対し、単軸下では σ_n あるいは z はき裂のなす角度に依存して小さくなるからである。

一方、前節で仮定されたように、反応層き裂は単軸下で負荷方向に垂直に生じ

表3-2. 多軸分布関数から修正された尺度母数 σ_{02}

Time min.	σ_{02}	
	Eq.(15)	Eq.(16)
0	3.62	4.02
0.5	3.20	3.72
1	3.05	3.35

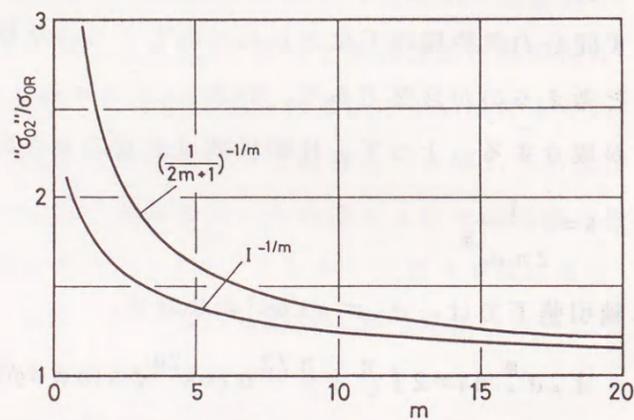


図3-5. 単軸引張り下での尺度母数 σ_{0R} に対する形式的尺度母数 σ_{02} の割合

る。すなわち、単軸下ですでに反応層き裂は同じ力学的環境下におかれることになるので、式(3)で示した2母数ワイブル分布がそのまま適用できる。そこで、図3-5に内在欠陥と反応層き裂による強度のワイブル母数のちがいを調べるために、尺度母数 σ_{02} と σ_{0R} が同レベル ($\sigma_{02}/\sigma_{0R}=1$) にあるとして予測した形状母数の増加にともなう形式的尺度母数 σ_{02} の推移曲線を示す。これから、 σ_{02} は反応層き裂の尺度母数 σ_{0R} に比較して、すべての範囲で高いレベルにあり、 m が小さいほどその傾向は顕著であることがわかる。すなわち、反応層き裂はその厚さの成長だけでなく、その方向性においても繊維強度を低下せしめる要因を有した欠陥であることがわかる。

3.5節 まとめ

母地金属との反応によって生じるぜい弱層(反応層)は、しばしばセラミック繊維の強度低下の要因となる。このような繊維の強度分布特性を評価することを目的とし、繊維に元来存在する内在欠陥と反応層上で生じたき裂(反応層き裂)をそれぞれ独立したリスクとみなし、競合リスクモデルによって分布式を記述した。このモデルの正当性を証明するために、SiC繊維にアルミニウムを蒸着したものを焼鈍(AI被覆・反応処理)することによってモデル材を作製した。引張試験によって焼鈍時間にもなう強度の推移を調査した結果、以下のことがわかった。

(1) AI被覆・反応処理にもかかわらず、0.5および1min間処理した繊維では内在欠陥を原因とする破壊形態がいくつか現れた。また2および5min間の処理を施すと、すべての繊維が反応層から破壊することがわかった。これら処理時間にもなう各破壊原因ごとのワイブル母数を推定した結果、反応層き裂を破壊原因とする形状母数はすべての処理時間においてほぼ一定値を示し、尺度母数は処理時間とともに大きく低下することがわかった。

(2) そこで、内在欠陥を破壊原因とするワイブル母数および反応層き裂を破壊原因とする形状母数を不変とし、反応層き裂を破壊原因とする尺度母数を処理時間の単調減少関数と仮定することによって、本モデルは強度の平均値および変動

係数の推移を良好に再現することが認められた。

(3)反応層き裂が単軸引張下で負荷方向に垂直に生じるとして表わした2母数ワイブル分布を、三軸均等引張下で2母数ワイブル分布が成立するとした多軸分布関数と比較した。その結果、繊維の強度低下の要因が反応層き裂の大きさだけでなく、き裂の方向性においても見出せることが認められた。

第4章. 複合材内の繊維破断を利用した強化繊維の新しいワイブル母数推定法

4.1節 はじめに

ガラス繊維やカーボン繊維に代表される複合材料強化用繊維の強度は、一般にJIS規格などに準じた単繊維試験法によって求められ、そのデータからワイブル母数などの分布定数が決定される。これに対し本研究では、近年AE法等による非破壊検査技術の進歩によって複合材中における繊維破断がほぼ確実に捕えられるという事実^{(4-1)~(4-4)}を考慮し、繊維破断時に負荷されている複合材応力レベルからワイブル母数を推定する新しい手法を提案する。繊維は複合材内で弱いものから順に破断するので、各繊維の破断応力は順序統計量と考えられる。これらの結合分布を考慮することによって繊維強度の最尤推定値を求めようとするものである。この手法を用いてモンテカルロ法によって模擬される推定値の変動特性を調べるとともに、複合材内の応力集中によって生じる新たな繊維破断の生起確率曲線を表わす再帰法^{(4-5), (4-6)}(Recursion Analysis Technique)を用いて、本手法の有効性を検討した。

4.2節 解析方法

4-2-1. 複合材内における繊維の強度分布と順序統計量の結合分布

解析に当たり、複合材内の強化繊維1本1本は多数の欠陥を含み、それらの最弱欠陥によって破壊が決定されるもの仮定する。またそれらの欠陥同士の相互干渉は無視でき、破壊応力の下限值は0とする。このような仮定に基づき、多くの強化用セラミック繊維の強度分布を表わす関数として、次式の2母数ワイブル分布が用いられてきた。

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \frac{L}{L_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right\} \quad (1)$$

以下、複合材内の繊維の強度分布は式(1)にしたがうものとし議論を進める。

さて、一方向強化複合材をその強化方向に引張試験すると、複合材を構成する繊維のうち最も弱い繊維がまず初めに破断すると考えられる。この最弱繊維の強

度 $\sigma^{(1)}$ は、繊維体積率 V_f から換算される次式の複合則によって記述できる。

$$\sigma^{(1)} = \frac{\sigma_{cu}^{(1)} - \sigma_m^{(1)}(1 - V_f)}{V_f} \quad (2)$$

ここで、 $\sigma_{cu}^{(1)}$: 最弱繊維破断時に複合材の受持つ公称応力、 $\sigma_m^{(1)}$: 最弱繊維破断時にマトリックスが受持つ応力である。この $\sigma^{(1)}$ は幾度かの試験によって変動する確率変数であり、大きさ N (繊維総数) の標本における第 1 番めの順序統計量に相当する。さらに負荷を続けると繊維破断は弱いものから順次発生し、それぞれの強度は式(1)の添字 "1" を "i" に置き換えたものとして、同様に次式のように見積もることができる。

$$\sigma^{(i)} = \frac{\sigma_{cu}^{(i)} - \sigma_m^{(i)}(1 - V_f)}{V_f} \quad (3)$$

この $\sigma^{(i)}$ は第 i 番めの順序統計量である。いま、(h+1)番めに破断した繊維はその周辺に位置する繊維がすでに破断していたため、その応力集中が原因で破断したとすると、この繊維の強度は式(3)によって評価することはできない。すなわち式(3)は、 $i=1, \dots, h$ であり、 h はデータの対象となるシングルット (繊維が負荷応力 σ によって単独で破断した状態) の総数を意味することになる。

本研究ではパラメータの推定精度を向上させるために、順序統計量の結合分布を用いて推定の対象となるデータ数を増やすことを考える。一般に、第 1 番めの順序統計量の分布は母分布の最小値分布に相当するため、その確率密度関数は次式のように表わすことができる。

$$f^{(1)}(\sigma^{(1)}) = N\{1 - F(\sigma^{(1)})\}^{N-1} f(\sigma^{(1)}) \quad (4)$$

また、第 1 番めと第 2 番めの順序統計量の結合確率密度関数は、多項分布の概念より次式のように表わすことができる。

$$f^{(1,2)}(\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}) = \frac{N!}{1!1!(N-2)!} \{1 - F(\sigma^{(2)})\}^{N-2} f(\sigma^{(1)}) f(\sigma^{(2)}) \quad (5)$$

したがって、第 1 番めから第 h 番めまでの結合確率密度関数は次式のように表わされる⁽⁴⁻⁷⁾。

$$f^{(1, \dots, h)}(\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(h)}) = \frac{N!}{(N-h)!} \{1 - F(\sigma^{(h)})\}^{N-h} \prod_{i=1}^h f(\sigma^{(i)}) \quad (6)$$

本手法は式(6)に示す順序統計量の結合分布を用いてワイブル母数を推定するものである。

4-2-2. ワイブル母数の推定法

本研究では最尤法を用いてワイブル母数を推定する。式(6)の尤度関数 L_F は次式によって与えられる。

$$L_F = \prod_{j=1}^n f^{(1, \dots, h)}(\sigma_j^{(1)}, \dots, \sigma_j^{(h)}) \quad (7)$$

ここで、 n : 複合材のサンプル数を表わす。式(7)の両辺の対数を取り、その対数尤度 $\ln L_F$ を最大にする m および σ_0 が最尤推定値である。最尤方程式は $\partial \ln L_F / \partial m = 0$ および $\partial \ln L_F / \partial \sigma_0 = 0$ を満足するものとして、次式のように導くことができる。

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{hn} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^h \ln \sigma_j^{(i)} - \frac{\sum_{j=1}^n \{ \sum_{i=1}^h \sigma_j^{(i)m} \ln \sigma_j^{(i)} + (N-h) \sigma_j^{(h)m} \ln \sigma_j^{(h)} \}}{\sum_{j=1}^n \{ \sum_{i=1}^h \sigma_j^{(i)m} + (N-h) \sigma_j^{(h)m} \}} = 0 \quad (8)$$

$$\sigma_0 = \left[-\frac{1}{hn} \sum_{j=1}^n \{ \sum_{i=1}^h \sigma_j^{(i)m} + (N-h) \sigma_j^{(h)m} \} \right]^{1/m}$$

なおこれらの計算は Newton-Raphson 法によって行なった。

4. 3 節 解析結果および考察

ここではモンテカルロ法を用いて前節で提案したワイブル母数推定法の推定精度について調べるとともに、破断繊維の応力集中によって新たに生じる繊維破断の確率的生起性を考慮した再帰法を用いて本手法の有効性を検討する。

4-3-1. ワイブル母数の推定精度

繊維強度 X_i のシミュレーションデータはモンテカルロ法に基づく逆関数法によって発生させた。式(1)の逆関数は次式のように与えられる⁽⁴⁻⁸⁾。

$$X_i = \sigma_0 \left\{ \frac{L_0}{L} \ln \left(\frac{1}{1-F_i} \right) \right\}^{1/m} \quad (9)$$

ここで、 $F_i: [0,1]$ の一様乱数を示す。本研究では各種セラミック繊維のワイブル母数（ガラス繊維⁽⁴⁻⁹⁾ $m=5.04$, $\sigma_0=2.25\text{GPa}$, $L=6\text{mm}$, カーボン繊維⁽⁴⁻¹⁰⁾ $m=4.5$, $\sigma_0=5.85\text{GPa}$, $L=1\text{mm}$ およびSiC繊維⁽⁴⁻¹¹⁾ $m=4.70$, $\sigma_0=4.24\text{GPa}$, $L=10\text{mm}$)を参考にし、設定値は $m=5$, $\sigma_0=4.5\text{GPa}$ とした。

図4-1に繊維数 $N=100$ および 1000 、サンプル数 $n=10, 30$ および 50 について得られた設定値に対するワイブル母数の推定結果を示す。図中、●印および○印は試行数100回における形状母数および尺度母数の平均値を、またその両端の実線域は標準偏差をそれぞれ意味する。これから、シングレット数 h の増加につれ、どの条件においても推定値は徐々に設定値に近づき、そのばらつきも減少することが認められる。しかしそのばらつきの程度はサンプル数 $n=10$ のときに際立って

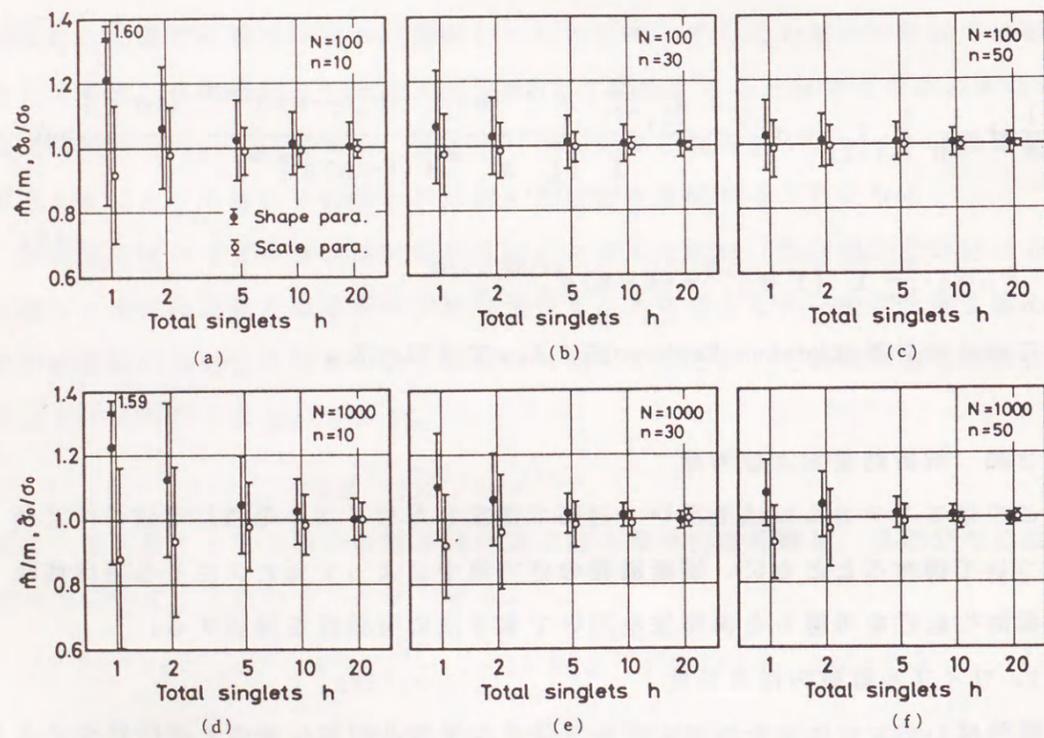


図4-1. ワイブル母数の推定値に及ぼすシングレット総数の影響
(a) $N=100, n=10$ (b) $N=100, n=30$ (c) $N=100, n=50$
(d) $N=1000, n=10$ (e) $N=1000, n=30$ (f) $N=1000, n=50$

大きく、 $h=10\sim 20$ の範囲でようやく安定する。一方、サンプル数 $n=30$ および 50 では $h=5$ 程度ですでに $0.9\sim 1.1$ の間にほぼ収まっており、推定値の変動は非常に小さい。また繊維数 N の影響については、 $h=1$ あるいは $h=2$ あたりで繊維数1000の方が多少大きなばらつきを有しているが、全体的に大きな違いは認められない。以上から、本手法はサンプル数が少ない場合でもシングレットのデータを多用することによって、逆にわずかなシングレットに対してはサンプル数を多く用いることで、正確なワイブル母数の推定値が期待できる。

さて、以下に本手法を単繊維試験法を用いる場合と比較・考察する。単繊維試験法は母分布の全区間を対象にしてワイブル母数を推定する場合に相当するが、最尤法等によってその推定値の変動を示した報告がいくつかみられる⁽⁴⁻¹²⁾。たとえば川合ら⁽⁴⁻¹³⁾は、30個のサンプル数程度で推定値の変動が $0.9\sim 1.2$ (形状母数)に収まることを報告しており、信頼できるデータを得るための最小サンプル数として推奨した。また市川⁽⁴⁻¹⁴⁾もBainらの信頼区間を与える報告に基づいてサンプル数30を信頼性データの目安として注視している。これに対し、本手法ではサンプル数 $n=10$ 、シングレット数 $h=5$ ですでに形状母数が $0.9\sim 1.2$ の範囲にあり、少数サンプル数にもかかわらず良好な推定値が得られている。また、 $h=1$ でも30~50個のサンプル数程度でほぼ同様な変動範囲にあり、単繊維試験法を用いる場合に比しほぼ同程度の推定精度と思われる。

4-3-2. 再帰法によるデータの対象となるシングレット数の評価

上述したように応力集中によって繊維が破断するとき、その局所的破断応力は負荷応力と異なるためにデータの対象にはならない。したがって、応力集中による破断繊維が現れる以前のシングレット数でワイブル母数を推定する必要がある。そこで、複合材内でダブルット(シングレットに隣接する繊維が破断し、破断繊維が2個連なった状態をいう)の生起確率をHarlowとPhoenixによって提案された再帰法^{(4-5), (4-6)}によって算出し対象となりうるシングレット数を見積もることにより、本手法の有効性を示す。まず再帰法を用いるに当たり、対象となる複合材は以下の項目を満足するものとする。

(1)複合材は単層板とし、強化繊維はリンク長さ（無効長さ⁽⁴⁻¹⁵⁾）相当の強度を発揮する、いわゆるRosenモデルに従った配列をする。

(2)シングルレットによって与えられる応力集中係数は最近接繊維のみを対象とし、リンク長さ全域にわたって一定に働くものとする。

HarlowとPhoenixはN本のリンクから成る単層板を想定し、ダブルレットの生起確率 $G_N^{[2]}$ を導くためにその余事象を満たす確率 $Q_N^{[2]} (=1-G_N^{[2]})$ を求めた。このとき、繊維強度 $X_j (j=1, \dots, N)$ は、次式に示すように負荷応力 σ と応力集中係数に依存した4つの区間に対応する確率によって与えられる。

$$\begin{aligned} p_0 &= \Pr\{0 < X_j \leq \sigma\} = F(\sigma) \\ p_1 &= \Pr\{\sigma < X_j \leq K_1 \sigma\} = F(K_1 \sigma) - F(\sigma) \\ p_2 &= \Pr\{K_1 \sigma < X_j \leq K_2 \sigma\} = F(K_2 \sigma) - F(K_1 \sigma) \\ p_3 &= \Pr\{K_2 \sigma < X_j\} = 1 - F(K_2 \sigma) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 K_1, K_2 : シングルレットおよびダブルレットによって与えられる隣接繊維への応力集中係数をそれぞれ示し、たとえば、LLS則(Local Load Sharing rule)^{(4-5), (4-6)} では $K_1 = 1.5, K_2 = 2.0$ 、Hedgepeth⁽⁴⁻¹⁶⁾ の解では $K_1 = 4/3, K_2 = 8/5$ である。このとき、任意の繊維 j とそれに隣接する繊維 $(j+1)$ の強度を上記したすべての場合について振分け、 $Q_{j+1}^{[2]} = 0$ を満たすものを解析の対象から除くことによって、ダブルレットが生じないための j 番めと $(j+1)$ 番めの取るべき規則性を次のように導き、これを再帰法と呼んだ。

$$\begin{Bmatrix} Q_{j+1}^{[2]}[3] \\ Q_{j+1}^{[2]}[1] \\ Q_{j+1}^{[2]}[0] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_2 & p_1 & p_0 \\ \hat{p}_2 & p_1 & 0 \\ \hat{p}_3 & p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_j^{[2]}[3] \\ Q_j^{[2]}[1] \\ Q_j^{[2]}[0] \end{Bmatrix} \quad (11)$$

ただし、 $\hat{p}_2 = p_2 + \hat{p}_3$ である。ここで、 $Q_j^{[2]}[k] (k=0, 1, 3)$: j 番めに配列された繊維が破壊確率 p_k で生じることを条件としたときの $Q_j^{[2]}$ の確率を示す。 $j=1$ のときダブルレットには成り得ないので、初期条件として、

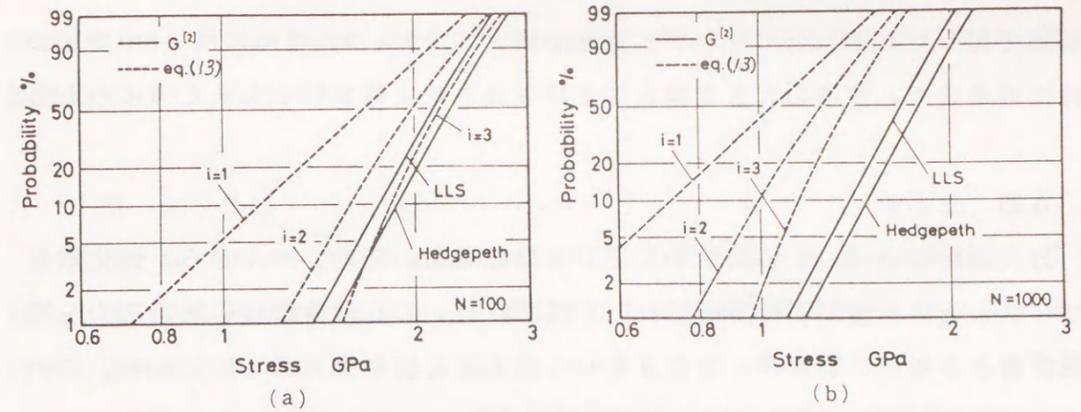


図4-2. ダブルレットの生起確率と各シングルレット発生における累積分布曲線の関係 (a)N=100 (b)N=1000

$$\begin{Bmatrix} Q_1^{[2]}[3] \\ Q_1^{[2]}[1] \\ Q_1^{[2]}[0] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

が与えられる。式(11)(12)から $Q_{N+1}^{[2]}[3]$ を求めれば、 $Q_N^{[2]} = Q_{N+1}^{[2]}[3]$ なる関係からダブルレットの生起確率を求めることができる。

図4-2はこのようにして算出されたダブルレットの生起確率と各シングルレットが生じる累積確率^{*1)}の関係をワイブル確率紙上に示したものである。図(a)はN=100の場合の結果であるが、 $i=2$ におけるシングルレットの累積確率が90%程度でダブルレットはすでに60~80%程度発生していることが認められ、このような場合は $h=1$ でしか用いることはできない。一方、図(b)で示すN=1000の場合は同条件でダブルレットの生起確率はまだ10~20%であるため、おおむね $h=2$ として採用できるであろう。したがってここで用いた繊維本数では、正確なワイブル母数を得るため

*1. 一般に第 i 番めの順序統計量の累積分布関数は、

$$F^{(i)}(\sigma^{(i)}) = 1 - \sum_{k=0}^{i-1} \frac{N!}{(N-k)!k!} \{F(\sigma^{(i)})\}^k \{1-F(\sigma^{(i)})\}^{N-k} \quad (13)$$

のように表わすことができる⁽⁴⁻⁷⁾。

に前節で記した30本以上のサンプル数を必要とするが、Nの増加に伴いhの増加が期待できるので、寸法の大きな複合材では程良い推定値が得られると考えられる。

4. 4節 まとめ

一方向強化複合材の引張試験中に生じる繊維破断の応力レベルから、強化繊維のワイブル母数を推定する手法について提案した。これは各繊維の破断応力を順序統計量とみなし、それらの結合分布から最尤推定値を求めるものである。この手法の有効性を検討するために、繊維強度をモンテカルロ法によって発生させ、設定値に対する変動範囲を調べた結果、以下のことがわかった。

(1) 全般的に少数サンプルにもかかわらず、多数の破断繊維をデータの対象にすることにより変動の小さな推定値が得られることがわかった。特にサンプル数10個、破断繊維数5本程度で、すでに従来の全区間を対象にした手法のサンプル数30における変動範囲とほぼ同じレベルにあることがわかった。また30~50個のサンプル数であれば、1本の破断繊維数でも良好な推定値を得ることができる。

(2) 繊維本数100~1000から成る複合材を想定し、再帰法によって応力集中による繊維破断の確率的生起性からデータの対象となりうる破断繊維数を限定した結果、1~2本程度が有効なデータと判断された。したがって、正確なパラメータを得るためには30個以上のサンプルを必要とする。

(3) 以上から、一方向強化複合材内の繊維破断データを利用した繊維強度のワイブル母数推定に本手法の適用が期待できる。

第5章 ホットプレス法によるボロン繊維強化アルミニウム複合材の調製と強化繊維のワイブル母数推定

5. 1節 はじめに

本章では、ホットプレス法によってボロン繊維強化Al複合材を調製し、複合材の引張強さに及ぼす調製温度の影響および寸法効果を検討する。さらに、複合材内の繊維破断をAE (Acoustic Emission)法で捕え、繊維強度のワイブル母数を前章で提案された推定法によって算出するとともに、従来の単繊維試験法による推定値と比較・検討しその有用性を示した。

5. 2節 実験方法

5-2-1. 基材およびFRMの調製方法

強化用繊維にはAVCO社製の B_4C が被覆されたボロン繊維(以下、B- B_4C 繊維と略記する)を用いた。この繊維は従来のボロン繊維に比べ、アルミニウムなどのマトリックス金属との反応を防止するために表面に $7\mu m$ 程度の B_4C が被覆されているのが特徴的である。マトリックス金属としては厚さ0.6mmの1060加工用アルミニウム($Al > 99.6\%$)を用いた。アルミニウムの特性値を表5-1に示す。

ボロン繊維強化アルミニウム複合材(以下、B- B_4C/Al 複合材と記す)の調製はホットプレス装置(石川島播磨重工業製、P20V SR16/20、最大荷重20ton)によって行った。調製条件は所定の温度で加圧力を49MPa、加圧時間30minとし、加圧後 N_2 ガス雰囲気中で炉冷して所要の複合材を得た。このとき複合材の強度特性に及ぼす調製温度の影響を調べるために、温度を $500^\circ C$ 、 $525^\circ C$ 、 $550^\circ C$ 、 $575^\circ C$ 、 $600^\circ C$ および $625^\circ C$ に変化させた。またこの結果をふまえて適度な調製温度を選択し、複合材の強度特性に及ぼす寸法効果を調べた。試験片寸法は図5-1に示すように、構成繊維の本数(N)およびゲージ長さ(L)がそれぞれ(a) $N=10$ および $L=10mm$ 、(b) $N=10$ および $L=30mm$ 、(c) $N=30$ および $L=30mm$ の3種類とし、調製温度の影響を調べるときは試験片(c)(ただし、繊維数は25本)を、寸法効果を調べるときはすべての試験片を対象にして試験を行なった。なお、これらの試験片は、繊維体積

表5-1. 1060-O アルミニウム
の特性値

Tensile strength	68.6 MPa
Shear strength	49.0 MPa
Elastic modulus	68.6 GPa
Specific gravity	2.70

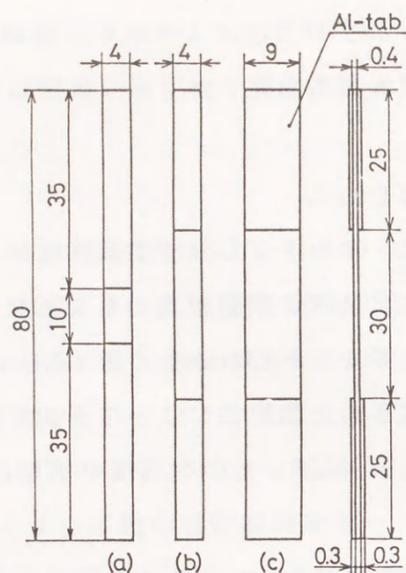


図5-1. 引張試験片の形状
(a)N=10, L=10mm (b)N=10, L=30mm
(c)N=30, L=30mm

率がおおよそ10~15%になるように加工されている。

複合材の引張試験にはインストロン型試験機（島津オートグラフ、IS-5000）を用い、試験速度1mm/minで行なった。また単繊維試験法によるワイブル母数の推定も併せて行なうため、一部の複合材については10%NaOH水溶液によって繊維を抽出し、ゲージ長さ30mm、試験速度1mm/minの条件で引張試験した。

5-2-2. AE測定法

前章の手法によってワイブル母数を推定するため、AE法を用いて複合材内の繊維破断を検出した。用いた計測系のブロック線図を図5-2に示す。B-B₄C繊維はその破断時に可聴音を発するため、振幅特性によって十分にその破壊を確認できると考えられる⁽⁵⁻¹⁾。そこで本研究の計測系では、共振型センサー（NF社製、AE-901U型、140kHz共振周波数）一つを使用したAE信号の振幅値のみを測定対象にして事象計数する方法をとった。このとき、ディスクリミネータから出力される包絡線検波信号の振幅値を対象にし、総合利得20dBとして破断音の検出を試みた。予備実験の結果、繊維破断によって生じるAE信号は、AEカウンター（NF社製、モ

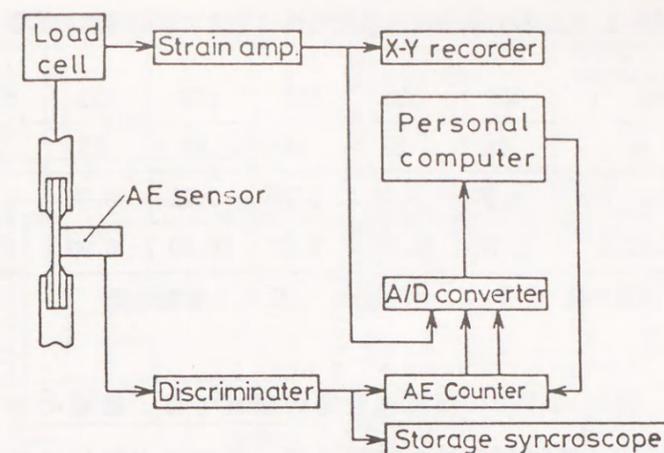


図5-2. AE計測系の概略図

デル-505)のしきい値を50mVに設定することによって十分に検出できることが確かめられた。カウンターで得られた信号はロードセルからの出力信号とともに、A/D変換器を内蔵したデータ収集装置（日本電気三栄製、データ・アクイジションコントローラ、7V14形）に取込んだ。

5. 3 節 結果および考察

5-3-1. B-B₄C/Al複合材の引張試験結果と破面観察

本研究では、複合材の破断時に繊維が負担していた平均応力 σ_f で複合材の強さを表わす。このとき平均応力 σ_f は次式に示す複合則によって見積ることができる。

$$\sigma_f = \frac{\sigma_{cu} - \sigma_m^* (1 - Vf)}{Vf} \quad (1)$$

ここで、 σ_{cu} ：複合材の引張強さ、 σ_m^* ：複合材破壊時にマトリックスが受持つ応力を表わす。ここでは $\sigma_m^* = 68.6\text{MPa}$ とした。

表5-2に調製温度の変化にともなうB-B₄C/Al複合材の引張試験結果を示す。これから複合材は温度の上昇とともに徐々に強度の平均値が増加していることがわかる。一方、強度の変動係数は試験本数が少ないこともあり、ばらつきが大きく単調的变化はみられないようである。図5-3にB-B₄C/Al複合材の代表的なマクロ

表5-2. B₄C-B/Al複合材の強度特性に及ぼす調製温度の影響

Hot press temp. °C	500	525	550	575	600	625
n	18	20	16	19	15	18
Ave. GPa	3.16	3.19	3.26	3.22	3.36	3.44
C.V. %	6.78	10.63	7.97	10.39	6.92	8.36

n: 試験本数 Ave.: 平均強度 C.V.: 変動係数

破面写真を示す。図(a)の500°C調製複合材の破面では、繊維の激しい引抜けがみられる。図(b)の550°C調製複合材の破面では、繊維の引抜けはみられないもの、おうとつの激しい破面を有している。一方、図(c)の600°C調製複合材は非常に平滑的な破面を有していることが特徴的である。図5-4に破面のSEM写真を示す。これから調製温度が500°C(図(a))のとき、繊維-マトリックス界面および接合面

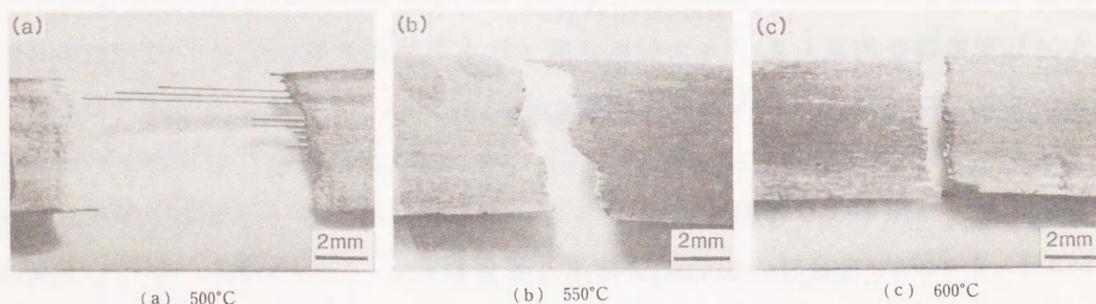


図5-3. 500°C、550°Cおよび600°Cで調製されたB-B₄C/Al複合材の巨視的破面

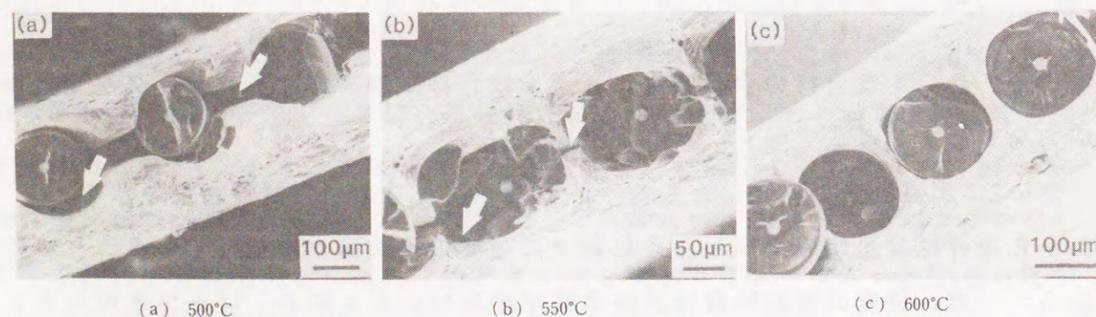


図5-4. 500°C、550°Cおよび600°Cで調製されたB-B₄C/Al複合材破面のSEM観察

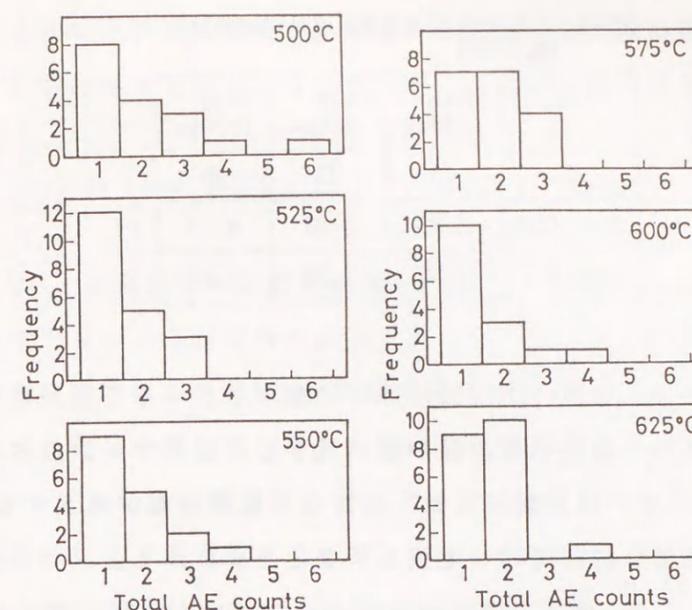


図5-5. 各調製温度における複合材破壊までの繊維の累積破断数

の接着性は、図中矢印で示すように不十分であることがわかる。温度が550°C(図(b))に上昇すると、繊維-マトリックス界面およびマトリックス接合面の接着不良は、矢印のようにいくぶん改善されていることがわかる。さらに600°C(図(c))になると、それらは良好に接着していることがわかる。したがって、調製温度の増加にともない接着性が改善されるため、繊維間の荷重伝達能が程良く発揮され強度は徐々に増加したと考えられる。

図5-5に複合材が破壊に至るまでにカウントされた破断繊維の累積数をヒストグラムにして示す。これから、どの調製温度においても繊維が1本あるいは2本破断することによって、多くの複合材の破壊が生じていることがわかる。また、温度の低下とともに繊維破断数は若干増加の傾向にあることがわかる。これは繊維-マトリックス界面の接着性が良くないために、繊維破断による応力集中が緩和されて生じた結果と考えられる。

表5-3にB-B₄C/Al複合材の強度特性に及ぼす試験片の寸法効果について示す。この場合の調製条件は、前述の結果をふまえ調製温度600°Cを採用した。これか

表5-3. 寸法効果によるB₄C-B/Al複合材の強度特性

Size	N=10 L=10mm	N=10 L=30mm	N=30 L=30mm
n	35	32	36
Ave. GPa	3.59	3.36	3.17
C.V. %	7.56	7.30	7.69

ら寸法の増加とともに、強度の平均値は徐々に低下していることがわかる。これは繊維の本数が増えると繊維強度の最小値が低下し、またゲージ長さが増大すると体積効果⁽⁵⁻²⁾（あるいは表面積効果）によって繊維強度が低下するためと考えられる。一方、変動係数はほぼ一定値を示すことがわかる。

図5-6に寸法効果による繊維の累積破断数をヒストグラムにして示す。これから構成繊維数が10本から30本に増加すると累積破断数は増加するにもかかわらず、ゲージ長さが10mmから30mmに増加してもさほど変化はみられないことがわかる。この理由は、構成繊維数の増加にともなって破断繊維の荷重分担能が増加し、その間に他の箇所で繊維破断が生じやすくなったと考えられる。もっとも構成繊維が多くなると、上述のように繊維強度の最小値が低下するので、複合材の強度の絶対値が増加することはない。

5-3-2. ワイブル母数の推定結果

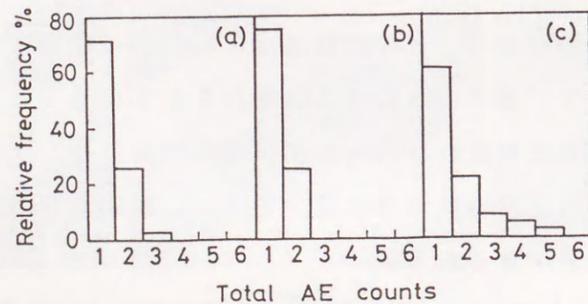


図5-6. 各寸法における複合材破壊までの繊維の累積破断数 (a)N=10, L=10mm (b)N=10, L=30mm (c)N=30, L=30mm

前章のシミュレーション結果を参照にすると、本研究で対象となるシングルレットの総数はおおむね1である。したがって、繊維破断応力は次式によって換算できる。

$$\sigma^{(1)} = \frac{\sigma_{\sigma_0}^{(1)} - \sigma_m^{(1)} * (1 - Vf)}{Vf} \quad (2)$$

ここで、 $\sigma_{\sigma_0}^{(1)}$: 最弱繊維の破断時に複合材の受持つ公称応力、 $\sigma_m^{(1)*}$: 最弱繊維の破断時にマトリックスが受持つ応力である。本研究では最弱繊維の破壊が複合材の荷重-伸び線図におけるStage II領域で生じていることが認められたので、マトリックスを弾完全塑性体とみなし、前回同様に $\sigma_m^{(1)*} = 68.6 \text{MPa}$ とした。

表5-4にワイブル母数の繊維破断検出法による推定値および抽出したB-B₄C繊維の単繊維試験法による推定値をそれぞれ示す。なおここでは推定値の変動⁽⁵⁻³⁾を考慮し、本数が30本以上の寸法効果の結果を解析の対象にする。表には平均値および変動係数も併せて示す。これから繊維破断検出法によって、形状母数11~14、尺度母数4.6~4.8(GPa)が得られた。これらの値は単繊維試験法による推定値と比べて、形状母数で若干小さく尺度母数で大きめな値として推定されていることがわかる。これは繊維破断検出法による推定値が、単一ワイブル分布を使ったN本の標本における低強度側の順序統計量の分布（ここでは第1番め）から全体の分布を外そうして得られたため、形状母数はばらつきの大いであろう最小値の分布によって影響が及ぼされ、尺度母数はそれによって大きく見積もられた

表5-4. 単繊維試験法および繊維破断検出法によるワイブル母数の推定値

Test method & Size	Mono-filament test L=30mm	Fiber-breaking detected		
		N=10 L=10mm	N=10 L=30mm	N=30 L=30mm
n	38	35	32	36
m	16.30	12.28	13.07	14.58
σ_0	3.97	4.41	4.12	4.03
Ave. GPa	3.84	4.23	3.96	3.89
C.V. %	7.36	9.68	8.49	7.66

と考えられる。したがって、繊維破断検出法によってマトリックス内の繊維強度分布そのものを推定するには、推定の対象となる強度データの範囲のちがいのために、単繊維試験法とはいくらか異なった値が生じると考えられる。

ところで、表5-3および表5-4を比較し複合材料における強化効果に注目すると、強度の平均値は複合化によって明らかに低下することがわかる。これは前述したように、複合材の破壊が繊維の低強度側の特性に支配されているからである。またこのことは、B-B₄C/Al複合材の強度予測を複合則で行なうことの困難性を示すものでもある。一方、繊維破断検出法によるワイブル母数によると、複合化によって変動係数は小さくなる傾向にあることがわかる。これは、2番め以降の繊維破断が原因で破壊した試験片もいくつか存在するため、強化材のばらつきに比べ複合材のばらつきが緩和されたものと考えられる^{*1}。

5. 4 節 まとめ

ホットプレス法によってボロン繊維強化Al複合材料を調製し、複合材の強度特性に及ぼす調製温度(500°C~625°C)の影響について調査した。また繊維本数(10本・30本)およびゲージ長さ(10mm・30mm)の異なった3種類の試験片によって複合材の寸法効果について検討した。さらに、AE法によって繊維破断の検出を試み、前章で示した推定法によってワイブル母数を推定した結果、次のことがわかった。

(1)調製温度の上昇にともない複合材の強度の平均値は徐々に増加した。また破面観察から、調製温度が上昇すると繊維-マトリックス界面およびマトリックス間の接合面の接着性が改善されることがわかった。すなわち、接着性の改善によって繊維間の荷重伝達能が向上するため、強度は増加すると考えられた。

(2)繊維数およびゲージ長さの増加によって複合材の平均強度は低下した。これはゲージ長さが増加すると繊維の体積効果(あるいは表面積効果)が現われる

*1. 2母数ワイブル分布における1番めの順序統計量の分布は、母分布と同じばらつきの度合いを示すのに対し、2番め以降の分布はその度合いが小さくなる。

だけでなく、本数の増加によって最小値の絶対値が小さくなることが低下の原因と考えられた。

(3)繊維破断検出法によって推定されるワイブル母数は、単繊維引張試験によるものに比べ、どの種の試験片においても形状母数でいくらか小さく尺度母数で若干大きめの値として算出されることがわかった。これはこの手法が低強度側の順序統計量の分布から全体を外そうする方法であるため、形状母数はばらつきの大きいであろう低強度側の分布に依存し、それによって尺度母数は大きく見積もられると考えられた。

6.1節 はじめに

複合材料の強度は一般に強化繊維の強度特性に多大な影響を受ける。この影響を評価する基準として、いわゆる複合則が第一近似則として広範に使われているが、前章で示したようにセラミック繊維はその強度のばらつきのため、平均値によって扱われる複合則では説明できないことがわかった。緒論でも触れたように、一方向強化複合材料の強度の分布に関する扱いは、これまで確率論的手法⁽⁶⁻¹⁾あるいは力学的手法⁽⁶⁻²⁾を用いた理論的観点から明らかにされてきた。しかしながら、このような扱いを実験と対比して検討した報告はこれまでにFRPを対象にしたものが主流であり⁽⁶⁻³⁾、FRMに対してこの種の適用性を試みた報告は非常に少ないのが現状である。

そこで本章では、まず確率論的手法によってFRMの強度分布特性が評価できるかどうかを明らかにすることを目的とし、前章で得られたボロン繊維強化アルミニウム複合材の試験結果を再帰法⁽⁶⁻⁴⁾⁽⁶⁻⁵⁾(Recursion Analysis Technique)によって検討したものである。

6.2節 解析方法

6-2-1. 再帰法とFRMの具備すべき前提

本章では、HarlowとPhoenixによって提案された再帰法を用い、FRMの強度分布評価を行う。一方向強化複合材の微視強度論的扱いは、Rosen⁽⁶⁻⁶⁾、Zweben⁽⁶⁻⁷⁾、ScopとArgon⁽⁶⁻⁸⁾⁽⁶⁻⁹⁾およびZwebenとRosen⁽⁶⁻¹⁰⁾らによって展開されてきたが、再帰法ではplet(破断繊維がいく本か連鎖した状態)の数が一般化されたところに特徴を有する。再帰法を用いるに当たり、第4章でその一部を紹介したように、FRMが以下の前提を満足するものと仮定する。

(1)複合材内の強化繊維は無効長さの強度を発揮し、Rosenモデル⁽⁶⁻⁶⁾に従った配列をする。

(2)破断した強化繊維の隣接繊維へ及ぼす応力集中係数は最近接の繊維のみを

対象とし、無効長さ全域にわたって同じ大きさで働く。

(3)複合材内でk-pletが生じたときに複合材は破壊する。

HarlowとPhoenixは再帰的解析手法(付録参照、付録では仮定(2)を前提とする)によって、負荷応力 σ が与えられたときに無効長さをもつN本の繊維要素から成る複合材(以下、要素複合体と記す)内でi-pletが生成し得ない確率 $Q_N^{(i)}$ に関する再帰方程式を次のように導いた。

$$\{Q_{N+1}^{(i)}\} = [Q^{(i)}] \{Q_N^{(i)}\} \quad (1)$$

ここで、 $Q^{(i)}$:再帰行列、 $\{Q_j^{(i)}\}$:j本の繊維から成る要素複合体内でi-pletが生成し得ない確率の列ベクトル、 $\{Q_1^{(i)}\}$:初期条件の列ベクトルで次のように与えられる。

$$\{Q_1^{(i)}\}^T = [1, \dots, 1] \quad (2)$$

$\{Q_{N+1}^{(i)}\}$ の第1成分は $Q_N^{(i)}$ に等しいので、 $Q_N^{(i)}$ を式(1)(2)から数値的に算出することによって、要素複合体内でi-pletが生成する確率 $G_N^{(i)}$ は次のように表わされる。

$$G_N^{(i)} = 1 - Q_N^{(i)} \quad (3)$$

仮定(1)よりRosenモデルを想定しているので、長さ方向における各要素複合体は互いに独立である。したがって、複合材内でi-pletが生成する確率 $H_{MN}^{(i)}$ はM個の要素複合体から成る直列モデルの最小値分布に相当し、次式のように与えられる。

$$H_{MN}^{(i)} = 1 - \{1 - G_N^{(i)}\}^M \quad (4)$$

式(4)は負荷応力 σ の関数であり、それゆえ累積分布曲線を導くことができる。なお本研究では、pletの臨界数kを与える累積分布曲線が(k+1)-pletの累積分布曲線と片側信頼率99.5%の範囲で一致するときに臨界値として用いた。また、次式によって平均強度 μ および変動係数CVは数値的に求めることができる。

$$\mu = \int_0^\infty \{1 - H_{MN}^{(i)}(\sigma)\} d\sigma \quad (5)$$

$$CV = \sqrt{(2 \int_0^\infty \sigma \{1 - H_{MN}^{(i)}(\sigma)\} d\sigma - \mu^2) / \mu} \quad (6)$$

6-2-2. 繊維の強度分布と無効長さ

本研究では、第2章でも示したように繊維がその強化方向で次式の単一ワイブル分布および二重モードワイブル分布にしたがった強度特性をそれぞれ発揮するものとして議論を進める。

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \frac{L}{L_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right\} \quad (7)$$

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left\{ - \frac{L}{L_0} \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0i}} \right)^{m_i} \right\} \quad (8)$$

一方、無効長さ δ に関しては次式に示す Kelly-Tyson⁽⁶⁻¹¹⁾ の式を用いた。

$$\delta = \frac{\sigma_t d_f}{2\tau_v} \quad (9)$$

ここで、 σ_t : 繊維内の軸方向の引張応力、 d_f : 繊維直径、 τ_v : マトリックスのせん断降伏応力である。式(9)は、マトリックスが弾塑性体であり界面が良好接着しているとき、繊維強化効果を発揮する臨界繊維長さを表す数式としてしばしば使われるものである。したがって、複合材内の要素複合体の個数は $M=L/\delta$ (L : 複合材のゲージ長さ) である。ところで、式(9)における σ_t は繊維の破断応力に依存して決定される。本実験では複合材が破壊するまでの繊維の累積破断数が少ないことを考慮し、次式に示す最小値分布の平均値によって σ_t を代用した。すなわち単一ワイブル分布の場合、

$$\sigma_t = \sigma_0 N^{-1/m} \Gamma(1+1/m) \quad (10)$$

であり、二重モードワイブル分布の場合、数値計算を必要とし、

$$\sigma_t = \int_0^\infty \{1 - F^{(1)}(\sigma)\} d\sigma \quad (11)$$

となる。ここで、 $F^{(1)}(\sigma): F(\sigma)$ の最小値分布の累積分布関数を表わす。

6. 3 節 解析結果および考察

6-3-1. 実験結果と再帰法による分布曲線の比較

表6-1に再帰法によるB-B₄C/Al複合材の強度の平均値およびその変動係数を算出した結果を示す。このときワイブル母数は、前章で導かれた単一ワイブル分布による母数および第2章で得られた二重モードワイブル分布による母数をそれぞれ

れ使用した。B-B₄C繊維は、ホットプレス工程によってその強度特性にほとんど変化がないことが報告されている⁽⁶⁻¹²⁾ ので、後者の母数は供給状態で得られた値をそのまま用いた。これから強度の平均値は複合材の寸法の増加とともに徐々に低下し、強化繊維の分布関数あるいはワイブル母数の推定手法に関係なくほぼ実験結果(前章の表5-3)と同様な値が得られていることがわかる。一方、変動係数はどの場合も寸法の増加とともに減少することがわかる。実験結果において変動係数があまり変化しなかった事実を考慮すると、変動係数に関しては減少の度合いがもっともゆるやかな単繊維試験法による単一ワイブル分布を使った解が実際により近いと判断できる。

図6-1に前章で得られた実験結果のワイブルプロットおよび前章で推定されたワイブル母数によって解析された再帰法による分布曲線を示す。図には最小値曲線 $H_{MN}^{[1]}$ も併せて示す。このとき、片側99.5%の信頼率で $H_{MN}^{[2]} = H_{MN}^{[3]}$ になることが認められたので、2-pletの生起確率を強度の分布曲線とした。これからどの寸法においてもプロット点は高確率側で最小値分布 $H_{MN}^{[1]}$ と一致するにもかかわらず、全体的には直線性を示さず若干左側に膨らんだ曲線性を示すことがわかる。これは前章でも触れたように、繊維強度の最小値分布が全体の多くを支配しているにもかかわらず、2番め以降の繊維破断による破壊がいくつか生じるために分布の度合いが低確率側で少々右側に偏るためであると考えられる。図中に示すように、再帰法による分布曲線は単繊維試験法および繊維破断検出法のどちらの手

表6-1. 再帰法によるB-B₄C/Al複合材の平均強度およびその変動係数の算出

Test method & distribution of fiber	Uni-modal Weibull by Mono-filament test			Uni-modal Weibull by Fiber-breaking detected			Bi-modal Weibull by mono-filament test		
	m=16.3, $\sigma_0=3.97$, $L_0=30$ mm			m=12.3, $\sigma_0=4.41$	m=13.1, $\sigma_0=4.12$	m=14.6, $\sigma_0=4.03$	m ₁ =13.6, m ₂ =16.4, $\sigma_{01}=3.94$, $\sigma_{02}=4.67$, $L_0=50$ mm		
Size of specimen	N=10 L=10mm	N=10 L=30mm	N=30 L=30mm	N=10 L=10mm	N=10 L=30mm	N=30 L=30mm	N=10 L=10mm	N=10 L=30mm	N=30 L=30mm
Ave. GPa	3.57	3.35	3.14	3.52	3.36	3.12	3.60	3.34	3.12
C.V. %	7.47	7.16	6.53	9.01	7.81	6.63	8.41	7.68	6.64

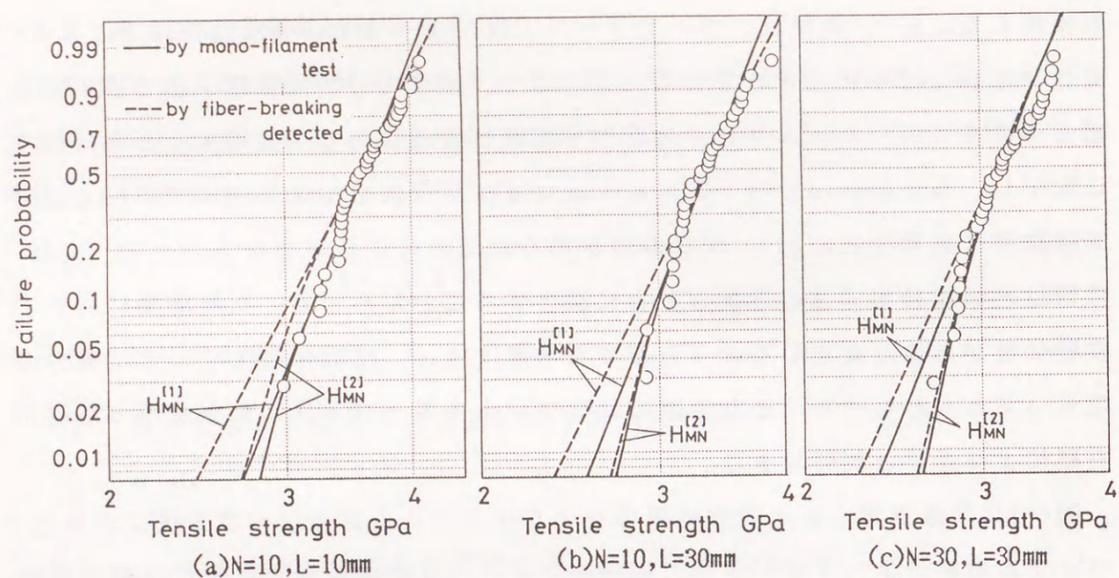


図6-1. B-B₄C/Al複合材強度のワイブルプロットと単一ワイブル分布を用いた再帰法による強度分布曲線

法のワイブル母数を使用しても、このような傾向を的確に捕えていることがわかる。すなわち高確率側で最小値分布と一致し、低確率側に移るとともに分布の傾きが大きくなるような性質をほど良く表わしていることがわかる。また繊維本数が増加すると、最小値分布曲線と強度分布曲線 $H_{MN}^{(2)}$ の一致する箇所が高確率側に片寄っていくことも大きな特徴の一つであり、前章で示したAE法による累積破断数の傾向と一致するものである。なお繊維破断検出法では繊維の形状母数がいくぶん低く推定されたため、分布曲線の傾きが若干小さく現れていることが特徴的である。

図6-2に第2章で得られたB-B₄C繊維の二重モードワイブル分布による母数を用い、同様に再帰法によって予測した強度分布曲線を示す。この場合も分布曲線は、どの寸法においても実験結果と非常に良く一致することがわかる。特にこの分布曲線は、図6-1で示した繊維破断検出法のワイブル母数を用いた分布曲線と同様に、傾きが小さく予測されていることがわかる。これは、繊維破断検出法が強化繊維の低確率側の分布を適度に表わす推定法であることを示唆するものである。

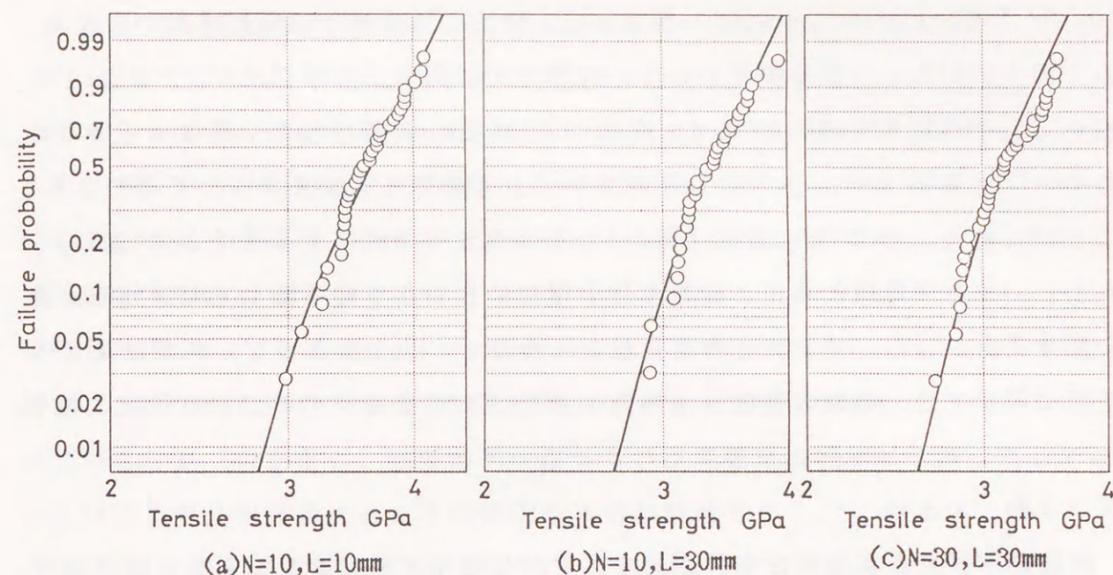


図6-2. B-B₄C/Al複合材強度のワイブルプロットと二重モードワイブル分布(L₀=50mm)を用いた再帰法による強度分布曲線

以上より、強度の平均値あるいは累積分布曲線に関して、再帰法をFRMの強度分布評価手法として採用できることが認められた。

6-3-2. 他繊維を用いた再帰法による強度分布曲線の予測

図6-1および図6-2で示したように、B-B₄C繊維を用いた再帰法では、単一および二重モードワイブル分布によって予測される分布曲線にそのちがいがさほど表われなかった。一方、HarlowとPhoenix⁽⁶⁻⁴⁾⁽⁶⁻⁵⁾は複合材の強度分布に及ぼす二重モードワイブル分布(文献には"double Weibull" distributionと記述)の影響について考察した。このとき分布状態についてはほとんど変化しないにもかかわらず、中央値は単一ワイブル分布で扱った場合より10%程度減少することを示した。彼らの用いたワイブル母数は $m_1=5$ 、 $m_2=50$ および $\sigma_{02}/\sigma_{01}=2/3$ と想定した値であり、実験的に求めた値ではない。そこで再帰解に及ぼす単一および多重モードワイブル分布の影響について検討するために、ボロン繊維(第2章・表2-2)およびSiC繊維(第2章・表2-4)で得られたワイブル母数に基づいて再帰曲線を予測した。このとき、無効長さは標準ゲージ長さの10分の1を、繊維本数として

10, 10², 10³ および 10⁴ をそれぞれ想定した。なお、再帰法では繊維本数が多くなると計算に膨大な時間を要するので、強度分布は再帰法の近似法⁽⁶⁻¹³⁾⁽⁶⁻¹⁴⁾を用いた。その結果を図6-3に示す。これから m_1 と m_2 の差が大きく異なって推定されるボロン繊維 (図(a)) では、予測される分布曲線も大きく異なって表われることがわかる。一方、SiC繊維 (図(b)) では両分布曲線による差はさほど感じられない。また両繊維ともに、繊維本数の増加にともなう確率紙上での両分布曲線の開き具合に対し、特に大きな変化はみられない。以上のように、再帰法による予測に際しては、繊維の強度分布関数の選択にも注意を要することが示唆される。

6.4節 まとめ

微視強度論による強度分布評価法をFRMに適用することをめざし、強化効果の確率的評価法である再帰法を用いて、前章で得られたボロン繊維強化アルミニ

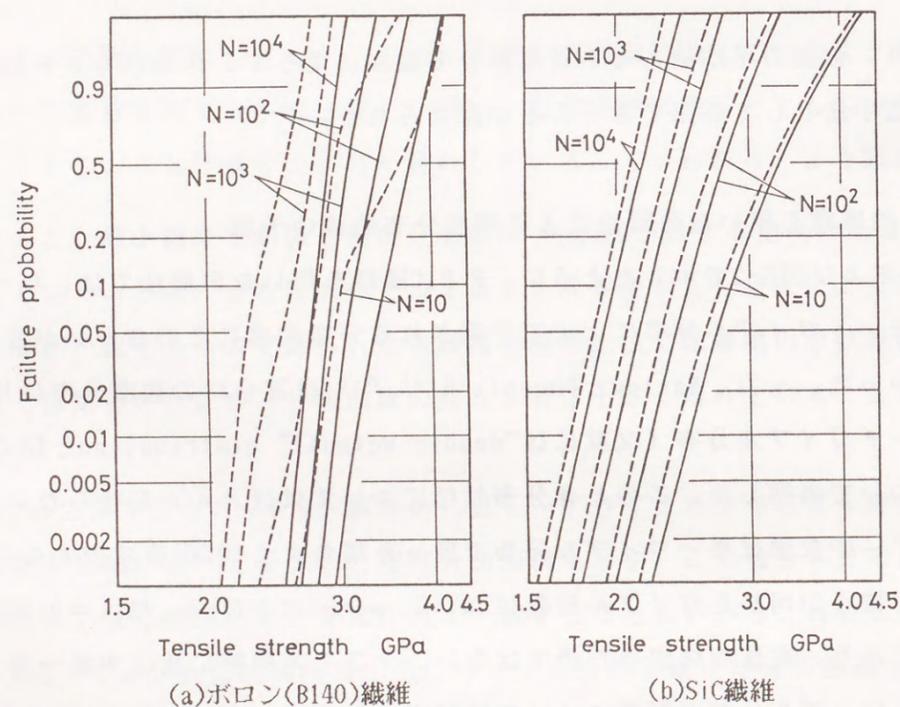


図6-3. 単一および二重モードワイブル分布を用いた再帰法による強度分布曲線の比較

ウム複合材の試験結果を定量的に評価した。以下に得られた結果を示す。

(1)前章で得られた試験法の異なる2種類のワイブル母数および二重モードワイブル分布による母数を用い、再帰法による強度の平均値とその変動係数を予測した。これから平均値は寸法の増加とともに徐々に低下し、どの母数を用いた場合も実験結果と良好に一致することが認められた。また変動係数は寸法の増加とともに低下した。

(2)同様なワイブル母数を用い、再帰法による累積分布曲線を予測した。その結果、どの母数を用いた場合も実験結果のワイブルプロットとほぼ一致することが認められた。以上より、強度の平均値あるいは累積分布曲線の予測に関しては、FRMの強度分布評価法として再帰法の適用が期待できる。

(3)再帰解に及ぼす強化繊維の単一および二重モードワイブル分布の影響を、他繊維について推定した。その結果、繊維本数とは無関係に繊維のワイブル母数に依存して両分布曲線が大きく異なる場合がみられた。

7.1節 はじめに

シアラグ理論は、Hedgepeth⁽⁷⁻¹⁾の報告以降、一方向繊維強化複合材料内の応力集中係数や応力分布を評価する手法としてしばしば利用されてきた。このとき、複合材を構成する要素の特性はすべて確定的に扱われるため、解は決定論的に与えられる。ところが、実際の複合材断面を観察する限り、たとえば繊維間隔は決して一定ではなく、繊維の断面積もある程度のばらつきを有することがわかる。Batdorf⁽⁷⁻²⁾はこのような事実に注目し、繊維間隔のばらつきによって破断繊維の隣接繊維へ及ぼす応力集中係数が確率変数になることを示唆した。さらに、Fukuda⁽⁷⁻³⁾は、シアラグ解による応力集中係数の増分が2母数ワイブル分布に従った確率変数であることをモンテカルロ法を用いて示した。しかしながら、Fukudaの手法はマトリックスが弾性体の場合にしか用いることができない。

本章では、Fukudaの手法をマトリックスが弾塑性体の場合に適用できるよう拡張することを試み、FRM内に働く応力集中係数の統計的性質について扱うことを目的とした。解析においては、マトリックスを弾線形硬化塑性体とみなし、各繊維間距離が一様分布にしたがうと仮定する。このようなモデルを用いてFRM内の応力集中係数のばらつきをシミュレートし、繊維間隔一定の場合と比較した。さらに弾性体マトリックスによって導かれる応力集中係数との違いを検討し、2母数ワイブル分布との適合性について考察を加えた。

7.2節 解析方法

7-2-1. シアラグ理論による応力分布の導出と応力集中係数

シアラグ理論では、繊維が軸力を負担しマトリックスはせん断力を受持つ。本解析では繊維を弾性体とし、破断繊維まわりのマトリックスのせん断変形が近似的に弾線形硬化塑性変形すると仮定することによって、個々の繊維の応力分布を導出する。まず破断繊維まわりのマトリックスのせん断応力 τ とせん断ひずみ γ の関係は次式のように表わすことができる⁽⁷⁻⁴⁾。

$$\begin{aligned} \tau &= G\gamma & (\tau < \tau_y) \\ \tau &= \beta G\gamma + (1-\beta)\tau_y & (\tau \geq \tau_y) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 G :マトリックスのせん断弾性係数、 β :加工硬化率を G で除した値、 τ_y :マトリックスのせん断降伏応力である。このとき、マトリックスのせん断ひずみは隣接しあった繊維の変位差を繊維間距離で除すことによって見積もる。

さて、図7-1のような座標系をとった N 本の繊維から構成される単層板を想定する。ここでは、塑性域から弾性域に移る境界点を $x=a$ とし、簡単のため左右のマトリックスとも同じ長さの塑性域を有するものとする。いま、 k 番めの繊維が静的に破断したとすると、シアラグ理論によって次式のような力の釣合い方程式が成立する。

$$\begin{aligned} EA \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{Gh}{d_1} (u_2 - u_1) &= 0 \\ EA \frac{d^2 u_2}{dx^2} - \frac{Gh}{d_1} (u_2 - u_1) + \frac{Gh}{d_2} (u_3 - u_2) &= 0 \\ \dots\dots \\ EA \frac{d^2 u_{k-1}}{dx^2} - \frac{Gh}{d_{k-2}} (u_{k-1} - u_{k-2}) + \left\{ \frac{\beta Gh}{d_{k-1}} (u_k - u_{k-1}) + h(1-\beta)\tau_y \right\} &= 0 \\ EA \frac{d^2 u_k}{dx^2} - \left\{ \frac{\beta Gh}{d_{k-1}} (u_k - u_{k-1}) + h(1-\beta)\tau_y \right\} &+ \left\{ \frac{\beta Gh}{d_k} (u_{k+1} - u_k) - h(1-\beta) \right\} = 0 \\ EA \frac{d^2 u_{k+1}}{dx^2} - \left\{ \frac{\beta Gh}{d_k} (u_{k+1} - u_k) - h(1-\beta)\tau_y \right\} + \frac{Gh}{d_{k+1}} (u_{k+2} - u_{k+1}) &= 0 \\ \dots\dots \\ EA \frac{d^2 u_N}{dx^2} - \frac{Gh}{d_{N-1}} (u_N - u_{N-1}) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、領域 $x>a$ では $\beta=1$ である。ここで、 u_1, \dots, u_N : 1番めから N 番めに配列された繊維の変位、 d_1, \dots, d_N : 各繊維間の距離、 E : 繊維の縦弾性係数、 A : 繊維の断面積、 h : 単層板の厚さである。繊維間隔が一様分布に従うと仮定すると、 d_i ($i=1, \dots, N-1$) は次式のように見積もることができる。

.....

$$v_N = C_{2N-1} \exp(\lambda_N \sqrt{a_0} x) + C_{2N} \exp(-\lambda_N \sqrt{a_0} x)$$

ここで、 C_1, \dots, C_{2N} : 未知定数である。一方、式(3)の特殊解としては、 $b_0 \{ b \}$ が定数項なので、 $\{ u \} = \{ r \}$ (ただし、 $\{ r \}^T = [r_1 \dots r_N]$ であり、それぞれの成分は実数を示す) とおくと、 $\{ \dot{u} \} = \{ 0 \}$ となる。したがって、次式を満足する $\{ r \}$ を求めればよい。

$$a_0 [A] \{ r \} = -b_0 \{ b \} \quad (9)$$

このとき、行列 $[A]$ は正則でなく、その階数(rank)は常に $\text{rank}[A] = N-1$ を満足することがわかったので、式(9)の解は任意定数を1つ含んだ次式のような一般形になることが推測される。

$$\{ r \} = c \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{b_0}{\beta a_0} \begin{pmatrix} d_{k-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{k-1} \\ 0 \\ d_k \\ \vdots \\ \vdots \\ d_k \end{pmatrix} \quad (c: \text{任意定数}) \quad (10)$$

式(8)と式(10)を加え合せたものが、次式に示す式(2)の一般解に相当する。

$$\begin{aligned} \{ u \} &= [Q] \{ v \} + \{ r \} \\ &= \{ q_1 \} (C_1 x + C_2) + \sum_{j=2}^N \{ q_j \} \{ C_{2j-1} \exp(\lambda_j \sqrt{a_0} x) + C_{2j} \exp(-\lambda_j \sqrt{a_0} x) \} \\ &\quad + \{ r \} \dots \dots (11) \end{aligned}$$

式(11)の右辺における定数項 $\{ q_1 \} C_2$ は、式(10)の任意定数を含むことができるので、実際の計算では $c=0$ とみなしてもさしつかえない。なお領域 $x > a$ では定数項をもたないので、 $\{ r \} = \{ 0 \}$ である。以上より、個々の繊維の応力分布 $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ は次式のようになる。

$$\{ \sigma \} = E \{ \dot{u} \} \quad (12)$$

ただし、

$$\{ \dot{u} \} = \{ q_1 \} C_1 + \sum_{j=2}^N \{ q_j \} \lambda_j \sqrt{a_0} \{ C_{2j-1} \exp(\lambda_j \sqrt{a_0} x) - C_{2j} \exp(-\lambda_j \sqrt{a_0} x) \} \quad \dots \dots (13)$$

である。いま負荷応力(無限遠で繊維に作用する一様応力)を σ_f とすると、 $x=0$ で各繊維に最も応力が集中するので、各繊維に働く応力集中係数 K_1, \dots, K_N は次式のように与えられる。

$$K_i = \frac{1}{\sigma_f} \{ \sigma(0) \} \quad (i=1, \dots, N, i \neq k) \quad (14)$$

なお本研究では、行列 $[A]$ の固有値および正規固有ベクトルはJacobi法によって数値的に求めた。

7-2-2. 境界条件と未知定数の計算方法

領域 $0 \leq x \leq a$ および $x > a$ における変位に添字(p)および(e)を付記し、以下では両者を区別して記す。いま破断点におけるひずみは0であり、未破断繊維の変位も0であるので、境界条件として、

$$x=0 \text{ のとき、} \dot{u}_k^{(p)} = 0 \text{ および } u_i^{(p)} = 0 \quad (i=1, \dots, N, i \neq k) \quad (15)$$

である。また境界点 $x=a$ においては変位およびひずみは連続である。すなわち、

$$x=a \text{ のとき、} u_i^{(p)} = u_i^{(e)} \quad (i=1, \dots, N) \quad (16)$$

$$\dot{u}_i^{(p)} = \dot{u}_i^{(e)}$$

である。さらに、

$$x=\infty \text{ のとき、} \sigma_i^{(e)} = \sigma_f \quad (i=1, \dots, N) \quad (17)$$

である。この条件では、式(12)よりいくつかの未知定数が次のように簡単に見積もることができる。

$$\{ q_1 \} C_1^{(e)} = \sigma_f / E \quad (18)$$

$$C_3^{(e)} = \dots = C_{2j-1}^{(e)} = \dots = C_{2N-1}^{(e)} = 0$$

境界点aが定めれば、未知定数 $C_1^{(p)}, C_2^{(p)}, \dots, C_{2N}^{(p)}$ および $C_2^{(e)}, C_4^{(e)}, \dots, C_{2N}^{(e)}$ は式(14)(15)より連立一次方程式の解として導くことができる。ここではガウスの消去法を用いて未知定数を求めた。さて、境界点上では破断繊維とその隣接繊維間におけるマトリックスのせん断応力はせん断降伏強さに等しい。したがって、

$$x=a \text{ のとき、 } G(u_k^{(e)} - u_{k-1}^{(e)})/d_{k-1} = \tau_y \quad (19)$$

$$G(u_k^{(e)} - u_{k+1}^{(e)})/d_k = \tau_y$$

である。ここでは反復計算^{*2}によって、上記2つの条件の平均値の近似値ごとに未知定数を求め、aを算出した。なお、本研究ではFRMにボロン繊維強化アルミニウム複合材を想定し解析を進める。表7-1に用いた材料定数を一括して示す。

7.3節 解析結果および考察

7-3-1. 繊維間隔が一定の場合の応力集中係数

表7-2に、 $N=11$ とし繊維が等間隔($d_1 = \dots = d_{10} = 0.5\text{mm}$)に配置された場合に求められた応力集中係数を示す。ここで、破断点は単層板の中央($k=6$)に設けたため、応力集中係数は左右対称である。これから、破断点に隣接した繊維($i=7$)の応力集中係数 K_7 は、負荷応力 σ_f の増大にともない減少することがわかる。この結果は、HedgepethとVan Dyke⁽⁷⁻⁵⁾やZweben⁽⁷⁻⁶⁾が示したマトリックスを弾完全塑性体とみなした解と定性的に同じ傾向を示すものである。逆に、 K_8, \dots, K_{11} は σ_f の増加とともにそれぞれ増加することが特徴的である。表より σ_f の増加とも

*2 ここではNewton-Raphson法によってaを次のように求めた。すなわち、

$$f_1(a_1) = G(u_k^{(e)} - u_{k-1}^{(e)})/d_{k-1} - \tau_y \text{ および } f_2(a_2) = G(u_k^{(e)} - u_{k+1}^{(e)})/d_k - \tau_y \text{ とおき、}$$

i番目の近似値を $a_{1(i)}$ および $a_{2(i)}$ とおくと、

$$a_{1(i+1)} = a_{1(i)} - f_1(a_{1(i)})/f_1'(a_{1(i)})$$

$$a_{2(i+1)} = a_{2(i)} - f_2(a_{2(i)})/f_2'(a_{2(i)})$$

したがって、 $a = (a_1 + a_2)/2$ である。

表7-1. 解析に用いたB/AI複合材の物性値

E GPa	A mm ²	G GPa	h mm	τ_y MPa	β
392	0.0154	25.7	0.14	49.0	0.01

E: 繊維の縦弾性係数、A: 繊維の断面積、G: マトリックスのせん断弾性係数、h: 単層板の厚さ、 τ_y : マトリックスのせん断降伏応力、 β : 加工硬化係数をGで除した値

表7-2. 繊維間隔が一定のモデルにおける破断繊維まわりの応力集中係数

σ_f GPa	Plastic zone a mm	Stress concentration factor				
		K_7	K_8	K_9	K_{10}	K_{11}
0.98	0.481	1.317	1.082	1.042	1.032	1.027
1.47	0.987	1.284	1.093	1.051	1.040	1.034
1.96	1.490	1.258	1.099	1.059	1.046	1.040
2.45	1.986	1.238	1.102	1.065	1.051	1.045
2.94	2.471	1.223	1.104	1.069	1.056	1.050
Elastic model	0	1.343	1.174	1.037	1.025	1.021

に塑性域の広がりが認められるが、このため破断点直上で応力の伝達が緩和され K_7 が低下するにもかかわらず、緩和分はそれ以外の繊維で補うために K_8, \dots, K_{11} は増加したものと考えられる。表には、Fukuda⁽⁷⁻³⁾の方法による弾性マトリックスを用いた解による応力集中係数を比較のため示す^{*3}が、 K_7 が大きな値を示すのに対し K_8, \dots, K_{11} は非常に小さいことがわかる。ところで、微視強度論では破断繊維に隣接する繊維のみを応力集中の対象にする場合が多いが、FRMでは上述したように、隣接繊維以外に働く応力集中係数もまた考慮の対象として取上げる必要性を認識する⁽⁷⁻⁷⁾。

図7-2に $\sigma_f = 1.48\text{GPa}$ および 2.94GPa における破断点近傍の繊維($i=6\sim 8$)の応力分布を弾性マトリックスを用いた解と比較して示す。これらの値はすべて σ_f で除

*3 弾性マトリックスを用いた解では、負荷応力 σ_f の値にかかわらず応力集中係数はすべて一定である。

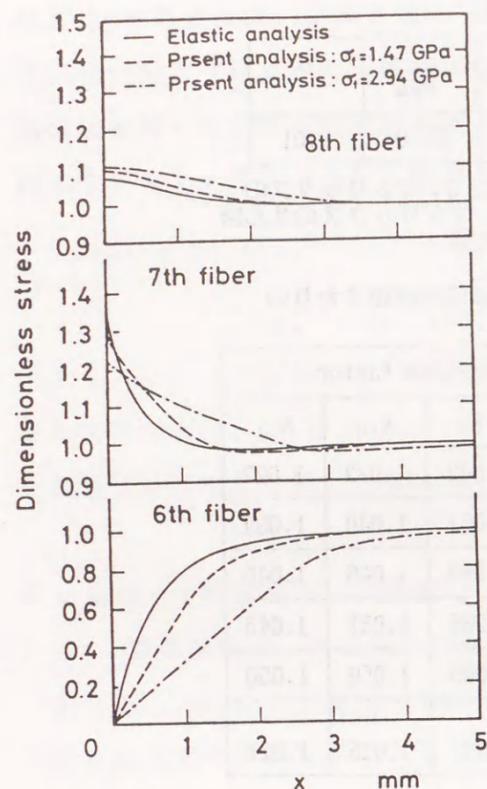


図7-2. 破断繊維まわりの応力分布

し無次元化表示したものである。これから x 方向の応力の分布は、 σ_f の増加とともに大きくなっていることがわかる。特に $\sigma_f = 2.94 \text{ GPa}$ の場合、応力集中係数の低下にもかかわらず広範囲に分布する。したがって上述した微視強度モデルを考える場合、無効長さ等の与え方にも注意が必要である。

7-3-2. 繊維間隔が一様分布にしたがう場合の応力集中係数とその統計的取扱い

本節では繊維間隔が一様分布の場合を想定し、破断繊維に隣接した繊維に作用する応力集中係数を主として解析の対象にする。図7-3にそのシミュレート結果を示す。白丸印は試行数15回の平均値を、その両端の実線域は標準偏差を示す(ただし、 K_5 および K_7 について求めているので、データ総計は30である)。また、式(3)における繊維間隔のパラメータは $\bar{d} = 0.5 \text{ mm}$ および $d_{\min} = 0.01 \text{ mm}$ とした。図中実線は繊維間隔を一定にした場合の結果であるが、これからシミュレート結果

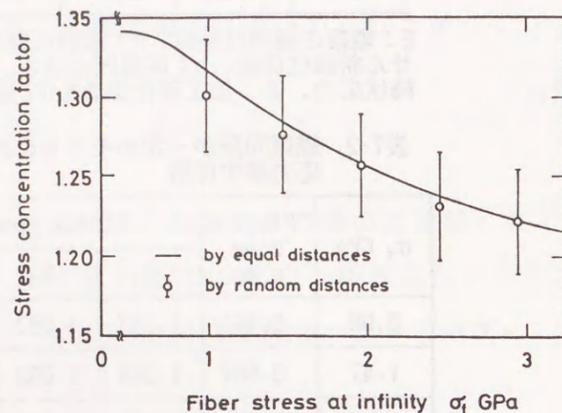


図7-3. 無限遠応力の増加にともなう応力集中係数の変化

の平均値は実線と同程度の推移を示すことがわかる。これは繊維間隔を確率変数とみなしたにもかかわらず、応力集中係数は平均的には変化しないことを示すものである。また標準偏差は負荷応力 σ_f の値と無関係にほぼ同じ値になることが認められる。

Fukuda⁽⁷⁻³⁾は弾性マトリックスによるシアラグ解を用いて繊維間隔を一様分布に仮定したモデル(以下、弾性モデルと略記する)を用い、応力集中係数の増分 $(K_i - 1)$ が2母数ワイブル分布に従うことを示した。そこで本モデルで得られた応力集中係数の統計的性質を評価するために、 $\sigma_f = 0.98 \text{ GPa}$, 1.96 GPa および 2.94 GPa における応力集中係数の増分をワイブルプロットし図7-4に示す。これからプロット点はワイブル確率紙上でほぼ直線性を示すことがわかる。図には弾性モデルの結果も併せて示す。これから本結果は弾性モデルと比較し、そのばらつきが非常に小さく押えられていることが特徴的である。これは本モデルでは塑性域を設定したために、応力集中係数は繊維間隔のばらつきと線形的に対応せずその度合いが抑制されたためと考えられる。福田⁽⁷⁻³⁾はさらにBatdorfら⁽⁷⁻²⁾の概念に基づき、複合材の微視強度モデルに及ぼす応力集中係数のばらつきの影響について考察した。このときワイブル形状母数に依存してある程度の強度低下がもたらされることを指摘したが、本モデルによる応力集中係数のばらつき程度では繊維強度のばらつきに隠れ、その影響はきわめて小さくなると考えられる。

なお本研究では破断繊維が1本の場合を扱ったが、破断繊維が r 本連鎖する場合

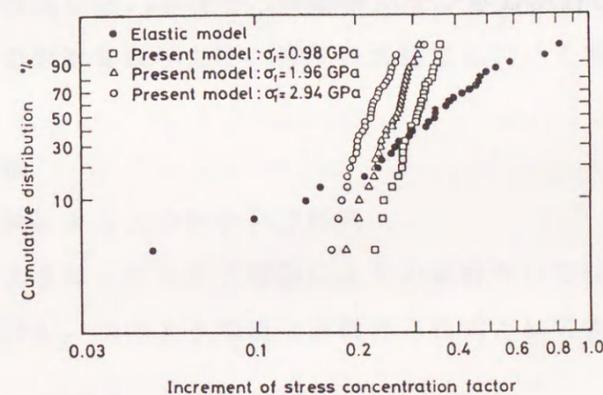


図7-4. 応力集中係数の増分のワイブルプロット

合においても行列[A]の成分を多少変更することで解の導出が可能である。しかしながら $r=3$ 程度になると、破断繊維まわり以外のマトリックスにおいても塑性域として扱わなければならない領域がせん断応力と τ_c の比較から認められた。破断繊維まわり以外に塑性域を設ける場合の解の導出方法については今後の課題と考えている。

7. 4節 まとめ

マトリックスのせん断変形が近似的に弾線形硬化塑性変形することを想定し、シアラグ理論を用いてFRM内の応力集中係数を導出した。さらに、繊維間隔のばらつきを考慮したモデルによって応力集中係数を統計的に扱った結果、以下のことがわかった。

- (1) 繊維間隔を一定にしたとき、破断繊維に隣接した繊維に作用する応力集中係数は負荷応力の増加とともに減少した。また繊維軸方向における破断繊維まわりの応力の乱れは負荷応力の増加とともに大きくなる。
- (2) 繊維間隔のばらつきを一様乱数によってシミュレートした結果、応力集中係数の平均値は繊維間隔が一定の場合とほぼ同じ値を与える。またその標準偏差は負荷応力の値にかかわらずほとんど一定であった。
- (3) 応力集中係数の増分はワイブル確率紙上で直線性を示した。この傾向はマトリックスのせん断変形を弾性変形として扱ったモデルと同様な性質を示すものであるが、ばらつきの程度は本モデルが極めて小さい。

第8章. シアラグ理論によるFRMの強度シミュレーションとその評価

8. 1節 はじめに

繊維強化材の破壊過程は一般にランダムな繊維破壊や界面割れによって最終破断に至る確率事象であるため、微視強度論以外にモンテカルロ法によるシミュレーション技法によってその引張強度が明らかされてきた。 $0h^{(8-1)}$ はシアラグ理論による力の釣合い方程式(以下、シアラグ方程式と記す)を差分近似し、強制変位(境界条件)を適宜与えることによって一方向繊維強化材の受持つ最大応力を求める手法を提案した。また金原ら⁽⁸⁻²⁾はマトリックス破壊の条件を導入し、 $0h$ の手法を改良した。 $0h$ および金原らの手法はFRPを想定したマトリックスを弾性体とみなした場合の解法である。また強制変位に繰返し増分法を採用しているため、変位増分の与え方次第では計算結果が異なって表われることが憶測される。一方、落合ら⁽⁸⁻³⁾はマトリックスを弾線形硬化塑性体と仮定し、シアラグ方程式に対する厳密解を求めFRMの引張強さや破壊過程のシミュレートを試みた。この方法は破断繊維の一つおいた隣の繊維に働く応力を無限遠で作用する一様応力と等価とみなすことによって平衡条件を限定した近似的解法である。

本章では、FRMの引張強度を力学的に導出することを目的とし、シアラグ理論を用いた従来のシミュレーション手法を仮想変位法⁽⁸⁻⁴⁾に立脚して改良した。これから複合材の強度を求め、第5章で得られたB/AI複合材の試験結果と比較し本手法の有効性を検討した。さらに、強度の分布に及ぼすFRMの構成因子および構成の不確かさの影響を取り上げ、強度の信頼性について考察を加えた。

8. 2節 解析方法

8-2-1. シアラグ理論による力の釣合い方程式

前章でも示したように、シアラグ理論による力の釣合い方程式は、N本の繊維から成る単層板に対し、次のような連立常微分方程式として表わすことができる。

$$EA \frac{d^2 u_1}{dx^2} + h \tau_1 = 0$$

$$EA \frac{d^2 u_i}{dx^2} + h \tau_i - h \tau_{i-1} = 0 \quad (i=2, \dots, N-1) \quad (1)$$

$$EA \frac{d^2 u_N}{dx^2} - h \tau_{N-1} = 0$$

ここで、 u_1, \dots, u_N : x軸方向の変位、 E : 繊維の弾性率、 A : 繊維の弾面積、 h : 板厚、 $\tau_i (i=1, \dots, N-1)$: i 番めおよび $(i+1)$ 番めの繊維間に働くマトリックスのせん断応力を表わす。ただし、繊維は弾性体であり破断による動的挙動は無視できるものとする。一方、マトリックスを弾線形硬化塑性体と仮定すると、式(1)中の τ_i はマトリックスの変形・破断状態に依存して次のように書き下すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \text{マトリックスが弾性変形状態のとき、} \quad \tau_i &= G(u_{i+1} - u_i)/d_i \\ \text{マトリックスが塑性変形状態のとき、} \quad \tau_i &= \beta G(u_{i+1} - u_i)/d_i + (1 - \beta)\tau_v \\ \text{マトリックスが破断状態にあるとき、} \quad \tau_i &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

ここで、 G : マトリックスのせん断弾性係数、 β : 加工硬化率を G で除した値、 τ_v : マトリックスのせん断降伏応力、 d_i : i 番めと $(i+1)$ 番めの繊維の間隔である。前章では破断繊維に隣接したマトリックスだけが塑性変形すると仮定したのに対し、式(1)(2)のように記すとマトリックスの状態に応じて方程式は異なる形で与えることができる。

8-2-2. シアラグ方程式の差分近似と数値解法

上述した連立常微分方程式は、第7章で示したように解の誘導が可能であるが、1) 繊維破断数の増加とともに境界条件が複雑となり、未知係数を求めるための連立方程式を解くのに多大な時間を要する、2) マトリックスの塑性域を決定するとき反復法を用いなければならない、収束に時間を要する、などの理由から本章では $0h^{(B-1)}$ が提案した差分法によって解を求める。すなわち、差分の格子点間を1つの要素とみなした図8-1に示すような要素配列モデルを採用する。ここで、繊維要素 $F(i, j)$ は節点 $(i, j-1)$ と (i, j) 内に配置され、マトリックス要素 $M(i, j)$ は節点 (i, j) と $(i+1, j)$ 間に置かれる。いま、節点 (i, j) における変位成分を $u_{i,j}$ と記すと、2階の微分形は次式のような差分形に近似できる。

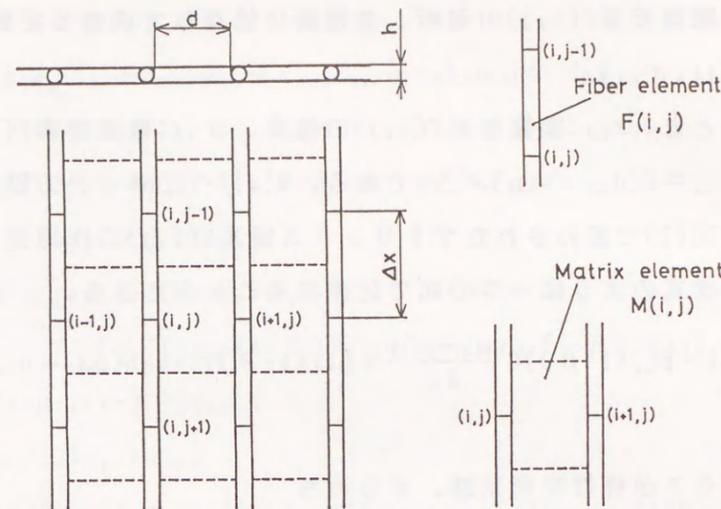


図8-1. シミュレーションモデル

$$\frac{d^2 u_j}{dx^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} \quad (j=1, \dots, k) \quad (3)$$

ここで、 Δx : 差分の格子点間隔、すなわち繊維要素長さを表わす。一方、繊維要素の破断は要素内ひずみを0とみなして表わす。すなわち、要素 $F(i, j)$ 内に節点 $(i, j-1/2)$ を仮想的に設定すると、その変位成分を $u_{i,j/2}$ と記すことによって、

$$u_{i,j/2} = u_{i,j} \quad (4)$$

と書くことができる。このとき繊維要素長さは $\Delta x/2$ なので、 $u_{i,j}$ に関する差分形は次のように表わすことができる。

$$\frac{d^2 u_i}{dx^2} = \frac{4}{3\Delta x} \left(\frac{u_{i,j/2} - u_{i,j}}{\Delta x/2} - \frac{u_{i,j} - u_{i,j+1}}{\Delta x} \right)$$

式(4)より、

$$\frac{d^2 u_i}{dx^2} = \frac{4}{3(\Delta x)^2} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) \quad (5)$$

となる。ここでこの2階の微分形を、変位成分 $u_{i,j}$ に対して次のように1つの式で記述することを考える。

$$\frac{d^2 u_i}{dx^2} = \frac{4\{o_{i,j}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + o_{i,j+1}(u_{i,j+1} - u_{i,j})\}}{(2 + o_{i,j} + o_{i,j+1})(\Delta x)^2} \quad (6)$$

ここで、 $o_{i,j}$:繊維要素F(i,j)の破断、未破断に依存して決まる定数で、

$$o_{i,j} = H\{X_{i,j}, \sigma_{i,j}\} \quad (7)$$

である。このとき、 $X_{i,j}$:繊維要素F(i,j)の強度、 $\sigma_{i,j}$:繊維要素F(i,j)に作用する応力で、 $\sigma_{i,j} = E(u_{i,j} - u_{i,H}) / \Delta x$ である。 $H\{,\}$:ヘビサイドの階段関数を表わす。同様に、式(2)で表わされたマトリックス要素M(i,j)に作用するせん断応力に関して、次式のように一つの式で記述することができる。

$$\tau_{i,j} = [\{1 - p_{i,j}(1 - \beta)\}G \frac{u_{H,j} - u_{i,j}}{d_i} + p_{i,j}(1 - \beta)\tau_v \cdot \text{sgn}(u_{H,j} - u_{i,j})]q_{i,j} \quad (8)$$

ただし、

マトリックスが弾性変形状態、すなわち

$$G|u_{H,j} - u_{i,j}| / d_i < \tau_v \quad \text{のとき、} \quad p_{i,j} = 0 \text{ および } q_{i,j} = 1$$

マトリックスが塑性変形状態、すなわち

$$G|u_{H,j} - u_{i,j}| / d_i \geq \tau_v \quad \text{のとき、} \quad p_{i,j} = 1 \text{ および } q_{i,j} = 1 \quad (9)$$

マトリックスが破断状態、すなわち

$$\beta G|u_{H,j} - u_{i,j}| / d_i + (1 - \beta)\tau_v \geq \tau_{\max} \quad \text{のとき、} \quad q_{i,j} = 0$$

であり、 $\text{sgn}(\cdot)$:()内为正のときに1を、負のときに-1を、0のときに0を与える。また τ_{\max} はマトリックスのせん断強さを表わす。なお以下では、 $o_{i,j}$ 、 $p_{i,j}$ および $q_{i,j}$ を状態定数と呼ぶ。この手法によると、繊維-マトリックス界面の接着力がマトリックスのせん断強さより小さいとき、 τ_{\max} を界面接着強さとみなすことによって、引張強度に及ぼす界面はく離の影響についても考慮することができる。

式(6)および(8)を式(1)に代入することによって、節点(i,j)に関する次の一次方程式を得ることができる。

$$EA \frac{4\{o_{i,j}(u_{i,H} - u_{i,j}) + o_{i,H}(u_{i,H} - u_{i,j})\}}{(2 + o_{i,j} + o_{i,H})(\Delta x)^2} + h[\{1 - p_{i,j}(1 - \beta)\}G \frac{u_{H,j} - u_{i,j}}{d_i} + p_{i,j}(1 - \beta)\tau_v \text{sgn}(u_{H,j} - u_{i,j})]q_{i,j} - h[\{1 - p_{H,j}(1 - \beta)\}G \frac{u_{i,j} - u_{H,j}}{d_{i-1}} + p_{H,j}(1 - \beta)\tau_v \text{sgn}(u_{i,j} - u_{H,j})]q_{H,j} \dots \dots (10)$$

上式は次式のように整理することができる。

$$c_{1(i,j)}u_{i,H} + c_{2(i,j)}u_{H,j} + c_{3(i,j)}u_{i,j} + c_{4(i,j)}u_{H,j} + c_{5(i,j)}u_{i,H} = C_{(i,j)} \quad (11)$$

ただし、

$$c_{1(i,j)} = 4o_{i,j} / (2 + o_{i,j} + o_{i,H})$$

$$c_{2(i,j)} = p_{i-1} \{1 - p_{H,j}(1 - \beta)\}q_{H,j}$$

$$c_{3(i,j)} = -4(o_{i,j} + o_{i,H}) / (2 + o_{i,j} + o_{i,H}) - [P_i \{1 - p_{i,j}(1 - \beta)\}q_{i,j} + P_{i-1} \{1 - p_{H,j}(1 - \beta)\}q_{H,j}] \quad (12)$$

$$c_{4(i,j)} = P_i \{1 - p_{i,j}(1 - \beta)\}q_{i,j}$$

$$c_{5(i,j)} = 4o_{i,H} / (2 + o_{i,j} + o_{i,H})$$

$$C_{(i,j)} = h(\Delta x)^2 \{- (1 - \beta)\tau_v \{p_{i,j}q_{i,j} \cdot \text{sgn}(u_{H,j} - u_{i,j}) + p_{H,j}q_{H,j} \cdot \text{sgn}(u_{i,j} - u_{H,j})\} / EA$$

$$P_i = Gh(\Delta x)^2 / EA d_i$$

である。

境界条件として、

$$\left. \begin{array}{l} u_{i,0} = 0 \\ u_{i,K} = u \end{array} \right\} \quad (i=1, \dots, N) \quad (13)$$

である。ただし、 u :強制変位を表わす。境界条件を考慮し、繊維要素の破断状態やマトリックス要素の変形・破断状態に応じて状態定数を決定することにより、式(11)は $N \times (K-1)$ 個の未知変位成分から成る連立一次方程式として記すことができる。これを行列表示すると、

$$[c] \{u\} = \{C\} \quad (14)$$

となる。ここで、

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{3(1,1)} & c_{4(1,1)} & 0 & \dots & 0 & c_{5(1,1)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & c_{1(i,j)} & 0 & \dots & 0 & c_{2(i,j)} & c_{3(i,j)} & c_{4(i,j)} & 0 & \dots & 0 & c_{5(i,j)} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & c_{1(N,K-1)} & 0 & \dots & 0 & c_{2(N,K-1)} & c_{3(N,K-1)} & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\{u\}^T = \{u_{1,1} u_{2,1} \dots u_{1,2} \dots u_{i,j} \dots u_{H,j} u_{i,j} u_{H,j} \dots u_{i,j} \dots u_{N,K-2} \dots u_{N-1,K-1} u_{N,K-1}\}$$

$$\{C\}^T = \{C_{(1,1)} \dots C_{(1,j)} \dots C_{(N,K-1)} - C_{(N,K-1)} \cdot u\}$$

である。式(14)はガウスの消去法によって数値的に解くことができる。

8-2-3. シミュレーションの手順

図8-2に本シミュレーションのフローチャートを示す。ここでは、繊維強度は単一ワイブル分布および二重モードワイブル分布に従うものとした。前者の場合、次式によってワイブル乱数を各繊維要素に振分けることができる。

$$\sigma_{i,j} = \sigma_0 \left\{ \frac{L_0}{L} \ln \left(\frac{1}{1-z} \right) \right\}^{1/m} \quad (15)$$

ここで、 $z: [0,1]$ の一様乱数である。後者に関しては、それぞれの欠陥集団ごとに次のように発生させる。

$$\sigma_{i,j}^{(1)} = \sigma_{01} \left\{ \frac{L_0}{L} \ln \left(\frac{1}{1-z} \right) \right\}^{1/m_1} \quad (16)$$

$$\sigma_{i,j}^{(2)} = \sigma_{02} \left\{ \frac{L_0}{L} \ln \left(\frac{1}{1-z} \right) \right\}^{1/m_2} \quad (17)$$

これから、 $\sigma_{i,j} = \min\{\sigma_{i,j}^{(1)}, \sigma_{i,j}^{(2)}\}$ を満足するものをワイブル乱数とした^(B-5)。次に、振分けられた要素のうち強度の最小値を示すものについて探索し、その状態定数を変更するとともに強制変位を逆算する。これを用いて変位計算を行ない、各要素の状態変化について調べる。シアラグ方程式では強制変位のいかにかわらず、各要素の状態定数を変更されない限り応力あるいはひずみは線形的に変化する。そこで次のステップでは強制変位に仮想変位を与えて変位計算した後、各要素に働く応力の増分比 R を算出しその最小倍率 R_{min} を基準にして各要素の確定応力を求める方法をとった。いま n 回めの変位計算において、増分比 R は未破断状態にある繊維要素、弾性変形状態にあるマトリックス要素および塑性変形状態にあるマトリックス要素に対し、それぞれ次式のように与えられる。

$$R = (X_{i,j} - \sigma_{i,j}^{(n-1)}) / (\sigma_{i,j}^{(n)} - \sigma_{i,j}^{(n-1)}) \dots \dots \text{未破断状態の繊維要素}$$

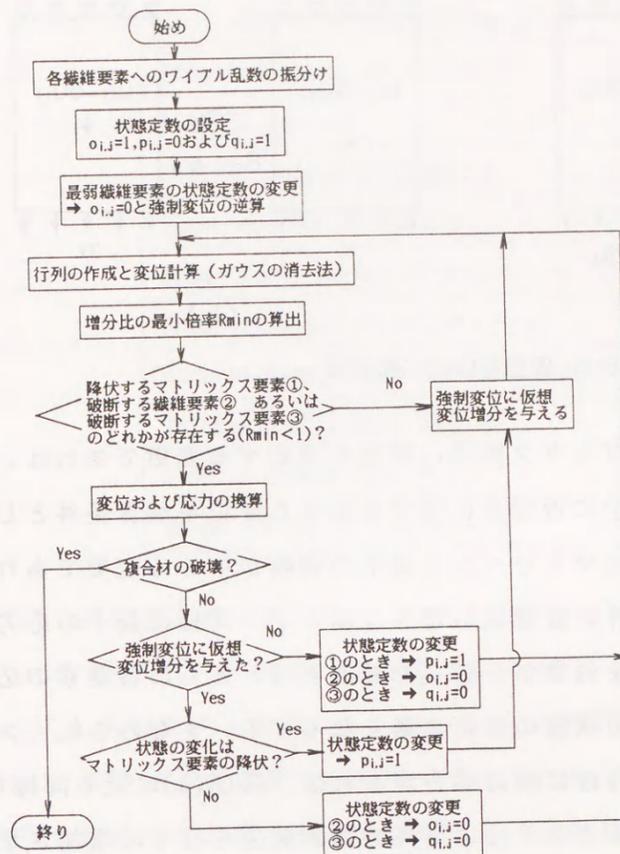


図8-2. シミュレーションのフローチャート

$$R = (\tau_{\nu} - \tau_{i,j}^{(n-1)}) / (\tau_{i,j}^{(n)} - \tau_{i,j}^{(n-1)}) \dots \dots \text{弾性変形状態のマトリックス要素}$$

$$R = (\tau_{max} - \tau_{i,j}^{(n-1)}) / (\tau_{i,j}^{(n)} - \tau_{i,j}^{(n-1)}) \dots \dots \text{塑性変形状態のマトリックス要素}$$

.....(18)

これから R_{min} を求め、次式によって各繊維要素およびマトリックス要素に働く確定応力をそれぞれ換算した。

$$\sigma_{i,j} = \sigma_{i,j}^{(n-1)} + R_{min} (\sigma_{i,j}^{(n)} - \sigma_{i,j}^{(n-1)}) \dots \dots \text{繊維応力}$$

$$\tau_{i,j} = \tau_{i,j}^{(n-1)} + R_{min} (\tau_{i,j}^{(n)} - \tau_{i,j}^{(n-1)}) \dots \dots \text{マトリックス応力} \quad (19)$$

さらに次のステップでは、図8-3にその概念を示すように、繊維およびマトリックスの変形・破断状態に応じて仮想変位法を使い分け変位計算を繰返した。いま

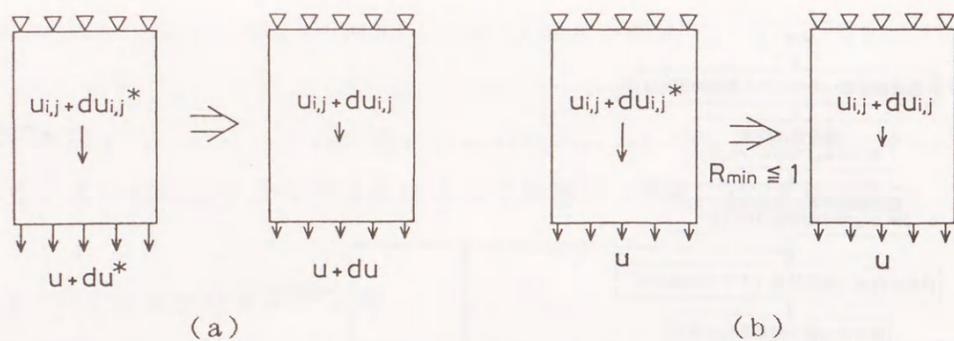


図8-3. 仮想変位法概念図

前回の状態定数の変更がマトリックス要素の降伏を決定する変更であれば、図8-3(a)に示すように再び確定変位に仮想変位増分を加えた変位を境界条件として与える。これが繊維要素あるいはマトリックス要素の破断が生じる変更であれば、図8-3(b)に示すように境界条件に仮想変位増分は加えず、同様に最小の応力増分で状態定数を変更させる要素を対象にし R_{min} を算出するとともに各要素の応力を換算する。後者ではそれぞれの状態の変化が無くなるまで、すなわち $R_{min} > 1$ を満たすまで繰返す。さらに複合材に耐荷能力があれば、再び(a)に戻り同様な手順を繰返す方法である。このような手法は従来の強制変位を徐々に増加させる方法（繰返し増分法）に比べ、要素の状態変化に関する判定が合理的になされていると思われる。

本研究ではFRMにB-B₄C/Al複合材を想定し、強化繊維のワイブル母数は単繊維試験法によって得られた値（第5章の表5-4および第2章の表2-3、それぞれ単一および二重モードワイブル分布によるもの）を用いた。マトリックスの特性は1060-O加工用アルミニウムを実際に引張試験して得られた荷重-伸び線図から弾線形硬化塑性体に近似し、これをせん断降伏応力およびせん断強さに換算した値を用いた。また繊維間隔は一定と仮定し、 $d_1 = d_2 = \dots = d_{N-1} = 0.1\text{mm}$ とした。モデルの大きさは繊維本数10本および30本、差分要素数を20およびゲージ長さを10mmおよび30mmとした。なお、シミュレーションの回数は繊維10本のものは50回、30本のものは30回とした。表8-1にシミュレーションで用いた入力値を一括して示す。

表8-1. シミュレーションに用いた入力値

Elastic modulus of fiber: E	392 GPa
Fiber diameter	0.14 mm
Distance between fibers: d	0.10 mm
Shear modulus of matrix: G	25.74 GPa
Shear yield stress of matrix: τ_y	33.7 MPa
Shear strength of matrix: τ_{max}	53.4 MPa
(Work-hardening rate of matrix)/G: β	0.0018
Thickness of composites: h	0.14 mm
Size of composites: N x K	10x21, 30x21
Gauge length of specimen: L	10mm, 30mm

8.3 解析結果と考察

8-3-1. シミュレーション結果と実験結果の比較

表8-2に本手法による強度シミュレーションの平均値とその変動係数を示す。これから、単一および二重モードワイブル分布のどちらの母数を用いても、平均強度は複合材の寸法の増加とともに低下し、実験結果や再帰法による予測結果と同様な傾向にあることがわかる。特に二重モードワイブル分布を用いたシミュレーション結果は、実験結果とほぼ同じ値をとることがわかる。また変動係数は寸法の増加とともに減少し、再帰法による予測結果と同様な傾向にあることが特徴的である。これは寸法の増加に伴い本シミュレーションでは、最弱繊維の破断に

表8-2. B-B₄C/Al複合材の強度シミュレーション結果

Distribution of fiber	Uni-modal Weibull $m=16.3, \sigma_0=3.97$ $L_0=30\text{mm}$			Bi-modal Weibull $m_1=13.6, m_2=16.4, \sigma_{01}=3.94$ $\sigma_{02}=4.67, L_0=50\text{mm}$		
	N=10 L=10mm	N=10 L=30mm	N=30 L=30mm	N=10 L=10mm	N=10 L=30mm	N=30 L=30mm
n	50	50	30	50	50	30
Ave. GPa	3.63	3.43	3.35	3.56	3.37	3.20
C.V. %	5.86	5.82	4.82	7.88	6.60	5.75

よらず2番め以降の繊維破断によって引張強さが決まる破壊過程が現われるようになり、ばらつきの度合いが少々緩和されたと考えることができる。一般に変動係数のようにばらつきを表わすパラメータは、サンプル数の大きさによって推定値の変動が大きく異なることが知られているが、再帰法による結果や本シミュレーション結果から判断すると、今回の実験で示された繊維本数30本における変動係数はサンプル数の少なさのため少々大きめに現われたと考えることができる。図8-4は単一ワイブル分布を用いた引張強さのシミュレーション結果と実験結果のワイブルプロットを比較したものである。これからシミュレーション結果は繊維本数10本、ゲージ長さ10mmのときに実験結果とほぼ一致するが、複合材の寸法の増加とともに低確率側で過大評価され、特に繊維本数30本、ゲージ長さ30mmの試験片では実験結果といくらか異なることが認められる。図8-5は二重モードワイブル分布を用いた引張強さのワイブルプロットを実験結果と対比させたものである。この場合は、どの寸法においても実験結果とほぼ一致する結果が得られた。したがってシミュレーション結果から判断すると、強度の分布状態の定量的評価には二重モードワイブル分布を繊維の強度分布関数に用いたほうがよい。しかし

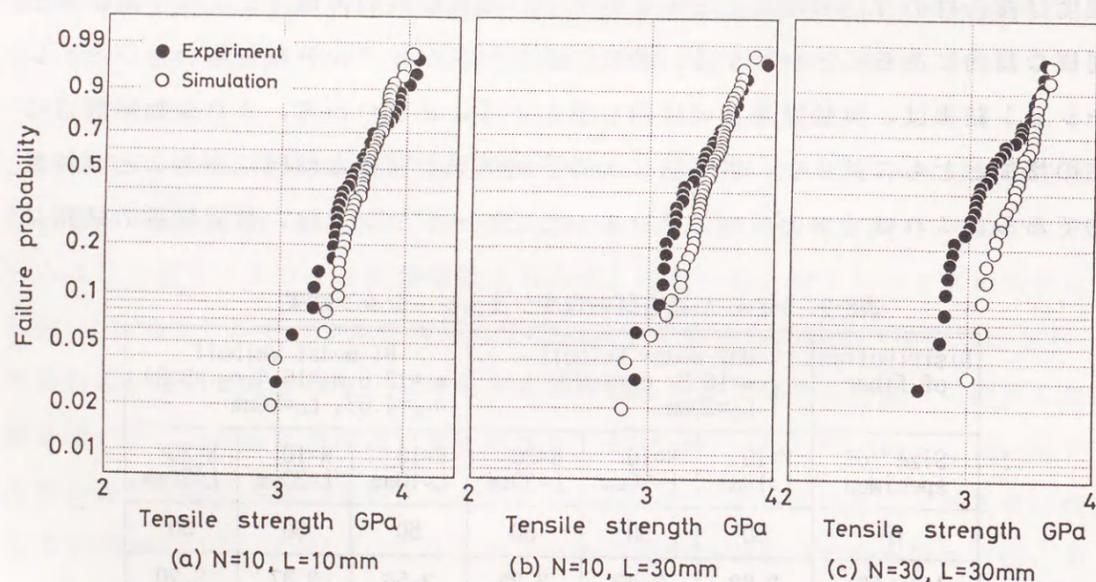


図8-4. シミュレーション結果および実験結果のワイブルプロットの比較
(繊維の強度分布関数が単一ワイブル分布の場合)

ながら、本シミュレーション法では繊維破断による動的な応力集中の重畳効果等を考慮していないため、定量的評価を正確に行なうには、今後このような要因を加味した手法を確立していく必要がある。

8-3-2. FRMの強度分布に及ぼす構成因子および構成の不確かさの影響

ここでは本シミュレーションを用いてFRMの強度分布に及ぼす構成因子の影響として、マトリックスの加工硬化率とせん断降伏応力および界面はく離を、またFRMの構成の不確かさの影響として繊維間隔のばらつきを調査し、FRMの強度の信頼性について考察する。

a) マトリックスの加工硬化率の影響

FRMの強度分布に及ぼす構成因子の影響として、マトリックスの加工硬化率をそれぞれ0.257、1.287および5.148GPa(β に換算してそれぞれ0.01、0.05および0.2に対応)と想定しシミュレートを試みた。このとき繊維の強度分布関数は単一ワイブル分布を仮定し、 $m=5$ 、10および15、 $\sigma_0=3.92$ GPaとした。図8-6に繊維本

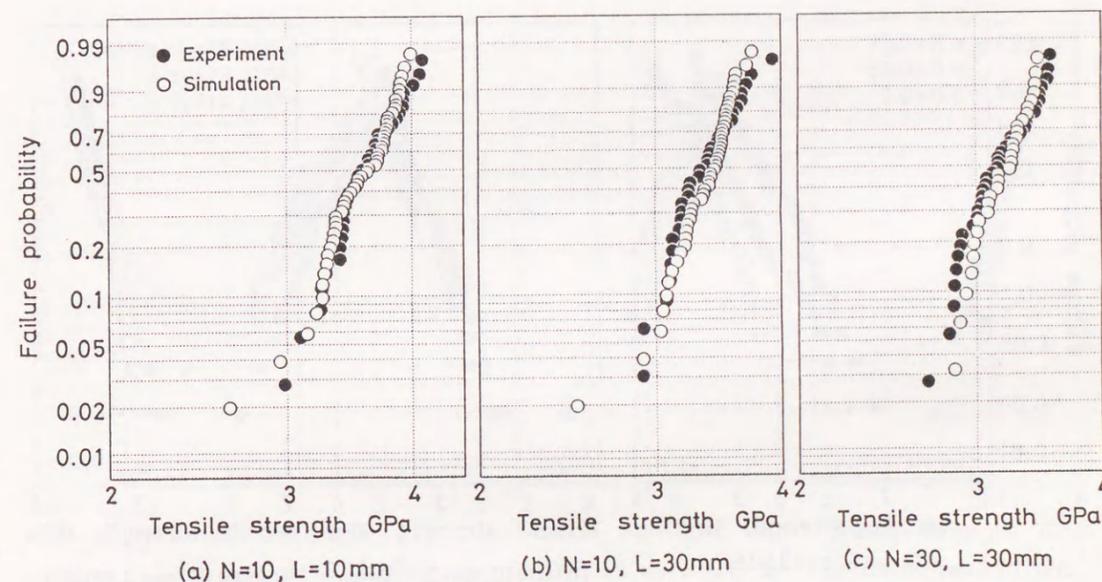


図8-5. シミュレーション結果および実験結果のワイブルプロットの比較
(繊維の強度分布関数が二重モードワイブル分布の場合)

数10本、ゲージ長さ30mmのFRMを想定した試行回数50回のワイブルプロットを示す。これから繊維強度の形状母数が小さいとき、加工硬化率の増加とともに複合材強度は増加することがわかる。これは加工硬化率の増加にともなってマトリックスは破断点近傍のせん断応力を良好に伝えるため、破断繊維の耐荷回復長さが小さくなるからである。しかしこのような影響は繊維強度のワイブル母数に大きく依存することがわかる。すなわち、 $m=5$ のとき加工硬化率の増加にともなって強度特性が大きく改善されるのに対し、 $m=15$ になるとほとんど影響を及ぼさない。

b)マトリックスのせん断降伏応力の影響

FRMの強度分布に及ぼす構成因子の影響として、マトリックスのせん断降伏応力をそれぞれ15.7、29.4および49.0MPaとしシミュレートを試みた。

図8-7に前項と同条件を用いて得られた結果のワイブルプロットを示す。これから、せん断降伏応力の低下によって複合材の強度は低下することがわかる。この場合も上記同様、せん断降伏応力の低下にともなって軸方向の繊維応力が回復し

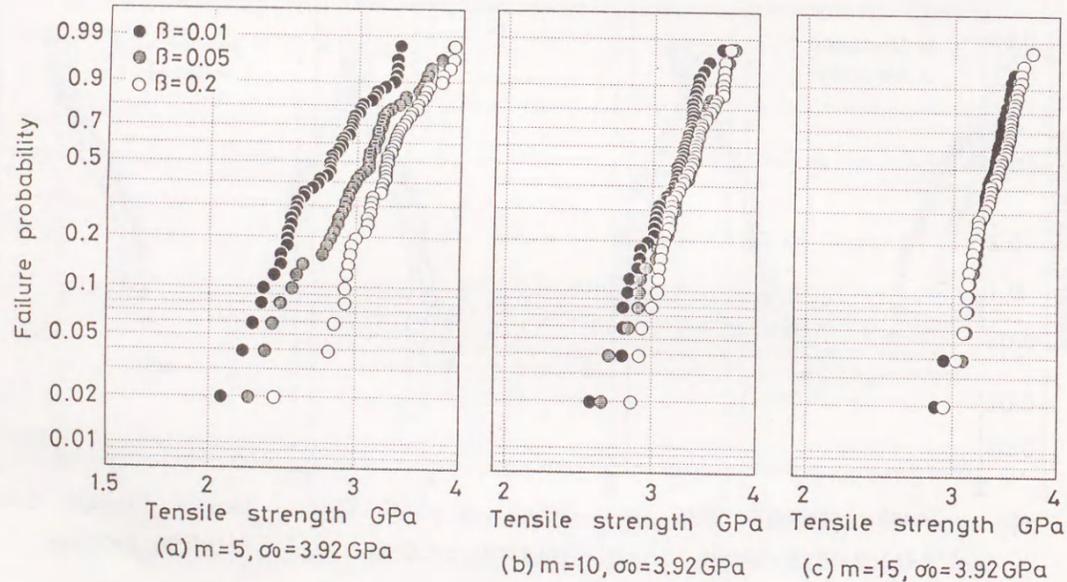


図8-6. FRMの強度分布に及ぼすマトリックスの加工硬化率の影響

にくいため、複合材強度は低下すると考えられる。しかしこの場合も繊維強度の形状母数の増大にともない、せん断降伏応力の影響は緩和される。

c)界面はく離の影響

FRMの強度分布に及ぼす構成因子の影響として、マトリックスのせん断ひずみが0.1、0.05および0.005に達したとき界面ではく離が生じると仮定し、シミュレートを試みた。前節で記したように、はく離による状態定数の変化はマトリックスのせん断破壊と等価である。ただし、前回の状態定数の変更が繊維破壊あるいは界面はく離のとき、はく離ひずみ γ_m が0.05および0.005のときに限り繊維破壊より界面はく離を優先させるようにシミュレーションプログラムを修正した。その結果のワイブルプロットを図8-8に示す。これからはく離ひずみの低下によって強度は低下することがわかる。この理由は繊維破断後優先的に界面はく離が生じるため、マトリックスの応力伝達能の低下によって破断した繊維の耐荷能が衰退するからである。第5章で示した調製温度の低下による複合材強度のゆるやかな低下を、このようなはく離ひずみの減少によるものと解釈するならば、実験

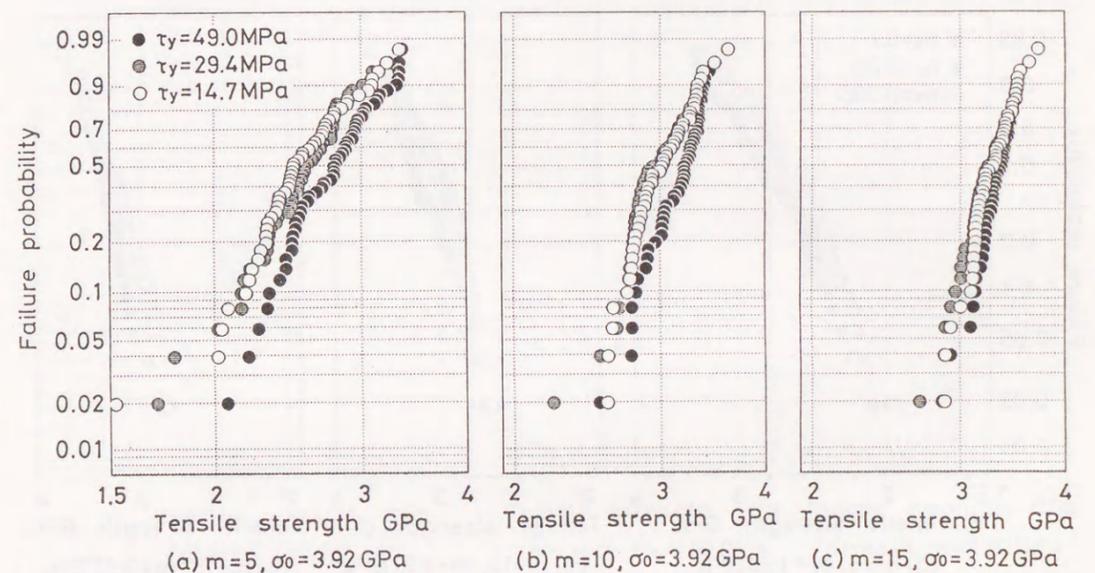


図8-7. FRMの強度分布に及ぼすマトリックスのせん断降伏応力の影響

結果の推移は定性的に裏付けられることがわかる。また繊維強度の形状母数の増加とともに、この場合も同様に強度分布に及ぼす影響は小さくなる。

d) 繊維間隔のばらつきの影響

前節では繊維間隔を一定として扱ったが、実際の複合材内では繊維間隔にある程度のばらつきが観察される。前章で扱ったように繊維間隔のばらつきは応力集中係数の変動を誘発すると考えられるので、前章同様に繊維間隔が一様分布にしたがうものと仮定し、次式によって繊維間距離を振分け、FRMの強度分布に及ぼす繊維間隔のばらつきの影響についてシミュレートを試みた。

$$d_i = 2(\bar{d} - d_{min})\pi_i + d_{min} \quad (i=1, \dots, N) \quad (20)$$

ここで、 \bar{d} : 平均繊維間距離、 d_{min} : 最小繊維間距離、 π_i : $[0, 1]$ の一様乱数を示す。入力値は平均繊維間隔を0.1mmとし、最小繊維間隔を0.001mmおよび0.05mmの場合を想定しばらつきのない場合($d_{min} = \bar{d}$)と比較した。図8-9にシミュレーション結果のワイブルプロットを示す。これから、どの形状母数を用いても d_{min} の低下とともに、特に低確率側でプロット点が低強度側へ推移しばらつきが増える傾向に

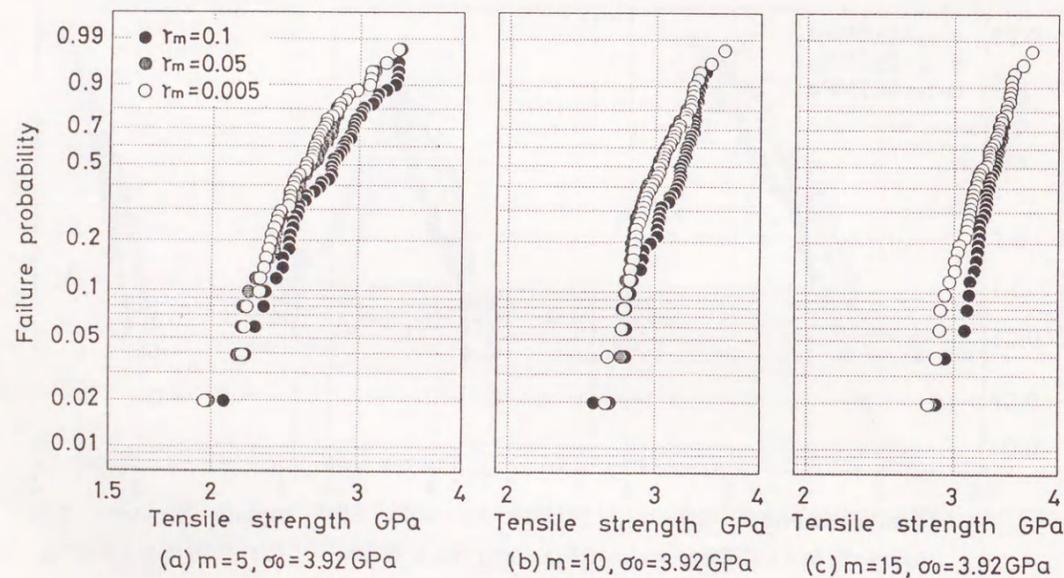


図8-8. FRMの強度分布に及ぼす界面はく離の影響

ある。これは繊維間隔のばらつきによって、特に間隔の小さい所で破断した繊維まわりの応力集中が、隣接繊維の破断を助長したものと考えられる。しかし、強度低下の度合いは形状母数の増加とともにゆるやかになることがわかる。これは形状母数が大きくなると、少数の繊維の破断によって複合材の破壊が決定されるような破壊過程が多く現われるからである。以上と前章の結果から、FRMの強度分布に及ぼす繊維間隔のばらつきの影響は、繊維強度の形状母数が小さいときに顕著に現われるが、形状母数の増加とともに小さくなると思われる。

以上のように、FRMの強度分布に及ぼす構成因子および構成の不確かさの影響は、繊維強度のワイブル形状母数が大きいときにすべて消失する側に向かうことが大きな特徴であり、この母数だけの影響によってFRMの強度分布特性が決まるようになる。このことは、第6章で示した再帰法によるFRMの強度分布評価の正当性を裏付けるものでもある。

8.4節 まとめ

力学的手法によってFRMの強度分布を予測することを目的とし、シアラゲ理

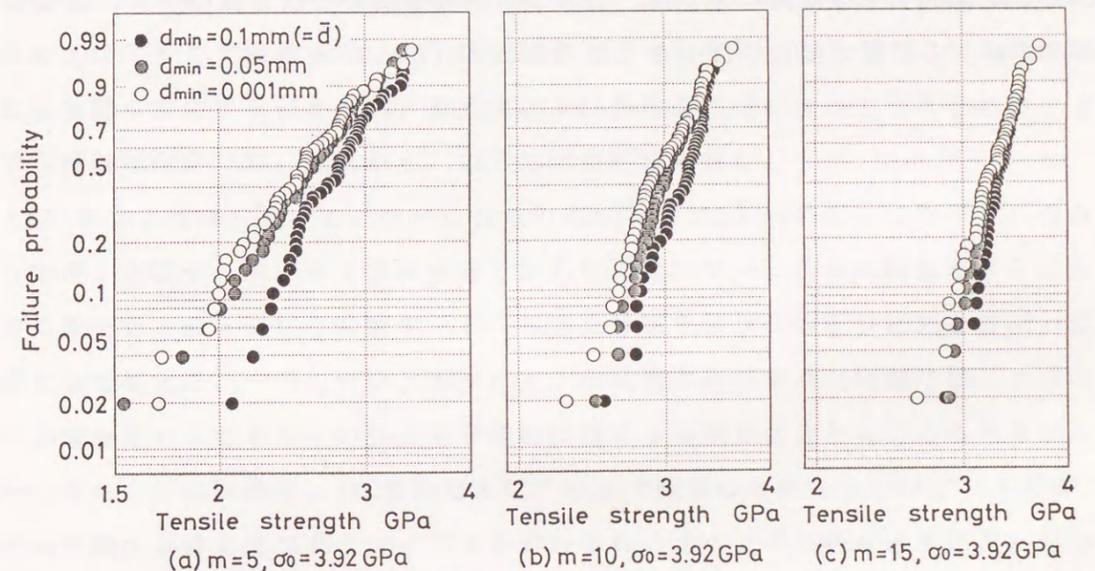


図8-9. FRMの強度分布に及ぼす繊維間隔のばらつきの影響

論を用いたモンテカルロ法による引張強度のシミュレーション手法を提示した。これを用いてボロン繊維強化アルミニウム複合材の試験結果と比較するとともに、FRMの強度の分布に及ぼす構成因子および構成の不確かさの影響について考察した。以下に、得られた結果を示す。

(1)本シミュレーションによる強度の平均値は、実験結果や再帰法で予測された結果と同様に、複合材の寸法の増加とともに低下した。特に二重モードワイブル分布を繊維の強度分布関数に用いた場合、平均値は実験結果と適度に一致した。また変動係数は寸法の増加とともに減少した。

(2)シミュレーション結果のワイブルプロットによると、繊維の強度分布関数に二重モードワイブル分布を用いた方が、単一ワイブル分布を用いるより実験結果と適度に一致した。

(3)FRMの強度の分布に及ぼすマトリックスの加工硬化率とせん断降伏応力、界面はく離および繊維間隔のばらつきの影響について考察した。その結果、マトリックスの加工硬化率あるいはせん断降伏応力が低いほど、また界面はく離が生じやすいほど、複合材の強度は低下する。同様に繊維間隔がばらつくほど、複合材の強度は低下する傾向にあった。しかし、繊維強度の形状母数の増加にともない、これらの影響の度合いは小さくなることがわかった。

第9章. 総括

9.1節 総括

本論文は、セラミック繊維の強度の分布に適した確率分布関数の実験的選択と母数推定に関する新しい提案を行ない、これらの母数に基づいてFRMの強度分布特性を確率論的手法ならびに力学的手法によって評価することを目的とし、FRMの強度の信頼性向上に資するものである。

本論文は9章からなっており、その内容を各章ごとに要約すると次のようになる。

第1章では、本研究の学問的および工業的背景を述べ、この分野における従来の研究を紹介して本研究の位置づけを行なうとともに、本研究の内容を概述した。

第2章では、破壊起点となりうる欠陥を数種類有したセラミック繊維の強度の分布を表わす関数として多重モードワイブル分布を想定し、単一ワイブル分布と比較することによってその適用性を検討した。供試材としてボロン繊維、SiC繊維およびアルミナ繊維を用い、引張試験およびSEM観察によってこれらの破壊起点を明らかにするとともに、最尤法および多段最尤法によってそれぞれのワイブル母数を推定した。これから、以下に示す結論を得た。

(1)ボロン繊維において、ゲージ長さ(10,50および200mm)ごとにワイブル母数を推定した結果、単一ワイブル分布では形状母数がゲージ長さの増加とともに大きく低下したのに対し、多重モードワイブル分布では2つの形状母数をほぼ一定値として与えた。一方、ボロンカーバイトが被覆されたボロン繊維では、どちらの分布を用いてもそれらの強度分布曲線に対する有意差はほとんどみられなかった。また、ボロン繊維、SiC繊維およびアルミナ繊維の多重モードワイブル分布による最大対数尤度は単一ワイブル分布のそれに比べ大きな値を示すことがわかった。

(2)各繊維で得られたワイブル母数を用いて他のゲージ長さにおける強度分布

曲線と平均値曲線をそれぞれ予測した。その結果、多重モードワイブル分布によるそれらは実験データに非常によく一致することが認められた。これに対して、単一ワイブル分布ではワイブル母数に依存はするものの、実験結果をいくらか過大評価することがわかった。

(3)ボロン繊維で得られたワイブル母数を用いて、Rosenモデルを利用した束強度の期待値およびその応力-ひずみ線図を予測した。その結果、多重モードワイブル分布による予測値は、単一ワイブル分布によるそれらと比べて、どのゲージ長さから得られたワイブル母数を用いても適度に一致することが認められた。

(4)以上より、数種の欠陥を含むセラミック繊維の強度分布解析に多重モードワイブル分布の適用を推奨する。

第3章では、母地金属の反応によって生じるぜい弱な層（反応層）を有するセラミック繊維の強度分布を評価することを目的とし、繊維に元々存在する内在欠陥と反応層上で生じたき裂（反応層き裂）をそれぞれ独立したリスクとみなすことによって、競合リスクモデルによる強度分布式を記述した。このモデルの正当性を証明するために、SiC繊維にアルミニウムを蒸着したものを焼鈍（Al被覆・反応処理）することによってモデル繊維を作製した。引張試験によって焼鈍時間とともに強度の推移を調査した結果、以下のことがわかった。

(1)Al被覆・反応処理にもかかわらず、0.5および1min間処理した繊維では内在欠陥を原因とする破壊形態がいくつか現れた。また2および5min間の処理を施すと、すべての繊維が反応層から破壊することがわかった。これら処理時間とともに各破壊原因ごとのワイブル母数を推定した結果、反応層き裂を破壊原因とする形状母数はすべての処理時間においてほぼ一定値を示し、尺度母数は処理時間とともに大きく低下することがわかった。

(2)そこで、内在欠陥を破壊原因とするワイブル母数および反応層き裂を破壊原因とする形状母数を不変とし、反応層き裂を破壊原因とする尺度母数を処理時間の単調減少関数と仮定することによって、本モデルは強度の平均値および変動係数の推移を定性的にかつほぼ定量的に再現することが認められた。

(3)反応層き裂が単軸引張下で負荷方向に垂直に生じるとして表わした2母数ワイブル分布を、三軸均等引張下で2母数ワイブル分布が成立するとした多軸分布関数と比較した。その結果、繊維の強度低下の要因が反応層き裂の大きさだけでなく、き裂の方向性においても見出せることが認められた。

第4章では、一方向強化複合材の引張試験中に生じる繊維破断の応力レベルから、強化繊維のワイブル母数を推定する手法について提案した。これは各繊維の破断応力を順序統計量とみなし、それらの結合分布から最尤推定量を求めるものである。この手法の有効性を検討するために、繊維強度をモンテカルロ法によって発生させ、設定値に対する変動範囲を調べた結果、以下のことがわかった。

(1)全般的に少数サンプルにもかかわらず、多数の破断繊維をデータの対象にすることにより変動の小さな推定値が得られることがわかった。特にサンプル数10個、破断繊維数5本程度で、すでに従来の全区間を対象にした手法のサンプル数30における変動範囲とほぼ同じレベルにあることがわかった。また30~50個のサンプル数であれば、1本の破断繊維数でも良好な推定値を得ることができる。

(2)繊維本数100~1000から成る複合材を想定し、再帰法によって応力集中による繊維破断の確率的生起性からデータの対象となりうる破断繊維数を限定した結果、1~2本程度が有効なデータと判断された。したがって、正確なパラメータを得るためには30個以上のサンプルを必要とする。

(3)以上から、一方向強化複合材内の繊維破断データを利用した繊維強度のワイブル母数推定に本手法の適用が期待できる。

第5章では、ホットプレス法によってボロン繊維強化Al複合材料を調製し、複合材の強度特性に及ぼす調製温度(500°C~625°C)の影響について調査した。また繊維本数(10本、30本)およびゲージ長さ(10mm、30mm)の異なった3種類の試験片によって複合材の寸法効果について検討した。さらに、AE法によって繊維破断の検出を試み、前章で示した推定法によってワイブル母数を推定した結果、次のことがわかった。

(1)調製温度の増加にともない複合材の強度の平均値は徐々に増加した。また破面観察から、調製温度が増加すると繊維-マトリックス界面およびマトリックス間の接合面の接着性が改善されることがわかった。すなわち、接着性の改善によって繊維間の荷重伝達能が向上するため、強度は増加すると考えられた。

(2)繊維数およびゲージ長さの増加によって複合材の平均強度は低下した。これはゲージ長さが増加すると繊維の体積効果（あるいは表面積効果）が現われるだけでなく、本数の増加によって最小値の絶対値が小さくなることで低下の原因と考えられた。

(3)繊維破断検出法によって推定されるワイブル母数は、単繊維引張試験によるものに比べ、どの種の試験片においても形状母数でいくらか小さく尺度母数で若干大きめな値として算出されることがわかった。これはこの手法が低強度側の順序統計量の分布から全体を外そうする方法であるため、形状母数はばらつきの大きいであろう低強度側の分布に依存し、それによって尺度母数は大きく見積もられると考えられた。

第6章では、微視強度論による強度分布評価法をFRMに適用することをめざし、強化効果の統計的評価法である再帰法を用いて、前章で得られたボロン繊維強化アルミニウム複合材の試験結果を定量的に評価した。その結果、次のことがわかった。

(1)前章で得られた試験法の異なる2種類のワイブル母数および二重モードワイブル分布による母数を用い、再帰法による強度の平均値とその変動係数を予測した。これから平均値は寸法の増加とともに徐々に低下し、どの母数を用いた場合も実験結果と良好に一致することが認められた。また変動係数は寸法の増加とともに低下した。

(2)同様なワイブル母数を用い、再帰法による累積分布曲線を予測した。その結果、どの母数を用いた場合も実験結果のワイブルプロットとほぼ一致することが認められた。以上より、強度の平均値あるいは累積分布曲線の予測に関しては、FRMの強度分布評価法として再帰法の適用が期待できる。

(3)再帰解に及ぼす強化繊維の単一および二重モードワイブル分布の影響を、他繊維について推定した。その結果、繊維本数とは無関係に繊維のワイブル母数に依存して両分布曲線が大きく異なる場合がみられた。

第7章では、マトリックスのせん断変形が近似的に弾線形硬化塑性変形することを想定し、シアラグ理論を用いてFRM内の応力集中係数を導出した。さらに、繊維間隔のばらつきを考慮したモデルによって応力集中係数を統計的に扱った結果、以下のことがわかった。

(1)繊維間隔を一定にしたとき、破断繊維に隣接した繊維に作用する応力集中係数は負荷応力の増加とともに減少した。また繊維軸方向における破断繊維まわりの応力の乱れは負荷応力の増加とともに大きくなる。

(2)繊維間隔のばらつきを一様乱数によってシミュレートした結果、応力集中係数の平均値は繊維間隔が一定の場合とほぼ同じ値を与える。またその標準偏差は負荷応力の値にかかわらずほとんど一定であった。

(3)応力集中係数の増分はワイブル確率紙上で直線性を示した。この傾向はマトリックスのせん断変形を弾性変形として扱ったモデルと同様な性質を示すものであるが、ばらつきの程度は本モデルが極めて小さい。

第8章では、力学的手法によってFRMの強度の分布を表わすことを目的とし、シアラグ理論を用いたモンテカルロ法による引張強度のシミュレーション手法を提示した。これを用いてボロン繊維強化アルミニウム複合材の試験結果と比較するとともに、FRMの強度の分布に及ぼす構成因子および構成の不確かさの影響について考察した。以下に、得られた結果を示す。

(1)本シミュレーションによる強度の平均値は、実験結果や再帰法で予測された結果と同様に、複合材の寸法の増加とともに低下した。特に二重モードワイブル分布を繊維の強度分布関数に用いた場合、平均値は実験結果と適度に一致した。また変動係数は寸法の増加とともに減少した。

(2)シミュレーション結果のワイブルプロットによると、繊維の強度分布関数

に二重モードワイブル分布を用いた方が、単一ワイブル分布を用いるより実験結果と適度に一致した。

(3)FRMの強度の分布に及ぼすマトリックスの加工硬化率とせん断降伏応力、界面はく離および繊維間隔のばらつきの影響について考察した。その結果、マトリックスの加工硬化率あるいはせん断降伏応力が低いほど、また界面はく離が生じやすいほど、複合材の強度は低下する。同様に繊維間隔がばらつくほど、複合材の強度は低下する傾向にあった。しかし、繊維強度のワイブル形状母数の増加にともない、これらの影響の度合いは小さくなることがわかった。

セラミック繊維強化金属基複合材料の強度分布特性を解明する目的で実施した本論文の第1章から第8章を総括すると、次のとおりである。

セラミック繊維あるいは反応層を有するセラミック繊維の強度分布関数として、従来使用されてきた単一ワイブル分布と比較し、競合リスクモデルに基づく多重モードワイブル分布がさらに良好に実験結果を予測することを明らかにした。またワイブル母数の新しい推定法として、順序統計量を利用した複合材内の繊維破断検出による推定法の適用が認められた。さらにホットプレス法によってポロン繊維強化Al複合材を調製し、引張強度に及ぼす調製温度の影響および寸法効果を明らかにした。また、強化効果の確率論的評価法である再帰法を用いることによって、その理論分布曲線がポロン繊維強化Al複合材の強度の分布に適合することを明らかにした。さらに、シアラグ理論に基づくFRMの強度シミュレーション手法を提示するとともに、実験結果をこの手法を用いておおよそ予測できることを明らかにした。また、FRMの強度分布に及ぼす構成因子および構成の不確かさの影響について考察を加えた。

以上より、FRMの工学的位置付けおよび工業的応用に際し、その強度分布特性の基礎的資料および手法を与え、強度の信頼性を向上させるための基本的理念を明らかにした。

第9章では、前章までに得られた結果を総括した。

9.2節 今後の展望

第2章で示したワイブル分布によるぜい性材料の破壊統計に関する扱いは単軸下での議論である。最近では第3章の考察で若干触れたように、多軸応力下でのぜい性材料の信頼性に関する扱いが盛んに行なわれている。これは、等価垂直応力によって各応力成分をいわゆる相当応力として代表させ、き裂の方向のいかんにかかわらず応力状態が等しいとき(3軸均等引張り)に2母数ワイブル分布あるいは3母数ワイブル分布が成立するとしたものである。このような扱いは確率論的破壊力学と呼ばれ⁽⁹⁻¹⁾、セラミックスが構造用材料として適用される期待が高まりつつある中、今後前衛的な発展が期待できる工学分野である。著者はこのような扱いを、マトリックスに埋め込まれたセラミック繊維が軸方向とある角度をもって負荷されたときの解析手法に適用できると考えている。これは短繊維強化複合材内の破断繊維まわりにおける微視力学的解析をすすめる上で重要な課題であり、今後の検討事項に値すると思われる。

第3章で示した反応層き裂による確率分布関数の与え方は、腐食による材料や装置の寿命を扱うときにしばしば導入されているモデルである⁽⁹⁻²⁾。すなわち腐食によって最も弱まった箇所寿命によってその材料の寿命が決定されるため、極値分布による記述が可能だからである。このような扱いは、その接合性に問題を抱えている金属-セラミックス材あるいはセラミックス-セラミックス材の界面問題を扱う際、今後解析の必要性が生じるであろうと思われる。また、本章で示した方向性をも考慮した反応層き裂あるいは界面割れの影響を確率論的評価に結びつけることも今後信頼性を検討する上で重要な課題事項であると考えている。

第4章ではセラミック繊維の強度分布が2母数ワイブル分布に従うとし、マトリックス内に埋め込まれた繊維の新しいワイブル母数推定法について提示した。現在JIS規格では、カーボン繊維の強度を単繊維試験法およびストランド試験法によって評価するよう規定しているが、単繊維試験は技術的困難をもつため簡便に強度を評価できる手法が望まれる。本手法のねらいは、後者のストランド試験時に併用できる手法としての提案であった。現在までに、AE法などでガラス繊維やカーボン繊維のように直径の小さい繊維の破断音を、その周波数特性のちがいが

からマトリックスの割れや界面はく離と区別して検出できることを主張した報告が2~3みられる⁽⁹⁻³⁾。したがって、今後このような検出手法の確立を切望するものである。

第6章で示した再帰法は、確率過程論による複合材料の破壊確率を推定する一手法である。この手法を提示したうちの1人Phoenixは、その後Pittと連名で破断繊維に隣接した以外の繊維をも対象にした破壊強度の累積分布曲線をマルコフ過程論によって導出した⁽⁹⁻⁴⁾。これらの手法は解の誘導が非常に困難であり、著者自身はその発展性を危惧するものである。しかしながら、Smith⁽⁹⁻⁵⁾やBatdorf⁽⁹⁻⁶⁾によって再帰法の近似モデルが発表されており、近似的解析手法による複合材料の微視強度論の発展が今後期待される。また、このような手法にならかの力学的要素、たとえば確率有限要素法等⁽⁹⁻⁷⁾を取入れ、さらに力学的に評価がなされることを期待するものである。

第7章で示したシアラグ理論における解の誘導は、連立常微分方程式を固有値問題に置き換えて導出を試みた。これに体積力の項を加えることによって、破断繊維の動的挙動を知ることができる。これは連立偏微分方程式を解く問題に相当し、Hedgepeth⁽⁹⁻⁸⁾はラプラス変換法を用いて解の導出を試みている。著者は現在この種の問題を、解析的および数値的手法によってFRMに適用できるかどうかを検討中である。前者の手法は未知定数が弾性解に比し多いことから、ラプラス像空間上ですでに解の導出が困難であろうと思われる。後者の手法では、繊維要素を棒要素とし、マトリックス(せん断応力のみを受持つ)にひずみ速度依存型の構成方程式を導入することで、一次元の動的有限要素解析法による応力分布の導出が可能であると考えている。

第8章で示した強度シミュレーション手法は、一方向強化複合材の強化方向の負荷にしか適用できない。本研究の目的であった繊維の複合効果の観点からすれば、このような基礎的扱いが妥当であったと思われる。著者は弾塑性有限要素法などを用いることによって、さらに強度シミュレーション手法を2次元あるいは3次元短繊維強化複合材やハイブリッド複合材における強化効果の統計的評価法にまで拡張できると考えている。

参考文献

第1章で引用した文献

- (1-1) Kelly, A. (村上 諒), *Strong Solids*, (1976), 136, 丸善.
- (1-2) 福田, *材料システム*, 4(1985), 13.
- (1-3) 市田・鈴木, *信頼性の分布と統計*, (1984), 27, 日科技連.
- (1-4) Weibull, W., *Ingeniors Vetens Kapsakad.*, 151(1939), 1.
- (1-5) Weibull, W., *J. Appl. Mech.*, 18(1951), 293.
- (1-6) 仁木, *複合材料シンポジウム論文集*, 11(1976).
- (1-7) 三木, 吉田, *材料*, 28-315(1979), 1204.
- (1-8) 三木, *材料*, 30-328(1981), 34.
- (1-9) たとえば, Hitchon, J.W. and Phillips, D.C., *Fib. Sci. Tech.*, 12(1979), 217., 日和・ほか2名, *材料*, 34-376, (1985), 59.
- (1-10) Chwastiak, J.B., ほか2名, *Carbon*, 17(1979), 49.
- (1-11) Street, K.N. and Ferte, J.P., *Proc. Int. Conf. Compo. Mater.*, 1(1976), 137.
- (1-12) 小原・武藤, *日本金属学会誌*, 45-4(1981), 411.
- (1-13) Kagawa, Y. and Nakata, E., *Proc. Jpn. Cong. Mater. Res.*, 27(1984), 159.
- (1-14) Simon, G. and Bunsell, A.R., *J. Mater. Sci.*, 19(1984) 3649.
- (1-15) Griffith, A.A., *Phil. Trans. Roy. Soc.*, A221(1920), 163.
- (1-16) Thomas, W.F., *Phys. Chem. Glas.*, 1-1(1960), 4.
- (1-17) Metcalfe, A.G. and Schmitz, G.K., *Proc. ASTM*, 64(1964), 1075.
- (1-18) Kao, J.H.K., *Technometrics*, 1-4(1959), 389.
- (1-19) たとえば, Thorne, D.J., *Nature*, 248(1974), 754., Jorro, M.A.A., ほか2名, *Carbon*, 14(1976), 219.
- (1-20) Johnson, J.W. and Thorne, D.J., *Carbon*, 7(1969), 659.
- (1-21) Jones, B.F. and Wilkins, B.J.S., *Fib. Sci. Tech.*, 5(1972), 315.
- (1-22) Beetz Jr, C.B., *Fib. Sci. Tech.*, 16(1982), 45.

- (1-23) Beetz Jr, C.B., *ibid*, 16(1982), 81.
- (1-24) Layden, G.K., *J. Mater. Sci.*, 8(1973), 1581.
- (1-25) Boggio, J.V. and Vingsbo, O., *ibid*, 11(1976), 273.
- (1-26) 森田・ほか2名、*日本金属学会誌*、36-12(1972)、1213.
- (1-27) Kotchick, D.M., ほか2名, *J. Compo. Mater.* 9(1975), 327.
- (1-28) Bolotin, V.V., *Statistical Methods in Structural Mechanics*, (1969), 64, Holden-Day.
- (1-29) Herman, R.J. and Patell, R.K.N., *Technometrics*, 13-2(1971), 385.
- (1-30) 松尾・村田、*材料*、33-375(1984)、1545.
- (1-31) Harlow, D.G. and Phoenix, S.L., *Int. J. Frac.*, 17-4(1981), 347.
- (1-32) Phoenix, S.L. and Sexsmith, R.G., *J. Comp. Mater.*, 6(1972), 322.
- (1-33) たとえば、Baker, A.A. and Mrs. Shipman, C., *Fib. Sci. Tech.*, 5(1972), 285., 小原・武藤、*日本金属学会誌*、45-4(1981), 411.
- (1-34) Metcalfe, A.G. and Klein, M.J., *Composite Materials*, Vol.1(1974), 125, Academic Press, New York and London.
- (1-35) Baker, S.J. and Bonfield, W., *J. Mater. Sci.*, 13(1978), 1329.
- (1-36) Ochiai, S. and Murakami, Y., *J. Mater. Sci.*, 14(1979), 831.
- (1-37) Ochiai, S. and Murakami, Y., *Z. Metallkd*, 72-12(1981), 827.
- (1-38) Ochiai, S., Osamura, K. and Murakami, Y., *ibid*, 74-1(1983), 44.
- (1-39) Sakai, M. and Watanabe, K., *J. Mater. Sci.*, 19(1984), 3430.
- (1-40) Daniels, H.E., *Proc. Roy. Soc.*, A183(1945), 405.
- (1-41) Rosen, B.W., *AIAA, J.*, 2-11(1964), 1985.
- (1-42) Coleman, B.D., *J. Mech. Phys. Solids*, 7(1958), 60.
- (1-43) Zweben, C., *AIAA, J.*, 6(1968), 2325.
- (1-44) Scop, P.M. and Argon, A.S., *J. Comp. Mater.*, 1(1967), 92.
- (1-45) Scop, P.M. and Argon, A.S., *ibid*, 3(1969), 30.
- (1-46) Zweben, C. and Rosen, B.W., *J. Mech. Phys. Solids*, 18(1970), 189.
- (1-47) Fukuda, H., ほか2名, *Composite Materials; Mechanics, mechanical*

- properties & fabr. probabilistic approach on the strength of fibrous composites.*, *Proc. Japan-U.S. Conference, Tokyo* (1981), 181.
- (1-48) Harlow, D.G. and Phoenix, S.L., *J. Comp. Mater.*, 12(1978), 195.
- (1-49) Harlow, D.G. and Phoenix, S.L., *Int. J. Frac.*, 17-6(1981), 601.
- (1-50) Pitt, R.E. and Phoenix, S.L., *ibid*, 20(1982), 291.
- (1-51) Smith, R.L., *Proc. R. Soc. Lond., Ser.*, 372(1980), 539.
- (1-52) Phoenix, S.L. and Smith, R.L., *Int. J. Solids Struct.*, 19-6(1983), 479.
- (1-53) Batdorf, S.B., *J. Rein. Plas. Comp.*, 1(1982), 153.
- (1-54) たとえば、林、*日本機械学会誌*、71-593(1968)、721., Arridge, R.G.C., *Mat. Sci. Tech.*, 3-August(1987), 609., 石川・藤藁、*日本機械学会論文集*、53-492(1987)、1453.
- (1-55) たとえば、三好・ほか3名、*有限要素法*、(1980) 206、実教出版.
- (1-56) たとえば、三浦・浅岡、*日本金属学会誌*、37-11(1973)、1212.
- (1-57) たとえば、奥野・三浦、*日本金属学会誌*、39-8(1975)、785., *複合材料の破壊と力学*、(1979) 85、実教出版.
- (1-58) Hedgepeth, J.M., *NASA Tech. Note*, D-882(1961), 1.
- (1-59) Cox, H.L., *J. Appl. Phys.*, 3(1952), 72.
- (1-60) Hedgepeth, J.M. and Van Dyke, P., *J. Comp. Mater.*, 1(1967), 294.
- (1-61) Goree, J.G. and Gross, R.S., *Eng. Frac. Mech.*, 13(1979), 563.
- (1-62) Zweben, C., *ibid*, 6(1974), 1.
- (1-63) 落合・ほか2名, *日本金属学会誌*、48-10(1984)、1021.
- (1-64) Ochiai, S., ほか2名, *Z. Metallkd*, 76-4(1985), 299
- (1-65) Fukuda, H., *Comp. Sci. Tech.*, 22(1985), 153.
- (1-66) 金原・ほか2名、*複合材料シンポジウム講演要旨集*、7(1974)、169.
- (1-67) Fukuda, H. and Kawata, K., *Fib. Sci. Tech.*, 10(1977), 53.
- (1-68) Fukuda, H. and Chou, T.W., *J. Comp. Mater.*, 16(1982), 371.
- (1-69) 奥野・三浦、*日本金属学会誌*、42-7(1978)、736.

(1-70) Manders, P.W., ほか2名, Fib.Sci.Tech., 17(1982), 183.

(1-71) Oh, K.P., J.Comp.Mater., 13(1979), 311.

(1-72) 金原・ほか2名、材料、34-378(1985), 280.

(1-73) 金原・ほか2名、材料、35-392(1986), 533.

(1-74) 金原・尾崎、材料、36-402(1987), 216.

(1-75) 落合・ほか2名、日本金属学会誌、48-10(1984), 1028.

第2章で引用した文献

(2-1) たとえば、文献(1-17)および文献(1-19)~(1-27).

(2-2) 文献(1-30)に同じ.

(2-3) 文献(1-18)に同じ.

(2-4) 文献(1-22)に同じ.

(2-5) Phoenix, S.L., Fib.Sci.Tech., 7(1974), 15.

(2-6) Johnson, L.G., The Statistical Treatment of Fatigue Experiments, (1964), 37, Elsevier.

(2-7) Nelson, W., J.Qual.Tech., 2-3(1970), 126.

(2-8) 北上・松尾、材料、34-387(1985), 1466.

(2-9) Sonderman, D., ほか3名, J.Mater.Sci., 20(1985), 207.

(2-10) 文献(1-26)に同じ.

(2-11) Jones, J.B., ほか2名, J.Mater.Sci., 15(1980), 2455.

(2-12) Nunes, J., AMMRC TR 82-61 (Army Materials and Mechanics Research Center, Watertown, Massachusetts, 1982), 1.

(2-13) 松尾・ほか3名、窯業協会誌、92-5(1984), 274.

(2-14) 文献(1-41)に同じ.

(2-15) 文献(1-40)に同じ.

第3章で引用した文献

(3-1) 文献(1-33)に同じ.

(3-2) 文献(1-34)に同じ.

(3-3) 文献(1-35)に同じ.

(3-4) 文献(1-36)に同じ.

(3-5) 文献(1-37)に同じ.

(3-6) 文献(1-38)に同じ.

(3-7) 文献(1-39)に同じ.

(3-8) 文献(1-4)に同じ.

(3-9) 松尾、日本機械学会論文集(A編)、46-406(1980), 605.

(3-10) 松尾、日本機械学会論文集(A編)、46-407(1980), 763.

(3-11) Shorshorov, M.Kh., ほか3名, J.Mater.Sci., 14(1979), 1850.

(3-12) 塩田・渡辺、日本金属学会誌、38(1974), 794.

(3-13) Evans, A.G., J.Amer.Ceramic Soc., 61-7/8(1978), 2374.

第4章で引用した文献

(4-1) 大平・ほか4名、日本金属学会誌、48-3(1984), 248.

(4-2) 成沢・大友、複合材料シンポジウム講演要旨集、11(1986), 85.

(4-3) 祖父江・ほか2名、日本機械学会論文集(A編)、53-488(1987), 697.

(4-4) 鈴木・ほか6名、日本機械学会論文集(A編)、53-492(1987), 1459.

(4-5) 文献(1-31)に同じ.

(4-6) 文献(1-49)に同じ.

(4-7) 竹内、数理統計学、(1984), 140, 東洋経済新報社.

(4-8) 市田・鈴木、信頼性の分布と統計、(1984), 80, 日科技連.

(4-9) 文献(1-7)に同じ.

(4-10) Chi, Z., ほか2名, J.Mater.Sci., 19(1984), 3319.

(4-11) 第2章の結果を参照

(4-12) たとえば、Glandus, J.C. and Boch, P., J.Mater.Sci.Lett., 3(1984), 74.

(4-13) 川合・阿部、旭ガラス研究報告、30-2(1980), 111.

(4-14) 市川、日本機械学会論文集(A編)、51-470(1985)、2368.

(4-15) 文献(1-41)に同じ.

(4-16) 文献(1-58)に同じ.

第5章で用いた文献

(5-1) 文献(4-1)に同じ.

(5-2) 松尾・ほか2名、日本機械学会論文集(A編)、50-459(1984)、1894.

(5-3) 文献(4-12)(4-13)に同じ.

第6章で用いた文献

(6-1) 文献(1-2)に同じ.

(6-2) 文献(1-71)に同じ.

(6-3) 文献(1-72)(1-73)、あるいは Batdorf, S.B. and Ghaffarian, R., J.Rein. Plas.Comp., 1(1982), 165., Batdorf, S.B. and Ghaffarian, R., Int.J.Frac., 26(1984), 113.

(6-4) 文献(1-31)に同じ.

(6-5) 文献(1-49)に同じ.

(6-6) 文献(1-41)に同じ.

(6-7) 文献(1-43)に同じ.

(6-8) 文献(1-44)に同じ.

(6-9) 文献(1-45)に同じ.

(6-10) 文献(1-46)に同じ.

(6-11) Kelly, A. and Tyson, W.R., J.Mech.Phys.Solids, 13(1965), 329.

(6-12) Fitzer, E. and Jacobsen, G., Int.Conf.Comp.Mater., 4(1982), 1315.

(6-13) 文献(1-48)に同じ.

(6-14) Harlow, D.G. and Phoenix, S.L., J.Comp.Mater., 12(1978), 314.

第7章で引用した文献

(7-1) 文献(1-58)に同じ.

(7-2) Batdorf, S.B. and Chaffarian, R., J.Mater.Sci.Lett., 1(1982), 295.

(7-3) 文献(1-65)に同じ.

(7-4) 文献(1-64)に同じ.

(7-5) 文献(1-60)に同じ.

(7-6) 文献(1-62)に同じ.

(7-7) Pitt, R.E. and Phoenix, S.L., Int.J.Frac., 22 (1983), 243.

(7-8) 福田、複合材料シオポジウム講演要旨集, 10(昭60), 85.

第8章で用いた文献

(8-1) 文献(1-71)に同じ.

(8-2) 文献(1-72)に同じ.

(8-3) 文献(1-75)に同じ.

(8-4) 文献(1-55)に同じ.

(8-5) 村田、ほか3名、日本機械学会論文集(A編)、52-473(1986)、27.

第9章で用いた文献

(9-1) 市川、日本機械学会論文集(A編)、50-456(1984)、1435.

(9-2) 腐食防食協会編、装置材料の寿命予測入門、(1985)、15.

(9-3) 文献(4-2)(4-4)に同じ.

(9-4) 文献(7-7)に同じ.

(9-5) 文献(1-51)に同じ.

(9-6) 文献(1-53)に同じ.

(9-7) 中桐、ほか2名、日本機械学会論文集(A編)、48-427(1982)、339.

(9-8) 文献(1-58)に同じ.

1. 2-pletの再帰行列の導出方法

1-pletは次のように最小値分布の考え方で導出できる。すなわち、要素複合体内で1-pletが1個生成する確率を与える強度分布関数 G_N は、繊維の強度分布関数 $F(\sigma)$ の最小値分布に相当し次式で与えられる。

$$G_N = 1 - \{1 - F(\sigma)\} \quad (A-1)$$

さて、2-pletでは再帰的に生起確率を導出するにあたり、次のような確率事象を考える。

$$A_N^{[2]}(\sigma) = \{ \text{負荷応力 } \sigma \text{ によって、要素複合体内で2-plet以上の破断連鎖が} \\ \text{1つ発生する。} \}$$

$A_N^{[2]}(\sigma)$ の余事象 $\bar{A}_N^{[2]}(\sigma)$ は

$$\bar{A}_N^{[2]}(\sigma) = \{ \text{負荷応力 } \sigma \text{ によって、要素複合体内で2-plet以上の破断連鎖が} \\ \text{まったく発生しない (ただし、1-pletはいくら発生してもよい)。} \}$$

したがって、2-pletの生起確率 $G_N^{[2]}(\sigma)$ は

$$G_N^{[2]}(\sigma) = \Pr\{A_N^{[2]}(\sigma)\} \quad (A-2)$$

であり、その余事象を満たす確率は

$$Q_N^{[2]}(\sigma) = 1 - G_N^{[2]}(\sigma) = \Pr\{\bar{A}_N^{[2]}(\sigma)\} \quad (A-3)$$

となる。

いま、要素複合体内に配列された N 本の繊維の強度を X_1, X_2, \dots, X_N とすると、これらの繊維の破壊確率は、負荷応力と応力集中係数に依存した次の4つの区間に振分けることができる。

$$\begin{aligned} \Pr\{0 < X_i \leq \sigma\} &= F(\sigma) && (\Rightarrow p_0 \text{ と記す}) \\ \Pr\{\sigma < X_i \leq K_1 \sigma\} &= F(K_1 \sigma) - F(\sigma) && (\Rightarrow p_1 \text{ と記す}) \\ \Pr\{K_1 \sigma < X_i \leq K_2 \sigma\} &= F(K_2 \sigma) - F(K_1 \sigma) && (\Rightarrow p_2 \text{ と記す}) \\ \Pr\{K_2 \sigma < X_i\} &= 1 - F(K_2 \sigma) && (\Rightarrow \hat{p}_3 \text{ と記す}) \end{aligned} \quad (A-4)$$

ここで、 K_1 および K_2 は破断繊維が隣接繊維に及ぼす応力集中係数で、破断繊維がそれぞれ1本および2本の場合を表わす。たとえば、LLS則(Local Load Sharing rule)によると $K_1=1.5$ 、 $K_2=2.0$ 、Hedgepethの解では $K_1=4/3$ 、 $K_2=8/5$ と与えられる。また、 p_0 :負荷応力 σ が与えられたときの繊維 i の破断確率、 p_1 : σ で破断せず、隣接したどちらか片方の繊維が破断しているときの繊維 i の破断確率、 p_2 : $K_1 \sigma$ で破断せず、両隣りの繊維が破断しているときの繊維 i の破断確率、 \hat{p}_3 : $K_2 \sigma$ が与えられたときの繊維 i の未破断確率をそれぞれ表わす。以後、それぞれの区間内に属する繊維を l_0 、 l_1 、 l_2 および l_3 型繊維と呼ぶ。

さて、 N 番めに配列された繊維が破壊確率 p_j で生じることを条件とした条件付確率 $Q_N^{[2]}[j]$ の具体的な再帰的解析手法について記す。

1) $Q_N^{[2]}[2]$ の場合 (要素 N が l_2 型繊維の場合)

($N-1$)番めに配列された繊維要素(以下、要素($N-1$)などと略記する)の破断・未破断に関係なく2-pletは生成し得ないので、 $Q_N^{[2]}[2]$ は $Q_{N-1}^{[2]}$ と等確率である。したがって、

$$Q_N^{[2]}[2] = Q_{N-1}^{[2]} \quad (A-5)$$

あるいは、

$$Q_N^{[2]}[2, i] = Q_{N-1}^{[2]}[i] \quad (i=0, 1, 2, 3) \quad (A-6)$$

と書くことができる。

2) $Q_N^{[2]}[3]$ の場合 (要素 N が l_3 型繊維の場合)

1)と同様な理由によって、

$$Q_N^{[2]}[3] = Q_{N-1}^{[2]} (= Q_N^{[2]}[2]) \quad (A-7)$$

となる。

3) $Q_N^{[2]}[1]$ の場合 (要素Nが 1_1 型繊維の場合)

要素(N-1)が破断しているとき、 1_1 型繊維を要素Nに配列させることによって2-pletが確実に生成する。したがって、

$$G_N^{[2]}[1,0]=1 \quad (A-8)$$

ゆえに、

$$Q_N^{[2]}[1,0]=1-G_N^{[2]}[1,0]=0 \quad (A-9)$$

となる。また、

$$Q_N^{[2]}[1,i]=Q_{N-1}^{[2]}[i] \quad (i=1,2,3) \quad (A-10)$$

である。加法定理に式(A-9)(A-10)を代入することによって、次式を導くことができる。

$$Q_N^{[2]}[1]=\sum_{i=0}^3 p_i Q_N^{[2]}[1,i]=\sum_{i=1}^3 p_i Q_N^{[2]}[1,i]=\sum_{i=1}^3 p_i Q_{N-1}^{[2]}[i] \quad (A-11)$$

4) $Q_N^{[2]}[0]$ の場合 (要素Nが 1_0 型繊維の場合)

要素(N-1)が 1_3 型繊維であれば、要素(N-2)の破断・未破断に関係なく2-pletは生成し得ないので、

$$Q_N^{[2]}[0,3]=Q_{N-1}^{[2]}[3] \quad (A-12)$$

である。要素(N-1)が 1_2 型繊維のとき、要素(N-2)が破断していれば2-pletが生成する。したがって、

$$Q_N^{[2]}[0,2,0]=0 \quad (A-13)$$

$$Q_N^{[2]}[0,2,i]=Q_{N-1}^{[2]}[2,i] \quad (i=1,2,3) \quad (A-14)$$

同様に加法定理を用い、式(A-9)(A-10)を考慮することによって、次式を導くことができる。

$$Q_N^{[2]}[0,2]=\sum_{i=0}^3 p_i Q_N^{[2]}[0,2,i]=\sum_{i=1}^3 p_i Q_N^{[2]}[2,i]=\sum_{i=1}^3 p_i Q_{N-1}^{[2]}[i]$$

(2)

$$=Q_{N-1}[1] \quad (A-15)$$

要素(N-1)が 1_0 型または 1_1 型繊維の場合、2-pletが確実に生成する。したがって、

$$Q_N^{[2]}[0,0]=Q_N^{[2]}[0,1]=0 \quad (A-16)$$

である。以上より、

$$\begin{aligned} Q_N^{[2]}[0] &= \sum_{i=0}^3 p_i Q_N^{[2]}[0,i] = p_2 Q_N^{[2]}[0,2] + \hat{p}_3 Q_N^{[2]}[0,3] \\ &= p_2 Q_{N-1}^{[2]}[1] + \hat{p}_3 Q_{N-1}^{[2]}[3] \end{aligned} \quad (A-17)$$

となる。式(A-7)(A-11)(A-17)を行列表示すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} Q_N^{[2]}[3] \\ Q_N^{[2]}[1] \\ Q_N^{[2]}[0] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_2 & p_1 & p_0 \\ \hat{p}_2 & p_1 & 0 \\ \hat{p}_3 & p_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{N-1}^{[2]}[3] \\ Q_{N-1}^{[2]}[1] \\ Q_{N-1}^{[2]}[0] \end{Bmatrix} \quad (A-18)$$

ただし、 $\hat{p}_2 = p_2 + \hat{p}_3$ である。式(A-18)は本文でも示したように、

$$\{Q_{N+1}^{[2]}\} = [Q^{[2]}] \{Q_N^{[2]}\} \quad (A-19)$$

と書くことができる。すなわち、再帰行列は

$$[Q^{[2]}] = \begin{bmatrix} \hat{p}_2 & p_1 & p_0 \\ \hat{p}_2 & p_1 & 0 \\ \hat{p}_3 & p_2 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。式(A-7)より $Q_N^{[2]} = Q_{N+1}^{[2]}[3]$ なので、列ベクトル $\{Q_{N+1}^{[2]}\}$ の第1成分を求めればよい。

2. 3-pletの再帰行列の導出方法

3-pletの生起確率を導出するにあたり、次の確率事象を考える。

$A_N^{[3]}(\sigma) = \{ \text{負荷応力 } \sigma \text{ によって、要素複合体内で3-plet以上の破断連鎖が} \\ \text{1つ発生する。} \}$

$A_N^{[3]}(\sigma)$ の余事象 $\bar{A}_N^{[3]}(\sigma)$ は

$\bar{A}_N^{[3]}(\sigma) = \{ \text{負荷応力 } \sigma \text{ によって、要素複合体内で3-plet以上の破断連鎖が} \\ \text{まったく発生しない(ただし、1-pletあるいは2-pletはいくら発生} \\ \text{してもよい)。} \}$

したがって、3-pletの生起確率 $G_N^{[3]}(\sigma)$ は

$$G_N^{[3]}(\sigma) = \Pr\{A_N^{[3]}(\sigma)\} \quad (\text{A-20})$$

であり、その余事象を満たす確率は

$$Q_N^{[3]}(\sigma) = 1 - G_N^{[3]}(\sigma) = \Pr\{\bar{A}_N^{[3]}(\sigma)\} \quad (\text{A-21})$$

となる。

いま、要素複合体内に配列されたN本の繊維の強度を X_1, X_2, \dots, X_N とし、これらの繊維の破壊確率を、同様に負荷応力と応力集中係数に依存した次の6つの区間に振分ける。

$$\begin{aligned} \Pr\{0 < X_i \leq \sigma\} &= F(\sigma) && (\Rightarrow p_0 \text{ と記す}) \\ \Pr\{\sigma < X_i \leq K_1 \sigma\} &= F(K_1 \sigma) - F(\sigma) && (\Rightarrow p_1 \text{ と記す}) \\ \Pr\{K_1 \sigma < X_i \leq K_2 \sigma\} &= F(K_2 \sigma) - F(K_1 \sigma) && (\Rightarrow p_2 \text{ と記す}) \\ \Pr\{K_2 \sigma < X_i \leq K_3 \sigma\} &= F(K_3 \sigma) - F(K_2 \sigma) && (\Rightarrow p_3 \text{ と記す}) \\ \Pr\{K_3 \sigma < X_i \leq K_4 \sigma\} &= F(K_4 \sigma) - F(K_3 \sigma) && (\Rightarrow p_4 \text{ と記す}) \\ \Pr\{K_4 \sigma < X_i\} &= 1 - F(K_4 \sigma) && (\Rightarrow p_5 \text{ と記す}) \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

ここで、 K_1, \dots, K_4 は破断繊維が隣接繊維に及ぼす応力集中係数を表わす。

さて、N番めに配列された繊維が破壊確率 p_j で生じることを条件とした条件付確率 $Q_N^{[3]}[j]$ の具体的な再帰的解析手法について記す。

1) $Q_N^{[3]}[5]$ の場合(要素Nが l_5 型繊維の場合)

要素(N-1)および(N-2)の破断・未破断に関係なく3-pletは生成し得ないので、 $Q_N^{[3]}[5]$ は $Q_{N-1}^{[3]}$ と等確率である。したがって、

$$Q_N^{[3]}[5] = Q_{N-1}^{[3]} \quad (\text{A-23})$$

である。

2) $Q_N^{[3]}[4]$ の場合(要素Nが l_4 型繊維の場合)

要素(N-1)および(N-2)の破断・未破断に関係なく3-pletは生成し得ないので、 $Q_N^{[3]}[4]$ は $Q_{N-1}^{[3]}$ と等確率である。したがって、

$$Q_N^{[3]}[4] = Q_{N-1}^{[3]} \quad (\text{A-24})$$

である。

3) $Q_N^{[3]}[3]$ の場合(要素Nが l_3 型繊維の場合)

要素(N-1)および(N-2)の破断・未破断に関係なく3-pletは生成し得ないので、 $Q_N^{[3]}[3]$ は $Q_{N-1}^{[3]}$ と等確率である。したがって、

$$Q_N^{[3]}[3] = Q_{N-1}^{[3]} \quad (\text{A-25})$$

である。以上より、

$$Q_N^{[3]}[5] = Q_N^{[3]}[4] = Q_N^{[3]}[3] = Q_{N-1}^{[3]} \quad (\text{A-26})$$

であることがわかる。

4) $Q_N^{[3]}[2]$ の場合(要素Nが l_2 型繊維の場合)

次の配列のとき、要素Nの破断も含めて3-pletは生成する。

$$\begin{array}{ccc} N & N-1 & N-2 \\ [2, & 0, & 0] \end{array}$$

[2, 0, 1]

[2, 1, 0]

したがって、次のように繊維要素の配列数字が除去される。

$$\begin{aligned}
Q_N^{[3]}[2] &= \sum_{i=0}^5 p_i Q_N^{[3]}[2, i] = \sum_{i=2}^5 p_i Q_N^{[3]}[2, i] + \sum_{i=0}^1 p_i Q_N^{[3]}[2, i] \\
&= \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-1}^{[3]}[i] + p_1 \sum_{i=1}^5 p_i Q_N^{[3]}[2, 1, i] + p_0 \sum_{i=2}^5 p_i Q_N^{[3]}[2, 0, i] \\
&= \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-1}^{[3]}[i] + p_1 \sum_{i=1}^5 p_i Q_{N-2}^{[3]}[i] + p_0 \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-2}^{[3]}[i] \quad (A-27)
\end{aligned}$$

5) $Q_N^{[3]}[1]$ の場合 (要素Nが 1_1 型繊維の場合)

次の配列のとき、要素Nの破断も含めて3-plet (以上) は生成する。

N N-1 N-2 N-3 N-4

[1, 0, 0]

[1, 0, 1]

[1, 0, 2]

[1, 0, 3, 0]

[1, 0, 4, 0, 0]

[1, 0, 4, 0, 1]

[1, 0, 4, 1, 0]

[1, 1, 0]

したがって、次のように繊維要素の配列数字が除去される。

$$\begin{aligned}
Q_N^{[3]}[1] &= \sum_{i=0}^5 p_i Q_N^{[3]}[1, i] = \sum_{i=2}^5 p_i Q_N^{[3]}[1, i] + \sum_{i=0}^1 p_i Q_N^{[3]}[1, i] \\
&= \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-1}^{[3]}[i] + p_1 \sum_{i=1}^5 p_i Q_N^{[3]}[1, 1, i] \\
&\quad + p_0 \{ \hat{p}_5 Q_N^{[3]}[1, 0, 5] + p_4 (\sum_{i=2}^5 p_i Q_N^{[3]}[1, 0, 4, i] + p_1 \sum_{i=1}^5 p_i Q_N^{[3]}[1, 0, 4, 1, i]) \\
&\quad + p_0 \sum_{i=2}^5 p_i Q_N^{[3]}[1, 0, 4, 0, i] + p_3 \sum_{i=1}^5 p_i Q_N^{[3]}[1, 0, 3, i] \}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-1}^{[3]}[i] + p_1 \sum_{i=1}^5 p_i Q_{N-2}^{[3]}[i]$$

$$+ p_0 \{ \hat{p}_5 Q_N^{[3]}[5] + p_4 (\sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-3}^{[3]}[i] + p_1 \sum_{i=1}^5 p_i Q_{N-4}^{[3]}[i])$$

$$+ p_0 \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-4}^{[3]}[i] + p_3 \sum_{i=1}^5 p_i Q_{N-3}^{[3]}[i] \} \quad (A-28)$$

いま上式の {} 内をQ'とおくと、

$$Q_N^{[3]}[1, 0] = Q' \quad (A-29)$$

であることがわかる。

6) $Q_N^{[3]}[0]$ の場合 (要素Nが 1_0 型繊維の場合)

次の配列のとき、要素Nの破断も含めて3-plet (以上) は生成する。

N N-1 N-2 N-3 N-4

[0, 0, 0]

[0, 0, 1]

[0, 0, 2]

[0, 0, 3, 0]

[0, 0, 4, 0, 0]

[0, 0, 4, 0, 1]

[0, 0, 4, 1, 0]

[0, 1, 0]

[0, 1, 1]

[0, 1, 2]

[0, 1, 3, 0]

[0, 1, 4, 0, 0]

[0, 1, 4, 0, 1]

[0, 1, 4, 1, 0]

[0, 2, 0]

[0, 3, 0, 0]

$$[0, 3, 0, 1]$$

$$[0, 3, 1, 0]$$

これから、

$$Q_N^{(3)}[0,0] = Q_N^{(3)}[0,1] = Q_N^{(3)}[1,0] (= Q') \quad (A-30)$$

また、

$$Q_N^{(3)}[0,2] = Q_N^{(3)}[1,1] = Q_N^{(3)}[2,1] (= \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-2}^{(3)}[i]) \quad (A-31)$$

であることがわかる。したがって、次のように繊維要素の配列数字が除去される。

$$\begin{aligned} Q_N^{(3)}[0] &= \sum_{i=0}^5 p_i Q_N^{(3)}[0,i] = \sum_{i=4}^5 p_i Q_N^{(3)}[0,i] + \sum_{i=0}^3 p_i Q_N^{(3)}[0,i] \\ &= \sum_{i=4}^5 p_i Q_{N-1}^{(3)}[i] + p_3 (\sum_{i=2}^5 p_i Q_N^{(3)}[0,3,i] + \sum_{i=1}^5 p_i Q_N^{(3)}[0,3,1,i] \\ &\quad + p_0 \sum_{i=2}^5 p_i Q_N^{(3)}[0,3,0,i]) + p_2 \sum_{i=1}^5 p_i Q_N^{(3)}[0,2,i] + p_1 Q' + p_0 Q' \\ &= \sum_{i=4}^5 p_i Q_{N-1}^{(3)}[i] + p_3 (\sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-2}^{(3)}[i] + p_1 \sum_{i=1}^5 p_i Q_{N-3}^{(3)}[i] \\ &\quad + p_0 \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-3}^{(3)}[i]) + p_2 \sum_{i=1}^5 p_i Q_{N-2}^{(3)}[i] + \bar{p}_1 Q' \end{aligned} \quad (A-32)$$

ただし、 $\bar{p}_1 = p_0 + p_1$ である。次に、式(A-26)(A-27)(A-28)(A-32)において、要素Nと要素(N-1)の関係で表わすことを考える。式(A-32)における括弧内は式(A-27)より $Q_{N-1}^{(3)}[2]$ に等しい。さらに式(A-30)(A-31)を考慮することによって、式(A-32)は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} Q_N^{(3)}[0] &= p_4 Q_{N-1}^{(3)}[4] + p_5 Q_{N-1}^{(3)}[5] + p_3 Q_{N-1}^{(3)}[2] + p_2 Q_N^{(3)}[1,1] + p_1 Q_N^{(3)}[0,0] \\ &= \hat{p}_4 Q_{N-1}^{(3)}[5] + p_3 Q_{N-1}^{(3)}[2] + p_2 Q_N^{(3)}[1,1] + p_1 Q_N^{(3)}[0,0] \end{aligned} \quad (A-33)$$

また、

$$\begin{aligned} Q_N^{(3)}[1] &= \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-1}^{(3)}[i] + p_1 \sum_{i=1}^5 p_i Q_{N-2}^{(3)}[i] + p_0 Q' \\ &= \hat{p}_3 Q_{N-1}^{(3)}[5] + p_2 Q_{N-1}^{(3)}[2] + p_1 Q_N^{(3)}[1,1] + p_0 Q_N^{(3)}[0,0] \end{aligned} \quad (A-34)$$

また、 $\sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-2}^{(3)}[i] = \sum_{i=2}^5 p_i Q_N^{(3)}[2,0,i] = Q_N^{(3)}[2,0]$ なので、

$$\begin{aligned} Q_N^{(3)}[2] &= \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-1}^{(3)}[i] + p_1 \sum_{i=1}^5 p_i Q_{N-2}^{(3)}[i] + p_0 \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-2}^{(3)}[i] \\ &= \hat{p}_3 Q_{N-1}^{(3)}[5] + p_2 Q_{N-1}^{(3)}[2] + p_1 Q_N^{(3)}[1,1] + p_0 Q_N^{(3)}[2,0] \end{aligned} \quad (A-35)$$

さらに、

$$\begin{aligned} Q_N^{(3)}[5] &= \sum_{i=0}^5 p_i Q_{N-1}^{(3)}[i] \\ &= \hat{p}_3 Q_{N-1}^{(3)}[5] + p_2 Q_{N-1}^{(3)}[2] + p_1 Q_{N-1}^{(3)}[1] + p_0 Q_{N-1}^{(3)}[0] \end{aligned} \quad (A-36)$$

以上で $Q_N^{(3)}[5]$ 、 $Q_N^{(3)}[2]$ 、 $Q_N^{(3)}[1]$ および $Q_N^{(3)}[0]$ が記述されたが、それらに含まれる $Q_N^{(3)}[1,1]$ 、 $Q_N^{(3)}[0,0]$ および $Q_N^{(3)}[2,0]$ に関するN要素と(N+1)要素の関係を次に明らかにする。

$$\begin{aligned} Q_N^{(3)}[1,1] &= \sum_{i=0}^5 p_i Q_N^{(3)}[1,1,i] = \sum_{i=1}^5 p_i Q_N^{(3)}[1,1,i] = \sum_{i=1}^5 p_i Q_{N-2}^{(3)}[i] \\ &= \sum_{i=3}^5 p_i Q_{N-2}^{(3)}[i] + p_2 Q_{N-2}^{(3)}[2] + p_1 Q_{N-2}^{(3)}[1] \\ &= \hat{p}_3 Q_{N-2}^{(3)}[5] + p_2 Q_{N-2}^{(3)}[2] + p_1 Q_{N-1}^{(3)}[1,1] \end{aligned}$$

$N \rightarrow N+1$ と書きかえると、

$$Q_{N+1}^{(3)}[1,1] = \hat{p}_3 Q_{N-1}^{(3)}[5] + p_2 Q_{N-1}^{(3)}[2] + p_1 Q_N^{(3)}[1,1] \quad (A-37)$$

同様に、

$$\begin{aligned} Q_N^{(3)}[0,0] &= \sum_{i=0}^5 p_i Q_N^{(3)}[0,0,i] = \sum_{i=3}^5 p_i Q_N^{(3)}[0,0,i] \\ &= \hat{p}_5 Q_N^{(3)}[0,0,5] + p_4 \sum_{i=0}^5 Q_N^{(3)}[0,0,4,i] + p_3 \sum_{i=0}^5 Q_N^{(3)}[0,0,3,i] \\ &\quad \dots \dots (A-38) \end{aligned}$$

ここで、3-pletが生じないためには、

$$\sum_{i=0}^5 Q_N^{(3)}[0,0,4,i] = \sum_{i=2}^5 p_i Q_N^{(3)}[0,0,4,i] + p_1 \sum_{i=1}^5 p_i Q_N^{(3)}[0,0,4,1,i]$$

$$\begin{aligned}
& + p_0 \sum_{i=2}^5 p_i Q_N^{[3]}[0,0,4,0,i] \\
= & \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-3}^{[3]}[i] + p_1 \sum_{i=1}^5 p_i Q_{N-4}^{[3]}[i] + p_0 \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-4}^{[3]}[i]
\end{aligned}$$

よって、式(A-35)より

$$\sum_{i=0}^5 Q_N^{[3]}[0,0,4,i] = Q_{N-2}^{[3]}[2] \quad (\text{A-39})$$

また、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^5 Q_N^{[3]}[0,0,3,i] &= \sum_{i=1}^5 p_i Q_N^{[3]}[0,0,3,i] \\
&= \sum_{i=1}^5 p_i Q_{N-3}^{[3]}[i] \\
&= Q_{N-1}^{[3]}[1,1] \quad (\text{式(A-31)より}) \quad (\text{A-40})
\end{aligned}$$

式(A-39)(A-40)を式(A-38)に代入すると、

$$Q_N^{[3]}[0,0] = \hat{p}_5 Q_{N-2}^{[3]}[5] + p_4 Q_{N-2}^{[3]}[2] + p_3 Q_{N-1}^{[3]}[1,1] \quad (\text{A-41})$$

$N \rightarrow N+1$ と書きかえると、

$$Q_{N+1}^{[3]}[0,0] = \hat{p}_5 Q_{N-1}^{[3]}[5] + p_4 Q_{N-1}^{[3]}[2] + p_3 Q_N^{[3]}[1,1] \quad (\text{A-42})$$

同様にして、

$$\begin{aligned}
Q_N^{[3]}[2,0] &= \sum_{i=2}^5 p_i Q_N^{[3]}[2,0,i] \\
&= \sum_{i=4}^5 p_i Q_N^{[3]}[2,0,i] + p_3 Q_N^{[3]}[2,0,3] + p_2 Q_N^{[3]}[2,0,2] \\
&= \sum_{i=4}^5 p_i Q_{N-2}^{[3]}[i] + p_3 Q_{N-1}^{[3]}[0,3] + p_2 Q_{N-1}^{[3]}[0,2] \\
&= \hat{p}_4 Q_{N-2}^{[3]}[5] + p_3 Q_{N-2}^{[3]}[2] + p_2 Q_{N-1}^{[3]}[1,1] \quad (\text{A-43})
\end{aligned}$$

ここで、式(A-43)の右辺第2項は

$$\begin{aligned}
Q_{N-1}^{[3]}[0,3] &= \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-1}^{[3]}[0,3,i] + p_1 \sum_{i=1}^5 p_i Q_{N-1}^{[3]}[0,3,1,i] \\
&\quad + p_0 \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-1}^{[3]}[0,3,0,i]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-3}^{[3]}[i] + p_1 \sum_{i=1}^5 p_i Q_{N-4}^{[3]}[i] + p_0 \sum_{i=2}^5 p_i Q_{N-4}^{[3]}[i] \\
&= Q_{N-2}^{[3]}[2] \quad (\text{式(A-35)より}) \quad (\text{A-44})
\end{aligned}$$

から求められる。 $N \rightarrow N+1$ と書きかえると、

$$Q_{N+1}^{[3]}[2,0] = \hat{p}_4 Q_{N-1}^{[3]}[5] + p_3 Q_{N-1}^{[3]}[2] + p_2 Q_N^{[3]}[1,1] \quad (\text{A-45})$$

式(A-33)~(A-37)(A-42)(A-45)を行列表示すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} Q_N^{[3]}[5] \\ Q_N^{[3]}[2] \\ Q_N^{[3]}[1] \\ Q_N^{[3]}[0] \\ Q_{N+1}^{[3]}[1,1] \\ Q_{N+1}^{[3]}[2,0] \\ Q_{N+1}^{[3]}[0,0] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{p}_3 & p_2 & 0 & 0 & p_1 & p_0 & 0 \\ \hat{p}_3 & p_2 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_0 \\ \hat{p}_4 & p_3 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \bar{p}_1 \\ \hat{p}_3 & p_2 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 \\ \hat{p}_4 & p_3 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 \\ \hat{p}_5 & p_4 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_{N-1}^{[3]}[5] \\ Q_{N-1}^{[3]}[2] \\ Q_{N-1}^{[3]}[1] \\ Q_{N-1}^{[3]}[0] \\ Q_N^{[3]}[1,1] \\ Q_N^{[3]}[2,0] \\ Q_N^{[3]}[0,0] \end{Bmatrix} \quad (\text{A-46})$$

ただし、 $\hat{p}_i = \sum_{j=i}^5 p_j$, ($i=3,4$), $\bar{p}_1 = p_0 + p_1$ である。式(A-46)は、

$$\{Q_{N+1}^{[3]}\} = [Q^{[3]}] \{Q_N^{[3]}\} \quad (\text{A-47})$$

と書くことができる。すなわち、再帰行列は

$$[Q^{[3]}] = \begin{bmatrix} \hat{p}_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{p}_3 & p_2 & 0 & 0 & p_1 & p_0 & 0 \\ \hat{p}_3 & p_2 & 0 & 0 & p_1 & 0 & p_0 \\ \hat{p}_4 & p_3 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \bar{p}_1 \\ \hat{p}_3 & p_2 & 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 \\ \hat{p}_4 & p_3 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 \\ \hat{p}_5 & p_4 & 0 & 0 & p_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A-48})$$

となる。式(A-23)より $Q_N^{[3]} = Q_{N+1}^{[3]}[5]$ なので、列ベクトル $\{Q_{N+1}^{[3]}\}$ の第1成分を求めればよい。

第2章. セラミック繊維の強度分布評価

- 1) 合田公一、福永秀春、東原昭仁、数種類の欠陥を有するセラミック繊維の引張強さ分布に関する研究、日本機械学会論文集(A編)、52巻、480号(1986), pp.1848-1853.
- 2) K.Goda and H.Fukunaga, The Evaluation of the Strength Distribution of Silicon Carbide and Alumina Fibers by a Multi-Modal Weibull Distribution, Journal of Material Science, Vol.21, No.12(1986), pp.4475-4480.
- 3) K.Goda and H.Fukunaga, The Application of Multi-Modal Weibull Distribution to Tensile Strength Distribution of Ceramic Fiber, Proceedings of 2nd Asian-Pacific Congress on Strength Evaluation, (1986), pp.359-364.

第3章. 反応層を有するセラミック繊維の強度分布評価

- 4) 福永秀春、合田公一、田端伸雄、FRM製造過程でのSiC繊維の強度特性に関する研究、日本機械学会論文集(A編)、51巻、462号(1985), pp.469-472.
- 5) H.Fukunaga and K.Goda, The Tensile Characteristics of Coreless Silicon Carbide Fiber Exposed to Some Environments, SAMPE Journal, 11/12 (1985), pp.27-31.
- 6) 合田公一、福永秀春、三好隆雄、SiCコーティングした炭素繊維の引張強さとFRMへの適用、日本機械学会論文集(A編)、52巻、474号(1986), pp.476-480.
- 7) K.Goda and H.Fukunaga, Strength Distribution of Ceramic Fibers Including Defects on Interfacial Reaction Layer, 6th International Conference on Composite Materials and 2nd European Conference on Composite Materials, Vol.5 (Elsevier Applied Science, July 20-24, 1987, England), pp.5507-5516.

第4章. 複合材内の繊維破断を利用した強化繊維の新しいワイブル母数推定法

- 8) 合田公一、山本匡章、福永秀春、束試験を利用した繊維強度分布の推定、日本機械学会論文集(A編)、53巻、491号(1987), pp.1234-1238.
- 9) 合田公一、山本匡章、福永秀春、一方向強化複合材内の繊維破断を利用した強化繊維の新しいワイブル母数推定法、日本機械学会論文集(A編)、54巻、502号(1988), pp.1191-1194.

第5章. ホットプレス法によるボロン繊維強化アルミニウム複合材の調製と強化繊維のワイブル母数の推定

- 10) 合田公一、福永秀春、糸永真須美、B₄C被覆ボロン繊維強化Al複合材の引張強さに及ぼすホットプレス温度の影響、日本機械学会論文集(A編)、53巻、486号(1987), pp.180-184.
- 11) 合田公一、糸永真須美、福永秀春、FRM内の最弱繊維破壊によるワイブル母数の推定とFRMの強度評価、日本機械学会論文集(A編)、54巻、500号(1988), pp.753-761.

第6章. 再帰法によるFRMの強度分布評価

- 12) 合田公一、福永秀春、再帰法によるボロン繊維強化アルミニウム基複合材料の強度分布評価、鉄と鋼、75巻、9号(1989), pp.1761-1768.
- 13) K.Goda and H.Fukunaga, Strength Evaluation of FRM by Recursion Analysis Technique, Proceedings of 3rd Asian-Pacific Congress on Strength Evaluation, (1989), pp.443-448.

第7章. シアラゲ理論によるFRM内の応力集中係数とその統計的取扱い

- 14) 合田公一、田中誠一郎、福永秀春、シアラゲ理論によるFRM内の応力集中係数とその統計的取扱い、日本機械学会論文集(A編)、55巻、511号(1989), pp.608-613.

第8章. シアラゲ理論によるFRMの強度シミュレーションとその評価

- 15) K.Goda and H.Fukunaga, Consideration of the Reliability of Tensile Strength at Elevated Temperature of Unidirectional Metal Matrix Composites, Composite Science and Technology, Vol.35(1989), pp.181-193.
- 16) K.Goda and H.Fukunaga, Reliability of Static Strength in Unidirectional Metal Matrix Composites at Elevated Temperature, Proceedings of International Meeting on Advanced Materials (June 23-26, 1988, Tokyo), Vol.4(1988).

謝 辞

本研究は、広島大学工学部第一類 機械材料工学講座 機械工作学研究室において、広島大学・福永秀春教授の指導のもとに行なわれた。ここに、同教授の懇篤なご指導とご鞭撻に対し心より感謝の意を表します。また、同大学・片島三朗教授、大森正信教授、寺内喜男教授および柳沢平助教授には、本研究に対する有益なご検討を賜わった。ここに、慎んで感謝の意を表します。また、日頃より同大学・中佐啓治郎助教授、吉田総仁助教授、藤本由起夫助教授、伊藤操講師および畑山東明氏にはたび重なるご助言を頂いた。ここに、厚くお礼申し上げます。

香川大学・石川浩教授、山口大学・幡中憲治教授、東京工業大学・松尾陽太郎助教授、東京理科大学・福田博助教授、当時中国工業技術試験所・吉田憲一氏（現：徳島大学助教授）および大阪工業技術試験所・沢田吉裕氏には、本研究に対する有益なご教示とご討論を賜わった。ここに、心より感謝の意を表します。

さらに、ホットプレス装置による試験片製作に多大なご協力を頂いた広島県立西部工業技術センターの高崎宗利氏、土取功氏および新田明氏に、および繊維の引張試験法と提供にご協力頂いた三菱レーヨン㈱の浅井肇氏および田中雅裕氏に深く感謝の意を表します。

また、当時広島大学大学院・田端伸雄氏、東原昭仁氏、三好隆雄氏、糸永真須美氏、山本匡章氏および田中誠一郎氏には、共同研究者としてご尽力頂いた。さらに、広田秀徳技官、内田彭子事務官ならびに卒業研究生の方々をはじめ、本研究を遂行するにあたり多くの方々からご支援を頂いた。ここに厚くお礼申し上げます。

