

中学校・高等学校における新しい数学科教育課程の研究開発(4)

——学びの転換をめざす数学科の授業のあり方——

中原 忠男 小山 正孝 井上 芳文
井ノ迫泰弘 宇佐川信行 河野 芳文
酒井 秀二 砂原 徹 富永 和宏
長尾 篤志 仲渡 雅史

1. はじめに

新しい学習指導要領による教育課程実施が中学校では1年後、高等学校では2年後となった。授業時間数や内容の大幅削減がいよいよ実施されることになる。われわれは、学習指導要領が告示される以前から、学校5日制の影響などによって授業時間数の削減は避けられないものと考え、その前提のもとに教育課程の研究を進めてきた。少ない授業時間数であっても、生徒達の学びがこれまで以上に主体的、積極的になり、充実した数学的活動によってその楽しさや意義が十分感じられ、数学の学習が生きてはたらく学力となることを目指さなければならない。

本研究の(1)~(3)^{1)~3)}では、授業時間数の削減と学習の充実を両立させるためには、教育課程に「重点化」「弾力化」の考えを取り入れることが重要となってくることを主張し、具体的にその実現の可能性を論じてきた。それとあわせて「数学総合学習」の導入も提言してきたが、これについてはまだかなり検討の余地を残してきている。新教育課程では教科とは別に「総合的な学習の時間」が実施されることになるが、これは、生徒達の学びが多く断片的な知識の注入になりがちになっていることへの反省から生まれたものである。しかし、その反省は従来からの教科を削減しなければ生かされないというものではない。数学科でも、学びを総合化されたものへと転換させていくことによって生かすことができる。

本年度は、学びの総合化を目指す数学科教育課程の研究を手がけるために、「学びの転換」を目指す数学科授業のあり方について検討を進めることにした。本研究が数学科の枠内の授業改善を目指しているのはもちろんであるが、総合的な学習の時間で数学的な内容

を扱う際の方策ともなると考えている。

2. 学びの転換とは⁴⁾

ところで、数学科の授業における「学びの転換」を具体的に述べると、次の4点をあげることができる。

- | | |
|---------------|---------------|
| (1) 教授中心からの転換 | (2) 認知中心からの転換 |
| (3) 数学中心からの転換 | (4) 知識中心からの転換 |

(1)は指導者中心・教授中心の授業からの転換を目指すことを意味し、教え授ける(Teaching)のではなく、学習者が学ぶ(Learning)授業を目指すこと、(2)は知的面中心の授業、認知中心の授業からの転換が必要ということで、情緒や興味・関心の面を考慮・重視し、学びたくなるような授業配慮を取り入れること、また、(3)は数学の内容を中心とするのではなく、実生活の問題から出発し、その問題を解決することを目指すようにすることであり、さらに、(4)知識中心の授業からの転換が必要であることも指摘される。

では、なぜ「学びの転換」が求められるのであろうか。それは次の4つの側面から考えることができる。

- | | |
|------------------|-------------|
| (1) 生徒の立場から | (2) 数学的視座から |
| (3) 教育学・心理学的視座から | (4) 社会的視座から |

(1)可能な限り学習者の立場にたち、考え方を試行や実験によって発見・理解させる必要があること、また、(2)、(3)数学的視座や、教育学・心理学的視座から、体を呈しての学習が必要であること、(4)社会的視座からも学びの転換が必要であることと、それぞれその理由をあげることができる。

そして、このような「学びの転換」を目指す授業を

Tadao Nakahara, Masataka Koyama, Yoshifumi Inoue, Yasuhiro Inosako, Nobuyuki Usagawa, Yoshifumi Kohno, Shuji Sakai, Toru Sunahara, Kazuhiro Tominaga, Atsushi Nagao, and Masafumi Nakato: A Study on Curriculum Development of Mathematics in Junior and Senior High Schools (4)

—For Changing the Nature of Learning Mathematics in a Classroom—

可能にするために、次の4つの方策が考えられる。

- | | |
|--------------|--------------|
| (1) 数学的活動の重視 | (2) 導入題の工夫 |
| (3) 自力解決の重視 | (4) 相互作用の活性化 |

指導者が意識を変え、(1)観察・実験・操作などの数学的活動を重視し、(2)作業的・体験的場面や実生活と関わらせた工夫された導入題を、(3)自然な形で生徒同士で相談しながら解決するという自力解決を重視し、(4)教授を控えることによって、生徒同士の学び合いにみられる相互作用を活性化することが有効であると考えられる。

3. 学びの転換を目指す「数学総合学習」

従来の教科の学習が生きてはたらく学力を身につけさせているかという批判から、「総合的な学習の時間」が導入された。「総合的な学習の時間」は多くの学校で先導的試行がなされているが、指導の準備や継続での相当な負担にもかかわらず、学習目標、学習効果、評価が曖昧になってしまうこと、学習内容の系統性が欠落しがちなことなど、困難さが早くも多く指摘されている。

このような状況の中で、われわれは、教科の中で生きてはたらく学力をつけることを意図した「数学総合学習」が必要であると考えた。「数学総合学習」は本研究(1)で構想したものであるが、そのポイントは次の3点であると考えている。

- ①同一学年の複数領域、または複数学年の領域に関係する内容である。
- ②学習者中心の授業となる工夫、例えば実験・実測・操作等を取り入れたり、数学のおもしろさや有用性が感得できる内容である。
- ③特別に他教科と連携をとらなくても数学科教師の力量で展開できる内容である。

このような教材を各学年でいくつか準備し、関係する教材の学習が終わったときや学期や学年の終わりの頃、数時間で集中的に扱うように構成する。他教科との連携が特に必要な場合は無理に教科の中には取り込まず、他教科との協力のもとで総合的な学習の時間での実施とする。

「数学総合学習」の時間で重点的に「学びの転換」を図ることによって生徒の意識が変化し、日々の数学科の授業にも転移し、学びの質的変化が可能になり、自ら課題を見つけ、自ら考え自ら解決する学力を培うことができると考えている。さらに、前述の「総合的な学習の時間」における問題点も克服していくことができるのではないかと考えている。

次にこのような授業の展開例を示してみよう。

4. 具体的な展開事例

I. 三角形の重心 —中学校第2学年の場合—

a. 学びの転換を目指すためのこの授業の工夫点

新学習指導要領では、従来中学校第2学年で学習していた三角形の性質のうち、合同条件を用いて考察できるものを中学校第2学年、相似や平行線と線分の比の性質を用いて考察できるものを中学校第3学年、三角形の重心や外心・内心などについては、高等学校の数学Aで学習するようになる。しかし、課題の発見から解決まで一貫して考えさせることができ、また作業や実験も十分とり入れて発展的な扱いができるようにするためには、内容が多少高度であるといつて内容を細分化して学年を先送りにしてしまうことは、必ずしも賢明であるとはいえないであろう。むしろ早い段階での学習のほうが「学びの転換」を目指すには望ましいことさえある。「学びの転換」を目指すポイントとして、次の3点を考え、教材開発を試みた。

- ①生徒が学習に対して興味・関心を持てるように、発展性があり他領域と関連して扱うことのできる題材を用いること。
- ②実験・実測や操作的活動を取り入れ、意欲的で主体的に学習に取り組むことができるようにすること。
- ③その学習を通じて数学的な見方や考え方のよさを実感できたり、学習内容を活かしてさらなる発見ができるように学習活動を展開すること。

ここでは「三角形の重心」を題材としてこれらのポイントを具現化する授業開発を試みることにした。三角形の重心には、数学的な性質だけでなく力学的な性質もあるので、学習に発展性が生まれ、他領域の内容もあわせて学習することができ、総合的な学習の題材ともなる。また、重心の位置を見つけようとする実験には、生徒も学習へ強い意欲を持って参加すると思われる。図形の性質の学習が、ともすれば演繹的な思考やその証明法を理解させることに主眼が置かれ、生徒にとっては受動的な学習になりがちであるのに対して、実験は具体的活動をとまなうこと、また、重心の位置探しは、学習内容を具体的に物理的事象として確かめられることから、それを通して数学的な見方や考え方のよさ(実用性、有用性)を理解できるからである。そしてさらに三角形の重心を発展させた四角形の重心の位置探しは、今までの学習内容を生かして新たな課題の解決にあたるという発展性に富む教材であり、生徒自ら興味・関心を持って取り組むことができる教材である。

b. 授業の実際

授業者：富永 和宏

題 目：四角形の重心

目 標：四角形の重心の位置が今までの学習内容を利用して求められることを理解させる。

指導過程：

(導入)

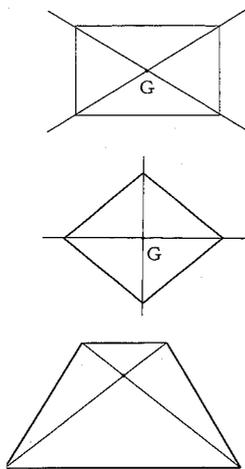
○前時の学習内容の復習と本時の課題の確認

- ・前時の復習として三角形の重心の位置を確認する。
- ・本時の課題として、四角形の重心の位置を求めることをいう。

(展開)

○いろいろな四角形の重心の位置を考える。

- ・長方形やひし形を示し、重心Gの位置を問う。また、そう考えた理由も問う。
- ・実際に長方形やひし形に切った厚紙が、上記の点Gでつり合って支えられることを演示する。
- ・左右対称な等脚台形を示し、重心の位置を問う。また、そう考えた理由も問う。
- ・実際に左右対称な等脚台形に切った厚紙が、上記の点ではつり合って支えられないことを演示する。
- ・再度、左右対称な等脚台形の重心の位置はどこかを問いかける。
- ・探すポイントとして対称軸に着目すればよいことを確認し、左右対称な等脚台形に切った厚紙を配布し、各自で重心の位置を探させる。
- ・発見した生徒に発表させて、重心の位置を全員で確認する。
- ・四角形の重心の位置を、試行錯誤でなく図形的な性質から求めることはできないか問いかける。
- ・前々時の内容として、三角形の重心を通る直線で三角形をつり合って支えられたことを確認し、課題を考えるヒントとする。
- ・対角線で2つの三角形に分け、それぞれの重心を結ぶ直線ならそれぞれの三角形をつり合って支えられることから、等脚台形をつり合って支えられる直線について考えさせる。
- ・対角線で分けられた2つの三角形の重心を結ぶ直線と対称軸との交点が重心になることを厚紙を用いて



確認する。

(まとめ)

- ・四角形の重心は、四角形をつり合って支えられる直線の交点であることを、長方形やひし形、等脚台形などの具体的な図形の例をあげて確認する。
- ・次時の課題として、一般の四角形の重心について考えることを予告する。

生徒の反応：

- ・長方形やひし形の重心はすぐに答が返ってきた。その理由としては対角線の交点というのが一番多く、次いで対辺の midpoint を結んだ直線の交点であった。
- ・等脚台形の重心も同様に対角線の交点をあげる生徒が多かった。上底と下底の midpoint 同士、斜辺の midpoint 同士を結んだ直線の交点、または対称軸の midpoint という答も少数ではあるがいた。
- ・対称軸上の重心を探す実験はかなりにぎやかなものとなったが、生徒は意欲的に取り組んでいた。重心を発見するには、図形的な性質を考えて位置を探すよりも、つり合いのとれる点を試行錯誤で探す生徒がほとんどであった。(前々時の実験で三角形の重心を作図で求めても、実際にはなかなかつり合いがとれなかった経緯がある。)
- ・重心の位置を求めるのにつり合って支えられる直線を利用することは、前々時の三角形の重心のときにやっていたので、かなりの生徒がその方法で試していた。その結果が自分の求めた重心とほぼ一致していることを確かめられた生徒達は、かなり嬉しそうであった。
- ・次時の課題としてあげた一般の四角形の重心の位置も、休み時間の中に考えたのか、指導者に自分の解答を確かめにくる生徒も幾人かいて、今回の授業はかなり参加意識も高く、生徒に課題を解こうという意欲を持たせたものであることが確認できた。

c. 今後の課題

生徒の主体的な活動により、発見的に学習を進める授業を目指して今回の授業を実施した。確かに、実験の際の生徒が本気で重心を探している様子や、つり合って支える直線を見つけたアイデアを相談し合っている場面などは、ねらい通りの学習活動が展開できたところである。

さらに、本時の課題は「等脚台形の重心は対称軸をどのような比に内分するか」など、いろいろな課題に発展させることができ、これをもとに生徒同士で新しい課題を出し合わせるような活動も考えられる。

また、カブリ等のコンピュータソフトウェアを用いて、いろいろな図形の重心についてシミュレーションを通してその性質を観察し、考察することも、生徒が

発見的に学習を進められる方法である。このように、学びの転換を目指す授業はいろいろな構成・展開が考えられる。今後も学びの転換を目指して、授業の構成に工夫を加えて授業を実施していきたい。

ただ、すべての授業において、生徒の主体的な活動による発見的な学習が展開できるとは限らない。三角形の中線が重心で2：1に内分されることや、頂点と重心を結んだ線で三角形の面積が3等分されることなどは、なかなか主体的な活動から発見的に導くことは容易ではない。知識や技能の習得もまた大切な学習活動の1つではある。であるからこそ、普段の学習活動の中に生徒が興味や関心を持って取り組めるような工夫が大切であり、それを日頃から心がけ、目指すような授業展開を行うことが学びの転換を図る第一歩となる。

ところで、本時で取り上げたような、発展性があり他の領域と関連させられる教材については、「選択課題学習」や「総合的な学習」として、生徒の興味・関心や理解の程度に応じて扱っていくことも考えられる。そのためには、生徒の意欲・関心・態度など活動内容を評価することも重要となる。今後の課題の1つである。

II. 円の性質と四角形 — 中学校第3学年の場合 —

a. 学びの転換を目指すためのこの授業の工夫点

普段の授業では、教科書を意識するあまり、とかく講義式あるいは注入型の授業になりがちであるが、学びの転換を目指すために、必要な場面では観察、操作などの活動を取り入れて、生徒自身が考察したり、問題解決ができるように配慮すべきである。また、生徒にとって身近な教材を提供したり、彼らが自ら取り組み、理解しながら進められる授業が求められる。

こうした認識に基づいて、今年度の中学3年生の図形領域の授業では、学びの転換を目指す1つの試みとして、考えさせる場面においては時間をとり、重要な性質に関連しては、それにまつわる話題を提供するなどして理解の深化を図るよう心がけてきた。しかし、そうした話題の提供においても、一人の教員の力には限界があり、多くの先生方の経験や知識に頼らざるを得ない。あるいは、生徒からの思わぬ問題提起に助けられることもありうるであろう。

以下に述べるサッカーを教材とする実践は、上記のような学びの転換を意図した例であって、生徒とのやり取りに端を発し、場面設定では同僚の教員との会話やある教科書の文章題に恩恵を受けたものである。

サッカーは、生徒達にとって身近な競技であり、1時間をかけてサッカーのルールを調べさせたり、広島ゆかりのサッカーチームであるサンフレッチェの選手の一人についてそのポジションや役割を調べさせるこ

とにより、次時の授業に対する取り組みの姿勢にも明らかな違いが現れるであろう。こうした展開は、新学習指導要領における「総合的な学習の時間」にも通ずるものであり、学びの転換を目指す教材例になると考えている。

b. 授業の実際

授業者：河野 芳文

題目：ナイスシュート！

— 2点を見込む角が最大となる点の決定 —

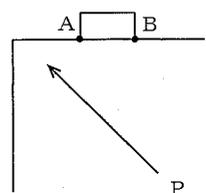
目標：

1. 方べきの定理を含めた円に関連する性質の学習を踏まえて、直線 l 上の点 P で、 l 外の2定点 A 、 B を見込む角が最大となるものが持つべき性質を考察させ、その位置を特定させる。
2. 特定できた点 P の位置を作図によって求める方法について考えさせる。
3. サッカーのシュートという現実的な問題が、いかにして数学的に定式化され、合理的に考察され解決できるかを知らせることにより、数学的な見方・考え方のよさを知らせる。

指導過程：

(導入) 課題

課題：サッカーの試合で、右図の位置にいる P が、ボールをとらえた。



P はいっきに矢印の方向に走り、ゴールめがけてシュートするつもりであるが、シュートを決めるためにも $\angle APB$ が最大になる地点でシュートしたい。その地点を求めよ。

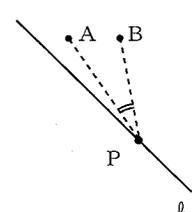
・問題の意味を丁寧に説明し、何をすればよいのか理解させる。

(展開)

円周角の性質の利用

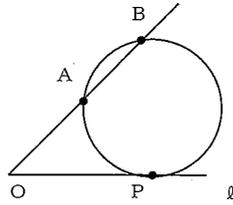
- ・2定点 A 、 B に対し、直線 l 上の点 P をいくつかとり、点 P から2定点 A 、 B を見込む角 $\angle APB$ が最大となる点 P について考えさせ、発表させる。
- ・2定点 A 、 B を通る円に気付かせ、円周角の性質との関係から、点 P の位置を考えさせる。
 - ①生徒に、いくつか発表させる。
 - ②発表させた答に基づいて、点 P は円が直線 l に接するときの接点であることに気付かせる。

接点 P の作図法



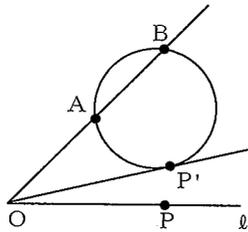
- ・接点Pの作図法について考えさせる。
①線分ABの垂直二等分線に注目したり、直線ABと直線ℓのなす角の二等分線に着目すると考えられるが、きちんと論理的に考察させる。

- ・直線ABと直線ℓの交点をOとすると、
 $OP^2 = OA \cdot OB$
この関係を使って、点Pの位置を作図する方法はないか考えさせる。



- ・方べきの定理に気付かせ、2定点A, Bを通る円にOから引いた接線の長さがどうであるか考えさせる。

- ①方べきの定理の式から判断させたり、いくつかの円とその接線を描かせるなどして考えさせる。



- ・こうした考察を踏まえて、2定点A, Bを通る円を1つ描き、Oからこの円に引いた接線の長さを計り、それをOPとしてℓ上にとればよいことに気付かせる。
- ・点Pを作図させる。

(まとめ)

- ・私たちの周りには、数学的に捉え直すことにより、数学的に考察できる問題があることを確認する。
- ・そのような場面で、数学が極めて有効にはたらくこと、これにより、数学的なものの見方のよさ、考え方のよさが分かることを確認する。
- ・円周角の性質や、方べきの定理の美しさや有用性を理解する。

c. 反省と今後の課題

今年度の中学3年生に対する図形指導では、その指導過程で操作活動や興味ある関連教材の投げ入れなどの工夫のほか、多くの場面で時間をとり生徒自身に考えさせるなどを心がけてきた。題材が変わった上、生徒自身に考えさせる時間を増やすよう心がけたせいもあってか、1学期の授業に比べて生徒の姿勢が心なしか意欲的であり、いくつかの定理は生徒自らが取り組んでその証明を発見することができた。扱った内容は、円の性質、円周角の定理とその逆、円に内接する四角形の性質と内接するための条件、接弦定理のほか方べきの定理などであったが、操作活動などもあり比較的スムーズな展開ができたと思われる。

こうした感触もあって、今回の課題で2定点A, B

を通る円を着想する生徒が出ることに対する不安はなかったが、点Pを特定することはやはり難しく、時間を要することになってしまった。しかし、生徒から出てきた誤答をもとに正しい結果を導くことができる幸運に恵まれた。

こうして、点Pの位置を特定することはできたが、その点Pの位置を作図によって求めることについては、方べきの定理への連想の難しさもあり、難渋を極めた。それにもかかわらず、生徒はその作図法を求めて懸命に取り組んでくれたと思う。そうした熱心さもあり、方べきの定理のヒントを出すことをあきらめてこの授業を終えることになった。(その後すぐ、一人の生徒から作図に成功したとの報告を受けた。)

次時において、作図においては方べきの定理がどのように関わるか考えさせ、作図可能であることを納得させることができた。

今回の授業を振り返って、サッカーという生徒に身近な話題を扱った点は興味・関心を抱かせる点で有効であったと思われるが、点Pの特定を踏まえた上で作図にどう結びつけるかについては工夫が足らず、生徒自身による解決に導くことができないままになってしまった。そうした意味で、生徒の知識や経験に対する配慮が不足していたことを認めざるを得ない。こうした反省の上になつて、これ以降の教材に取り組む必要を感じている。

Ⅲ. 数列 一高等学校第1学年の場合一

a. 学びの転換を目指すためのこの授業の工夫点

授業は各教科ごとに独立して行われるものであり、1つの題材を生徒が様々な教科の視点から総合的に研究する「学び」は、従来は極めて困難であった。「総合的な学習の時間」の設定によって、教科の枠を越えた「学び」が期待されている。以下に提示する授業実践「生態系を考える」は、昆虫の増減という身近な現象を、生物学、気象学、環境学、コンピュータなどの様々な視点や手段も生かしながら総合的に考える「学び」の中で、身近な現象の中に自ら課題を発見しようとする主体的な態度とよりよく問題を解決しようとする資質を養うことを目指している。この授業実践は、数学科の授業として実践したもので、特別に他教科と連携をとらなくても実施できる「数学総合学習」の一例であるが、他教科と緊密な関連もあり「総合的な学習の時間」での実施が十分考えられる題材である。いずれの実施形態であっても、学びの転換を目指す授業事例となると考えている。

b. 授業の実際

題目：生態系を考える

授業者：仲渡 雅史

目標：昆虫の増減という身近な現象について、生物学、気象学、環境学、コンピュータなど様々な視点や手段も生かして総合的に考えさせることにより、身近な現象の中に自ら課題を発見しようとする主体的な態度と、よりよく問題を解決しようとする資質を養う。

指導計画：

1. 漸化式と数列…………… 1時間
2. 漸化式における表計算の利用…………… 1時間
3. 表計算による被食—捕食シミュレーション…………… 2時間
4. 生態系を考える…………… 2時間

(本時はその第1時)

本実践以前には、生徒はまだ数学Aの数列を学習していなかった。そこで第1時では、数列と漸化式について、本題材の学習に必要な最低限の内容を扱った。具体的には、数列の定義と漸化式から順次数列の各項を求めることを扱ったが、数列の一般項、等差数列、等比数列などについては扱っていない。

第2時にはコンピュータ教室において、表計算ソフトウェアを利用して漸化式から数列を求める方法を扱った。

第3時、第4時には、まず、インターネットから被食—捕食関係の説明や、被食者と捕食者の個体数に関するロトカーヴォルテラモデルの資料をとりよせ、生徒に提示した。次に、表計算ソフトウェアを用いて作成した芋虫(被食者)とハチ(捕食者)の個体数シミュレーションを提示して、害虫である芋虫(被食者)の個体数を、一過的に激減させたり定期的に激減させたりするシミュレーションを行わせ、結果をプリントにまとめさせた。

本時は、前時に作成したシミュレーションの変数操作が、環境のどのような変化によってもたらされるか考えさせ、農薬や環境破壊等による個体数変化が生態系に及ぼす影響を、漸化式を利用したシミュレーションにより予想させた。また、予想が現実に対応した例についても、害虫の大量発生などに触れ、数学的な手法の有用性を印象づけることを試みた。

本時の授業過程：

(導入)

○前時に作成したシミュレーション

・前時に作成した捕食—被食モデルで作成したいくつかのシミュレーションのうち、両種個体数を定期的に激減させたシミュレーション結果を、プロジェクタ等を用いて発表させる。

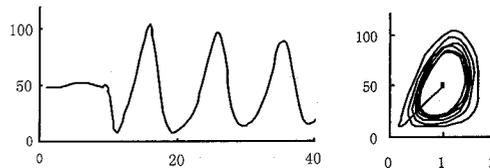
(展開)

○課題の設定

・シミュレーションが現実となった場合、どのようなことが予想されるか、考察させる。

課題1：次のシミュレーションを見て考えよう。

- (1) 現実に両種の個体数激減がおきるのはどのような場合か。
- (2) 結果から、どのようなことが予想されるか。



- ・(1)については「農薬散布」、「環境破壊」などの予想を、(2)については「農薬散布すると数世代後に大発生する」、「一度撒いたらこまめに撒き続けないといけなくなる」等、予想をプリントにまとめさせ、全体にも提示する。
- ・身近にこれらと同種の現象が起こっていないか考えさせる。

○課題の探究

- ・前時に作成した、その他のシミュレーションについても、課題1と同様に考察する。

課題2：前時に作成した、それぞれのシミュレーションについて、次の考察を加えよ。

- (1) 想定した環境変化が現実におきるのはどのような場合か。
- (2) 結果から、どのようなことが予想されるか。

- ・予想をまとめさせる。
- ・身近でこれらと同種の現象が存在しないか考える。また、逆にシミュレーションの結果に反する現象が存在しないか考える。
- ・生態系における個体数調査結果の実例を紹介する。(まとめ)
- ・漸化式を利用したシミュレーションの有用性や、その限界について考えさせる。

c. 今後の課題

本実践の目標は、様々な視点、様々な手段を用いて身近な現象を総合的に考えさせることにより、自ら課題を発見しようとする主体的な態度とよりよく問題を解決しようとする資質を養うことであった。しかし、様々な視点の導入を目指したものの、数学科教官1名で授業を行ったため、現実には生物学や環境学などの視点は表面的な知識の伝達に偏りがちであった。単に

環境破壊や農業の問題だけでなく、種の多様性や生物環境の多様性と環境の安定の問題など、生徒の視点を様々に多様化して、生徒の「学び」をより総合化することも考えられたが、「数学総合学習」の中ではそれはなしえなかった。まず授業計画を立案する際、数学科の授業として考えるのか、他教科とも協力して「総合的な学習の時間」の授業として考えるのか、立場を明確にしておかなければ、学びの総合化も中途半端になってしまうということを認識させられる。

今回、授業を計画するにあたり、題材の候補としては「地元の吊り橋」や「惑星軌道の計算」など、様々な候補があった。例えば「地元の吊り橋」であれば、ベクトルを数学と理科の両教科にまたがって考え、建築の経緯や地域での役割の変遷を図書館やインターネットで調べたり、近くの住人へインタビューをしたりするなど、様々な教科や、教科以外の視点、地域との繋がりなど、「総合的な学習の時間」の題材として、その主旨を活かすことができるであろう。

数学という教科と「総合的な学習」とがどう連携をとっていくか、生きてはたらく力の獲得を目指すという目標は共通であっても、具体的にはそれぞれが何を目標としてどういう役割分担をしていくのか、考えていかなければならない課題である。

IV. 指数関数・対数関数—高等学校第2学年の場合—

a. 学びの転換を目指すためのこの授業の工夫点

数学教育において、興味・関心ということがいわれられて久しい。画一的な授業における、知識理解が中心であった学習からの転換として、生徒が自ら考え、自主的に探求できるような学習環境を整備することが要求されてきた。こうした学習が重視される中、生徒の興味・関心を喚起できるような学習教材の開発が盛んになされ、いろいろな分野から様々な話題が数学の授業に持ち込まれた。ところが、私自身がこのような視点で題材を扱う場合に、おもしろいから生徒の興味を引くであろうという面ばかりに目が向いて、数学の中での位置づけや目標が明確でないことがあった。数学教育における興味・関心という側面は、系統的に形作られた数学そのものと独立した形で捉えられるべきではなく、むしろ、その数学を学習し理解させる際の方法論の基本的な要素として捉えられるべきである。そうすることはすなわち、これまでの教科指導をより発展させ工夫させた形で捉え、生徒に多様な活動や様々な視点で学習させることにつながり、このことが今求められている学びの転換につながるものの1つであると考えられる。

しかし、実際に授業をしていると、数学的には非常に重要な部分なのだが、授業の内容は無味乾燥なもの

になっている、という矛盾をしばしば感じたり、生徒は興味を持って取り組んでいるが、その学習がどういう意味を持つかが伝わりにくかったりした事例も多くあったように思われる。

そうしたなかで、関数の領域の学習は、比較的数学的内容と生徒の興味・関心とを結びつけやすいと場面であると思われる。それは、現実世界における現象を関数で表現できる事例が多くあるからである。つまり、そこでは、複雑な現象を数学的にモデル化して処理し、その結果を現実世界に戻して吟味したり、数学的な結果を現実の事象に適用したりすることで、数学の有用性や、さらには、数学が自分の身のまわりに現れてくるのだというおどろきを感じ取らせることができる。関数の学習については小学校以後、2つの数量の対応や変化に着目し、表やグラフ、式を用いて様々な関数の特徴について考察してきている。中学校や高等学校においては、1次関数や2次関数について学習し、それらの学習は身近な事例と結びつけられながら学習することで、生徒のより主体的な学習が期待される。

特に今回扱う指数関数・対数関数は、自然現象や社会現象の中にみられる生成発展や衰退の様子を記述するのに用いられることから、生徒にとって身近に感じることのできる関数の1つである。対数関数は指数関数の逆関数として定義されるが、逆関数の考え方については数学Ⅲの内容であるために、実際の授業においては対数の値を求めるために対応する指数を考えることが中心となる。しかし、その一方で、厳密な議論を行っていないにも関わらず、2つのグラフの関係（2つのグラフが直線 $y=x$ に関して対称になっていること）などから、2つの関数の間に何らかの強い結びつきを感じる生徒も少なくないように思われる。

そこで今回の授業では、身のまわりにある関数の例として紹介するのではなく、あくまで問題解決の過程でこれまで学習した内容を用いて考察し、生徒にとって未知のことがらを探求する場面を設定することを意識したものとなっている。本時では、音程のしくみを探求するためにギター弦の長さ注目させ、グラフをかいたりこれまでの経験から予想したりする活動を通して、既習の知識を用いて、対数グラフ用紙の上に現れたグラフを考察することによって、2つの数量の関係を発見させ、関数についての理解を深めることがねらいである。

b. 授業の実際

(1) 教材について

音の高さの周波数関係は音律と呼ばれるが、この音律は歴史的な変遷の中で様々に変化してきたものである。紀元前5、6世紀のギリシャでは、5度の音程

(ドとソの音程)の周波数比を2対3と定義して音律を構成した。これはピタゴラス音律と呼ばれるもので、これは、弦の長さを $\frac{2}{3}$ にしたときに弾いて出る音がもとの弦を弾いて出る音と協和するという事実を用いたものである。しかし、その後の西洋音楽の発展にともない、複数の旋律が同時に奏でられる様式の音楽が出現し、3度音程(ドとミの音程)が多用されるようになってきた。ピタゴラス音律における3度音程は複雑な周波数比をもっていたため、うなりを生じたり、あらい響きになってしまい、3度音程の2音を同時に奏でたとき、その響きが美しくならなかった。そこで、3度音程の周波数比を4対5と単純にすることで響きを美しくした純正律が登場した。さらに、音楽の発展にともなって1曲の中で次々と転調する必要が生じ、この転調の問題を解消する形で現在の平均律に至っている。平均律は、オクターブ内に12の半音が含まれることを利用して、オクターブの音程を正確に12等分して作った音律である。

このように、音律は音楽の発展と密接に関わっており、多くの数学的な要素を含んでいる。三角関数のグラフや合成、指数関数・対数関数などの学習を通して、これらの先人の文化の足跡をたどることは、非常に意義深いものであり、数学という学問の奥深さと現実世界との深い関わりを学習者に実感させることができると思われる。

(2) 授業実践

授業者：井上 芳文

題目：指数関数・対数関数の応用

目標：対数グラフ用紙を用いて、身のまわりにある2つの数量の間の関係を考察させ、指数関数・対数関数についての理解を深める。

指導過程：

(導入)

課題の確認と予想

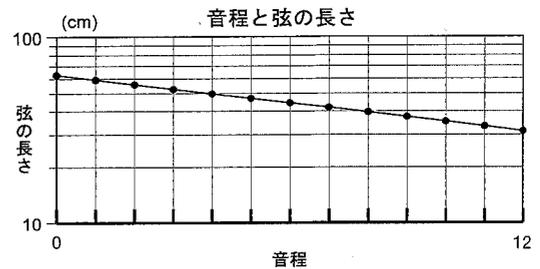
○問題意識の喚起

- ・ギター弦を押さえる部分の線が等間隔でないことに気付かせる。
- ・どのような規則でその線が配置されているのかを考察させる。

○課題の確認

- ・ミ、ファ……という音程を0, 1, ……としたとき、音程と弦の長さという2つの数量の間の関係について考察させる。
- ・2つの数量の間に潜んでいる関係を予想させる。
- ・通常のグラフ用紙に点をプロットし、できあがった点がこれまでに学習してきた関数のグラフ上にあるのか、それとも、これまで学習したことのない新し

い関数なのかを考察させる。(1次関数、2次関数、指数関数など)



音程	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
弦の長さ	62.7	59.2	55.8	52.7	49.7	46.9	44.3	41.8	39.5	37.3	35.2	33.2	31.3

(展開)

対数グラフによる考察

- 片対数グラフ用紙を紹介し、音程と弦の長さについて、グラフ上に点をプロットする。
- ・対数グラフのしくみを十分に理解させる。
- それらの点が直線上に並んでいることを確認し、そのことの意味を考えさせる。
- ・変数を変換することによって、2つの数量の関係について考察させ、もとの関数が指数関数であることを理解させる。

数学的な処理と結果の吟味

- 2つの数量の間の関係式を求める。
- ・これまでの考察によって関係式を $y = A \cdot a^x$ として、与えられた数値を用いて関係式を求めさせる。
- 音程が上がるごとに弦の長さがほぼ $\frac{1}{1.06}$ 倍になっていることを確認し、その理由について考察する。
- ・12の半音が上がると振動体の長さが半分になることから方程式 $r^{12} = \frac{1}{2}$ を解き、この値がほぼ $\frac{1}{1.06}$ となっていることを確認する。
- (まとめ)

○本時の学習内容をまとめて確認する。

c. 数学総合学習との関わり

数学総合学習を捉える視点として①教育目的の総合②領域間の総合③シチュエーションの総合があげられているが、今回の実践に関しては特に、②③との関わりについて考察する。

②の「領域間の総合」とは、すなわち、学習内容がある特定の1つの分野に限定することなく、複数の領域にわたって(場合によっては複数の教科にわたって)学習を捉える視点である。今回の題材では、数学科、理科、音楽科との関連が考えられる。音楽科では「旋律に対する和音の工夫」において、物理では「光と

音]、あるいは「波動」の領域における学習との関連が考えられる。ただし、数学総合学習の教材として体系化するにあたっては、他教科と相互に連絡し、学習者のレディネスに配慮しながら、無理のないような自然な流れで教育課程を考える必要がある。

③の「シツエーションの総合」とは、数学と現実的状况との関わりから学習を捉える視点である。数学の学習が生きてはたらく力に結びつくためには、学習者の主体的な姿勢が最も重要となるが、その原動力となるのが教材への興味・関心あるいは好奇心・探求心であり、それを引き出すのに大きな役割を果たすのが③の視点からの学習である。今回の題材においても、音楽という、誰もが多少なりとも関心のある分野に数学を結びつけ、そのしゅみをこれまで学習してきた数学を用いて解明していく作業は、生徒の探求心を十分に奮い立たせることのできるものであると同時に、数学の有用性を感じさせるものである。特に数学が現実世界からの要求によって発展してきたという側面を考えれば、③の視点からの数学総合学習は数学という教科の中で、かなりのウェイトを占めるだけの意味を持つものとなるであろう。

また、数学総合学習を考える上で、数学史の活用も考慮に入れる必要がある。数学教育における数学史の活用の意義は、単に歴史的事実を生徒に伝え、理解させることだけになるのではないと思われる。むしろ、こちらがいくつかの材料を準備し、その当時に存在したであろう困難性のいくつかを除外した環境を整え、数学的な発見や創造を学習者に追体験させることにあると思われる。この考えにたてば、数学史は単なるエピソードとして紹介されるのではなく、系統的な数学的内容を本格的に学習しようとする科目においても積極的に活用されるべきである。ただ、この場合においても、教材の配列が慎重に検討される必要がある。

d. 今後の課題

総合的な学習は、「自ら課題を見つけ、自ら学び、自ら考え、主体的に判断し、よりよく問題を解決する資質や能力を育てること」を目的として行われるものであるが、その内容としては、生徒が興味・関心、進路等に応じて設定した課題について、知識や技能の深化、総合化を図る学習活動が求められる。数学総合学習もこのような要求に応えるものとして行われなくてはならないが、そのためには、体系化された教育課程の開発が重要となる。それは、数学科の教科内容との関わりを十分に考慮するとともに、他教科との連絡も十分にとる必要がある。何を既習の内容として、何を新しい内容として生徒に探求させるのかといった点を明確にする必要がある。特に他教科での学習内容を前

提とするような場合には、生徒の理解の様子を注意深く判断して教材を構成することが重要となるであろう。

5. おわりに

2. で述べたように、学びの転換を成功させるためには、いろいろな教材や指導方法が考えられるが、ここでは、次の授業展開例を提示した。

①他教科や数学の他領域と関連して扱うことが必要な教材

②実験・実測や操作的活動を取り入れ、生徒が意欲的で主体的に学習に取り組むことができる教材

③数学的な見方や考え方のよさを実感させ、学習内容がさらなる発見につながる教材

提示した授業展開例について考察してみよう。

I. 三角形の重心の展開例は、生徒が興味・関心を持って実験・観察する教材であるだけでなく、三角形から四角形へ発展的に考えることの手法や大切さを理解させ、実験から数学的な考察へ発展させることができる教材でもある。これらの点について、実践を積み重ねることによって具体的な筋道をさらに明らかにしていくことが今後の課題である。

II. 円の性質と四角形の展開例は、身のまわりのことがらを、いつも数学的に考察しようとする態度で観察することの大切さを認識させる例である。また、具体的・日常的なことがらから、それを如何に数学化すればよいのかという手順を示唆する格好の展開事例といえよう。常にこのような観察の態度をもちたいものである。

III. 数列の展開例は、まさに総合学習にふさわしい教材である。このような教材を開発していくことがわれわれ教師の大きな使命の1つであろう。今後の大きな課題として、他教科との関連を明確にし、それを踏まえて、数学総合学習としては、どのように指導・展開していけば、生徒にとって主体的で無理のない学習となるのかを明確にしていくことである。指導事例を踏まえて、真に生徒の主体的な学習教材となるようにすることが大きな課題であろう。

IV. 指数関数・対数関数の展開例は、かつて使われていた計算尺の原理を考察させたり、計算尺の製造・歴史なども考察させることによって、総合学習にもできる内容で、さらなる工夫が課題である。

このようにすることで、受け身的な学習から発見的で主体的な学習となり、学びの質的な転換につながるであろう。このような授業が可能になるような教材と指導の手順を明らかにしていく必要がある。

ところで、次頁の作品は、中学校2年での総合学習で、書写、美術、数学の3教科で、「色彩、平面構成の学習をリンクさせて、1つのCG作品として仕上げ

る」授業⁵⁾を実施したときの生徒の作品の1つである。この授業で生徒は見事な作品を作り上げた。数学科教師の役割は、主にコンピュータの使い方を指導することであったが、生徒がお互いにできあがった作品を鑑賞し、評価するところまで考えさせると、数学科教師としてより積極的に参加で



きるのではないかと思われた。例えば、生徒に作品の評価項目を作成させ、調査から集計するところまで考えさせる、また、無謀であるかもしれないが、「作品の美しさを数値化する」方法を考えて実施してみるなどである。このような試みを生徒と共に苦闘してみることは、新しい学びにつながるのではあるまいか。是非、今後試みてみたいと思っている。

学びの転換につながる授業へのアイデアは、授業を実施し、生徒と共に苦闘しながら行動するところから新しいアイデアが生まれることが多いように思う。

参考文献・資料および注

- 1) 中原忠男他10名,「中学校・高等学校における新しい数学科教育課程の研究開発(1)―小・中・高等学校12年一貫の教育課程をめざして―」,『広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要』第26号,1998,pp.93-100
- 2) 中原忠男他10名,「中学校・高等学校における新しい数学科教育課程の研究開発(2)―小学校算数教育課程との接続についての具体的な検討―」,『広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要』第27号,1999,pp.109-116
- 3) 中原忠男他10名,「中学校・高等学校における新しい数学科教育課程の研究開発(3)―新しい教育課程実施に向けての課題の検討―」,『広島大学教育学部・関係附属学校園共同研究体制研究紀要』第28号,2000,pp.135-144
- 4) 中原忠男,「数学科における学びの転換」,広島大学附屬中・高等学校中等教育研究大会講演,2000.11.17
- 5) 作品は書写から書道への接続を図る内容と,美術の色彩,平面構成の学習をリンクさせて,1つのCG作品として仕上げたもので,広島大学附屬中学校3年生17人の作品から抜粋。
(授業者:佐伯育郎,谷口邦彦,井ノ迫泰弘)

参考HP:<http://www.hiroshima-u.ac.jp/Committee/forum/31-4/index.html>