Iterative Formula for Exponentially Weighted Rolling Regression

Taro Kanatani*†

October 2003

* Graduate School of Economics, Kyoto University
† E-mail: taro@e02.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

論文の内容

■ rolling regression による volatility の推定方法について．

■ rolling regression のなかでも EWRR は誤差分散を最小にする (Foster and Nelson, 1996)．

1. EWRR の簡単な計算方法
2. EWRR の使用例

略語

◇ EWRR: exponentially weighted rolling regression

◇ FWRR: flat-weight rolling regression

DGP: **状態空間モデル**

■ **以下のように** volatility **は観測されない時間を通じて変わっていくプロセスとしてモデル化されるから推定が難しい．**

◇ **観測されるプロセス：株価など**

(1) $$\Delta X_t = \mu_t + \Delta M_t,$$

(2) $$E((\Delta M_t)^2|\mathscr{F}_{t-1}) = \Omega_t,$$

◇ **みえないプロセス：**volatility

(3) $$\Delta\Omega_t = \lambda_t + \Delta M_t^*.$$

■ **このようにモデル化すると様々な現象を説明できる．**

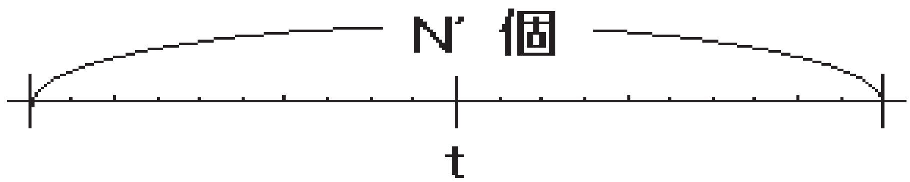
Volatility の推定

■ volatility が一定のとき推定は簡単．

$$\hat{\Omega} \equiv \frac{1}{N}\sum_t (\Delta X_t - \hat{\mu}_t)^2 \tag{4}$$

■ volatility が時間を通じて連続的に変化する時，時点 t の近くで

$$\hat{\Omega}_t \equiv \frac{1}{N'}\sum_s (\Delta X_s - \hat{\mu}_s)^2 \tag{5}$$



■ 短い区間の中にたくさんの観測値がなければならない．

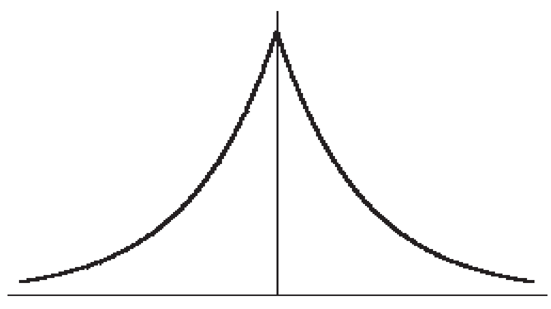
■ 区間の短さと観測値の数はトレードオフの関係にある．何個にすればいいのか...

最適 weight

■ Foster and Nelson (1996) **は観測誤差を最小にするような個数を決めた．**

■ **さらに観測誤差を最小にするような** weight **の形まで決めた．**

(6) $$\hat{\Omega}_t \equiv \sum_s \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|s-t|} (\Delta X_s - \hat{\mu}_s)^2$$



■ α **は** 2 **つの推定困難なパラメータに依存する．**

■ **最適** weight **を求めてみたものの** Foster and Nelson (1996) **で使われたのは計算が簡便な算術平均** (Flat-weight)**．**

iterative formula

■ EWRR を過去と未来に分ければ iterative な関係がみつかる．

$$\overbrace{\sum_s \frac{a}{2} e^{-a|s-t|} z_s}^{EWRR[a;z](t)} = \underbrace{\sum_{s \le t} \frac{a}{2} e^{a(s-t)} z_s}_{P[a;z](t)} + \underbrace{\sum_{s > t} \frac{a}{2} e^{-a(s-t)} z_s}_{F[a;z](t)},$$

■ それぞれ以下の漸化式にまとめられる．

$$P[a;z](t) = e^{-a} P[a;z](t-1) + \frac{a}{2} z_t,$$
$$F[a;z](t) = e^{-a} F[a;z](t+1) + \frac{a}{2} e^{-a} z_{t+1}.$$

$P[a;z]$ は前向き，$F[a;z]$ は後ろ向きにそれぞれ計算して，各 t に関して足す．

EWRR vs Realized Volatility

■ realized volatility は

$$(7) \qquad \hat{\Omega}_t = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta X_{t-i} - \hat{\mu}_{t-i})^2,$$

で定義される．n は研究者が適当に決める．

■ $a = \sqrt{3}/n$ の EWRR

$$\hat{\Omega}_t = \sum_s \frac{a}{2} e^{-a|s-t|}(\Delta X_s - \hat{\mu}_s)^2$$

は realized volatility (7) より $\sqrt{3}/4 (\approx 0.433)$ だけ各時点で誤差分散を小さくできる．

Monte Carlo 実験の DGP

- S & P 500 の日次データをモデル化．

$$\Delta X_t = \sqrt{\Omega_t} \cdot u_{1t},$$
$$\Delta \log \Omega_t = \kappa(m - \log \Omega_{t-1}) + \sqrt{\Lambda} \cdot u_{2t},$$

ただし

$$\kappa = 0.0056,\ m = -0.4246,\ \Lambda = 0.012,$$
$$u_{1t} \sim i.i.d. T_{12}(0,1), u_{2t} \sim i.i.d. N(0,1).$$

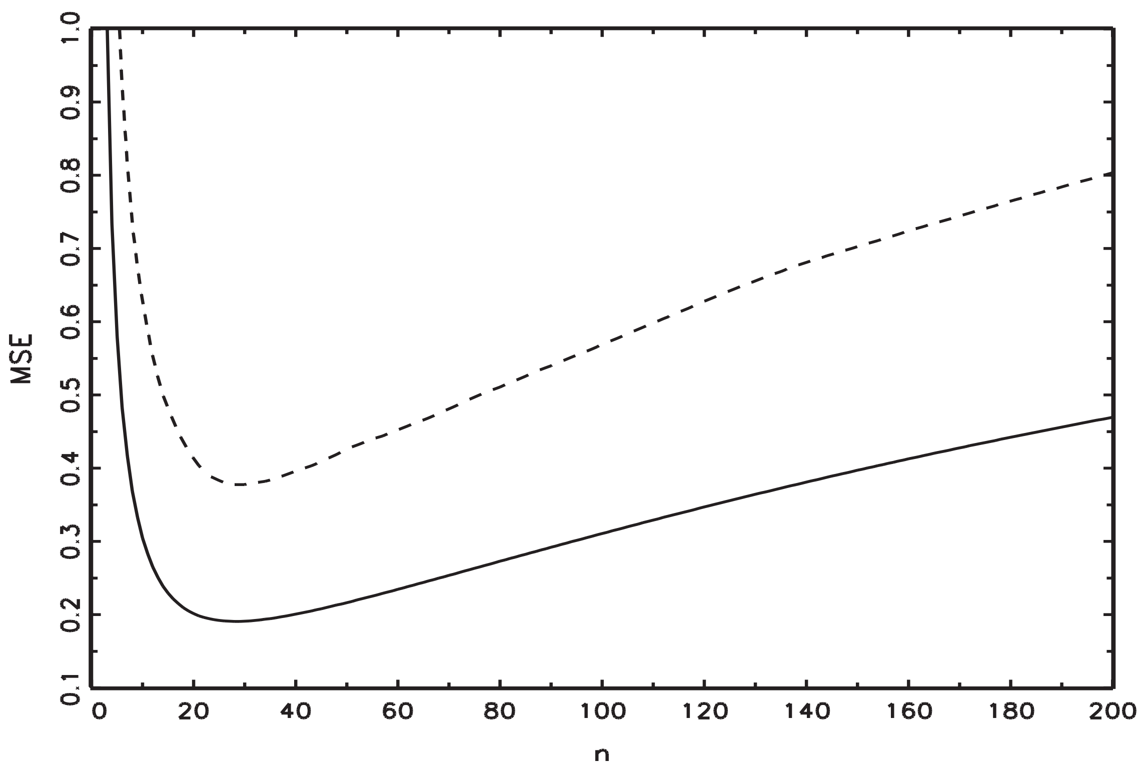
- 観測値 X_t を 16,885 個発生させる．
- 600 回繰り返し実験．

結果

- **この** DGP **においては** $n \approx 26$ **が最適（誤差分散最小）．よって** MSE **も以下のとおりになる（表は** 600 **回の平均** MSE **の比較）．**

n	1	20	26	100	10000
RV	12.456	0.768	0.724	1.146	4.484
EWRR	8.557	0.354	0.338	0.603	3.333
比	0.687	0.461	0.467	0.526	0.743

- 600 **回のうちの** 1 **回．**



まとめ

- α の推定は問題．(Foster and Nelson (1996) では一致推定量を提案している．)

- α の推定をしなくても，少なくとも従来の realized volatility よりはよい推定が簡単にできる．